



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGORITMOS PARA EL ANÁLISIS DE IMÁGENES DE
GASES ULTRAFRÍOS DE ${}^6\text{Li}$

P R E S E N T A:

MARIO CÉSAR UYOA LÓPEZ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

TUTOR

DR. JORGE AMIN SEMAN HARUTINIAN



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX, ABRIL 2024



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Mario César Uyoa López

Correo electrónico: cesaruyoa@ciencias.unam.mx

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

Número de cuenta: 415072786

2. Datos del tutor

Dr. Jorge Amin Seman Harutinian

3. Datos del sinodal 1

Dr. Ricardo Méndez Fragoso

4. Datos del sinodal 2

Dr. Asaf Paris Mandoki

5. Datos del sinodal 3

Dr. Freddy Jackson Poveda Cuevas

6. Datos del sinodal 4

Dr. Jorge Alberto Márquez Flores

7. Datos de la tesis

Algoritmos para el análisis de imágenes de gases ultrafríos de ${}^6\text{Li}$

100 p.

2024

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres, Socorro y Mario, cuyo apoyo y enseñanzas han sido un faro constante a lo largo de mi vida.

Asimismo, mi gratitud se extiende a mi familia, cuya presencia ha sido fundamental en esta odisea: mis hermanos Omar y Saúl, mis primas Elida, Marisol, Rosy y Aurora, mis primos Ismael y Christian, Vicenta Villa, mi tío Toni y prima Juana.

Agradezco enormemente a mis queridos amigos de la Facultad: Emmanuel, Dhamar, Jazmín y Tania, por cada risa y momento compartido. También estoy muy agradecido con mis amigos, Abraham, Betillo, Arturo, Israel, Osvaldo y Ricardo por su lealtad y respaldo. Su presencia ha hecho este camino una experiencia especial.

Agradezco de todo corazón a Mar Quevedo, por su gran cariño e infinito apoyo.

Quiero reconocer especialmente a Lucio Arias, Lorenzo Hernández R., Marcos Orendain, Víctor Domínguez, Alfredo Zatarain, José Reyes, Eduardo Alvarado, Hugo Martínez, Laura Ibañez, Natalio Gutiérrez, Mario Vázquez, Mauricio Carrillo, Víctor Romero, Verónica Martínez, Alexis Aguilar, Miguel Bastarrachea, Héctor Cruz, Felipe Méndez, Eugenio Ley Koo, Emma Lam, Fermín Viniegra, Chumin Wang Chen, Rosa María Couvert, Ricardo Atahualpa, Sergio Pelayo y Jorge Seman, grandes profesores cuya influencia positiva ha sido crucial en mi desarrollo académico y personal.

También, agradezco a mis amigos y mentores de Montañismo UNAM y de Adventurers Pacific Northwest, cuya amistad y enseñanzas han enriquecido esta aventura.

Mi sincero agradecimiento a la Universidad Nacional Autónoma de México, institución pública que ha sido fundamental en mi desarrollo académico y personal. Así mismo, al Instituto de Física y al Laboratorio de Materia Ultrafría por impulsar y facilitar la realización de este trabajo.

El desarrollo de esta tesis fue financiado por diversos proyectos de investigación.

Proyectos DGAPA-PAPIIT (UNAM):

1. IN109021: “Excitaciones colectivas en superfluidos fermiónicos”.
2. IN105724: “Dinámica de las excitaciones en superfluidos atómicos bidimensionales”.

Proyectos CONACyT:

1. Proyecto de Laboratorio Nacional de Materia Cuántica: Materia ultrafría e información cuántica. Especialmente al proyecto No. 315838.
2. Ciencia de Frontera No. CF-2023-I-72: “Sistemas cuánticos bidimensionales fuera de equilibrio”. En relación a este proyecto de Ciencia de Frontera agradezco también la beca recibida.

Agradecemos también el financiamiento recibido de la Coordinación de la Investigación Científica de la UNAM, proyectos No. LANMAC-2022, LANMAC-2023, y LANMAC-2024. Así como al apoyo proporcionado por el IFUNAM.

Quiero agradecer sinceramente al Dr. Jorge Amin Seman Harutinian por su tiempo, dedicación y comprensión durante este trabajo. Su disposición y orientación fueron invaluable, brindándome orientación y soluciones a los desafíos afrontados. También agradezco a *LithiumLab* del INO-CNR y el LENS de la Universidad de Florencia, especialmente a Giacomo Roati, Diego Hernández Rajkov y Giulia del Pace, por proporcionar las imágenes de vórtices que fueron fundamentales para este trabajo.

Un agradecimiento especial a Diego Hernández Rajkov por su gran apoyo, facilitando valiosos algoritmos y asesoramiento en el análisis de imágenes. También agradezco a Carlos Alberto Gardea Flores y Rodrigo Alejandro Gutiérrez Arenas del Instituto de Física de la UNAM por su asesoramiento en el tratamiento de imágenes de vórtices. Su colaboración fue crucial para el avance y mejora de nuestros algoritmos.

Agradezco a mis sinodales: Ricardo Méndez Fragoso, Asaf Paris Mandoki, Jorge Alberto Márquez Flores y Freddy Jackson Poveda Cuevas, por su tiempo y valiosas recomendaciones, las cuales mejoraron significativamente este trabajo.

Finalmente, agradezco a Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer y Ricardo Méndez Fragoso profesores de la Facultad de Ciencias, UNAM, y a mi compañero y amigo José Emmanuel Paredes Rocha por su contribución al desarrollo de los algoritmos y métodos computacionales utilizados en este trabajo.

Índice general

Introducción	1
1. Excitaciones Colectivas en Gases Cuánticos	5
1.1. Gases Cuánticos	5
1.1.1. Estadística Cuántica de Fermiones y Bosones	7
1.1.2. Condensación de Bose-Einstein de un Gas	9
1.1.3. Cruce BEC-BCS	11
1.1.4. Ecuación de Gross-Pitaevskii	13
1.2. El gas cuántico de ${}^6\text{Li}$	14
1.2.1. Sintonizando la interacción: Resonancias de Feshbach	15
1.3. Excitaciones Colectivas Cuánticas	17
1.3.1. Ondas de Faraday	18
1.3.2. Vórtices cuantizados	21
1.4. Técnica de imagen por absorción	25
2. Algoritmos: excitaciones colectivas simuladas	28
2.1. Ondas de Faraday	28
2.1.1. Faraday 1.0: Detección de máximos locales	28
2.1.2. Faraday 1.1: Detección de máximos locales con ruido	30
2.2. Vórtices en dos dimensiones	36
2.2.1. Seg 1.0: Detección de vórtices por segmentación	39
2.2.2. Seg 1.1: Detección de vórtices con ruido y filtro Sauvola	43
2.2.3. Blobs 1.0: Detección de <i>Blobs</i> con filtros LoG y DoG	47
3. Algoritmos: excitaciones colectivas reales	54
3.1. Faraday 1.2: Detección de franjas de Faraday	54
3.2. Blobs 1.1: Detección de vórtices cuantizados	61

4. Análisis de resultados	68
4.1. Patrones de ondas de Faraday	68
4.2. Vórtices cuantizados y su distribución espacial	75
5. Conclusiones y perspectivas	78
Bibliografía	83

Resumen

En el Laboratorio de Materia Ultrafría (LMU) del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México (IFUNAM), estudiamos la dinámica de diferentes excitaciones colectivas en gases superfluidos compuestos de átomos de ${}^6\text{Li}$. Dado que estas excitaciones muestran configuraciones específicas en el perfil de densidad de la muestra, es crucial disponer de herramientas de análisis de imagen apropiadas. Esta es la motivación principal de esta tesis, donde hemos desarrollado algoritmos innovadores para el análisis de imágenes de dichos gases superfluidos. En este contexto, se han estudiado dos tipos de excitaciones colectivas: ondas de Faraday y vórtices cuantizados. En un primer paso, creamos imágenes simuladas de estas excitaciones y desarrollamos varios algoritmos para su análisis. Estos algoritmos sentaron las bases para desarrollar herramientas de análisis de imágenes reales, como *Faraday 1.2*, que se especializa en detectar el número de franjas en un perfil de ondas de Faraday, y *Blobs 1.1*, diseñado para identificar tanto vórtices cuantizados como franjas.

Las franjas representan regiones de alta densidad en el gas excitado. Su número nos proporciona información sobre la distribución espacial del patrón de ondas de Faraday y nos permite calcular el parámetro γ , que define la ecuación de estado del sistema ultrafrío. También es posible calcular el vector de onda de Faraday (k_{FW}), lo que nos facilita el acceso a cantidades físicas fundamentales como el radio de Fermi (R), el *healing length* (ξ) y la distancia interatómica (l).

Por otra parte, al detectar vórtices cuantizados, hemos calculado estadísticas importantes como la media, desviación estándar y mediana del número de vórtices presentes en una serie de imágenes. Además, al conocer su distribución, hemos evaluado la probabilidad de generación de estos vórtices en distintas regiones circulares de la trampa.

Estos algoritmos han permitido un acceso eficaz y eficiente a información crucial en las imágenes de estas excitaciones, destacando la relevancia significativa de su aplicación en la física de los gases ultrafríos.

Introducción

El Laboratorio de Materia Ultrafría (LMU) del Instituto de Física de la UNAM es pionero en México en el fascinante estudio de los gases cuánticos ultrafríos.

En tal laboratorio ha sido posible producir y estudiar con éxito gases cuánticos fermiónicos en estado superfluido. Una de las principales líneas de investigación se enfoca en el estudio de la formación y dinámica de excitaciones cuánticas colectivas. En la actualidad, se están investigando excitaciones de naturaleza fonónica, como las ondas de Faraday, que son ondas estacionarias generadas por una perturbación paramétrica en la superficie de un fluido que oscila verticalmente [1]. En un superfluido, estas ondas se observan como franjas periódicas en el perfil de densidad, véase Figura 1.

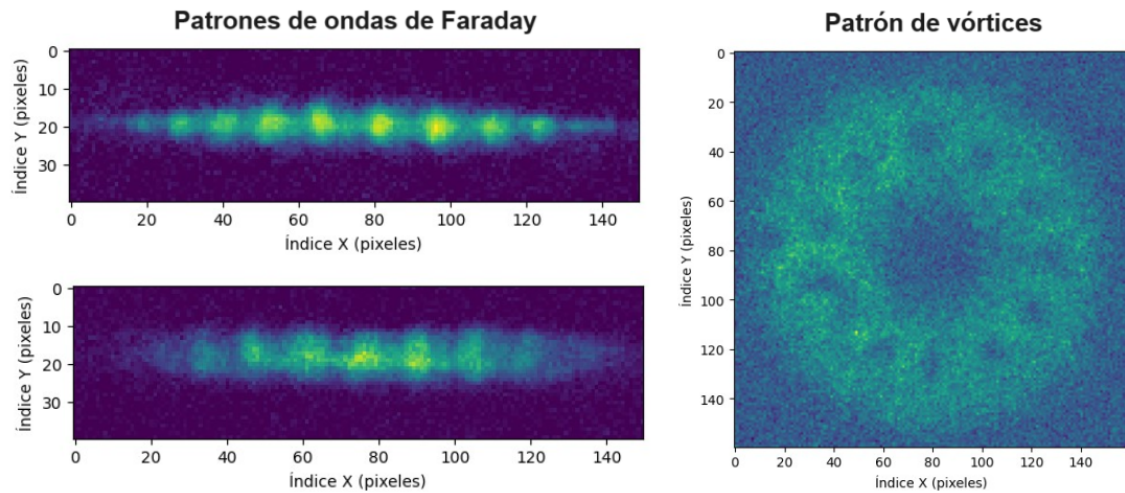


Figura 1: Excitaciones cuánticas colectivas en un superfluido fermiónico. A la izquierda dos patrones distintos de ondas de Faraday, y a la derecha un patrón de vórtices cuantizados. *Cortesía del LMU y de Lithium Lab.*

En el futuro próximo, el laboratorio tiene planes de expandir su estudio hacia casos en los que la excitación porta momento angular, dando lugar a la aparición de vórtices cuantizados en el superfluido, véase Figura 1. Este enfoque promete abrir nuevas

perspectivas en la investigación científica del LMU. Un vórtice es un tipo particular de movimiento en un fluido que surge de su rotación. La cantidad física que caracteriza la rotación es la vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$, siendo \vec{v} el campo de velocidad del fluido. Cualitativamente, un vórtice es una región fluida que muestra una alta concentración de vorticidad en relación con su entorno [2].

En particular, una pregunta importante en nuestro trabajo es la siguiente: ¿Es posible obtener información sobre la física de las excitaciones colectivas en sistemas superfluidos a través del conteo y distribución de franjas en las ondas de Faraday o de vórtices cuantizados en estos sistemas? La respuesta afirmativa se demostrará en este estudio, destacando la relevancia crucial del desarrollo de algoritmos para analizar las imágenes de dichos patrones.

Las ondas de Faraday y los vórtices cuantizados son fundamentales en la caracterización y comprensión de la superfluidez. Estas excitaciones permiten visualizar y estudiar fenómenos cuánticos a escala macroscópica, lo que contribuye a confirmar la naturaleza cuántica de los superfluidos. Además, observando su formación y comportamiento, entendemos mejor las interacciones atómicas en estos.

En otras áreas de la investigación, como es el caso de la astronomía, se han implementado exitosamente algoritmos de detección de *Blobs* (manchas), utilizando filtros gaussianos, para la identificación y cuantificación de galaxias en imágenes del *Hubble eXtreme Deep Field* haciendo uso de la librería *scikit-image* [3]. Estas técnicas de análisis pueden extenderse a otras áreas de investigación como la nuestra. Por ejemplo, existen investigaciones que emplean estos algoritmos para analizar imágenes y contar vórtices [4, 5]. No obstante, no se han aplicado específicamente para el recuento de franjas en patrones de ondas de Faraday en superfluidos, lo cual se ha llevado a cabo con éxito en este trabajo. Es importante destacar que hasta el momento, esta metodología no se había utilizado ni en nuestro laboratorio ni por parte de nuestros colaboradores para la identificación y conteo de los patrones generados por este tipo de excitaciones. Este trabajo facilitará el desarrollo de algoritmos específicos para el análisis de imágenes obtenidas en los experimentos del LMU. Además, estos algoritmos podrán ser ajustados y perfeccionados en el futuro según sea necesario.

Este trabajo tiene dos objetivos principales. En primer lugar, se busca desarrollar algoritmos capaces de localizar y contar el número de franjas en imágenes de ondas de Faraday generadas en el LMU. Esto proporcionará acceso a cantidades físicas del sistema basadas en la distribución y número de franjas. En segundo lugar, se pretende

desarrollar algoritmos que permitan localizar y contar el número de vórtices cuantizados. Nuestro laboratorio aún no ha dado inicio a experimentos con vórtices, por lo que hemos utilizado imágenes facilitadas por el Dr. Giacomo Roati, responsable del laboratorio *LithiumLab*, del LENS & INO-CNR con sede en la Universidad de Florencia, véase Figura 1. Esta colaboración nos permitirá diseñar el algoritmo necesario para cuando se inicien los experimentos con vórtices en el LMU. La capacidad de localizar y contar vórtices proporcionará información sobre la estadística del número de vórtices y la probabilidad de su distribución en diferentes regiones del superfluido.

Los algoritmos se han desarrollado en lenguaje *Python*. El enfoque para localizar y contar las franjas se basa en el análisis del perfil generado a partir del patrón de ondas de Faraday. Esto implica la identificación de los máximos del perfil, que representan las franjas, mediante la comparación con sus primeros vecinos. Además, se aplican filtros para reducir el ruido en estos perfiles. En cuanto a la localización y el conteo de los vórtices, se utiliza un método de detección de *Blobs* basado en los filtros LoG (Laplacian of Gaussian) y DoG (Difference of Gaussian). Este último método también localiza y cuenta franjas en ondas de Faraday. En ambos métodos, se realizan ajustes de parámetros según el nivel de ruido presente.

En el contexto de las ondas de Faraday, se establecieron relaciones importantes entre diferentes cantidades físicas, como la frecuencia de excitación, la ecuación de estado del sistema y el número de franjas. Además, se conecta el vector de onda de Faraday con la distribución espacial del patrón de manera analítica y a través de la transformada de Fourier. En el caso de los vórtices, su localización y recuento nos permite determinar si están distribuidos de manera uniforme y si su número coincide con las predicciones experimentales.

Esta tesis consta de seis capítulos. En el primer capítulo, se presenta una breve descripción de la riqueza de los gases cuánticos, abarcando desde la estadística fermiónica y bósónica, pasando por la condensación de Bose-Einstein y la ecuación que los gobierna, las resonancias de Feshbach, hasta llegar a las excitaciones fonónicas (ondas de Faraday) y topológicas (vórtices cuantizados). En el segundo capítulo, se crean imágenes simuladas de patrones de ondas de Faraday y de vórtices cuantizados en superfluidos. Además, se desarrolla una serie de algoritmos destinados a la localización y al conteo de franjas y vórtices en estas imágenes simuladas. En el tercer capítulo, se perfeccionan los algoritmos previamente desarrollados para ser aplicados en imágenes reales obtenidas en el LMU y en *Lithium Lab*. El cuarto capítulo se centra en explorar las conexiones entre el número de franjas en un patrón de ondas de Faraday y otras

propiedades físicas del sistema superfluido. También se investiga la localización y el recuento de vórtices cuantizados con el fin de inferir características físicas en función de los métodos de generación y el arreglo experimental. Finalmente, en el quinto capítulo se lleva a cabo el análisis de resultados y se presentan las conclusiones y las perspectivas futuras de este trabajo.

En resumen, este trabajo aborda el desafío de automatizar la identificación y conteo de regiones de interés en sistemas superfluidos, proporcionando herramientas prácticas para los investigadores en este campo. Esta tesis presenta una visión global del problema, la metodología empleada y los conocimientos obtenidos al desarrollar y aplicar estos algoritmos a imágenes simuladas e imágenes reales. Esta valiosa contribución al estudio de los superfluidos tiene el potencial de hacer avanzar nuestra comprensión de la física de los gases ultrafríos.

Capítulo 1

Excitaciones Colectivas en Gases Cuánticos

1.1. Gases Cuánticos

Un gas diluido ultrafrío es un sistema de muchos cuerpos (átomos o moléculas) que se encuentra a temperaturas diez millones de veces más frías que el espacio interestelar y con densidades un millón de veces más tenues que el aire a temperatura ambiente y presión atmosférica [6].

No se ha encontrado evidencia de que existan esas temperaturas increíblemente bajas en la naturaleza y por tanto los pocos laboratorios dónde han sido creados, como el LMU, se consideran los lugares más fríos del Universo. Su estudio es relativamente nuevo en el campo de la física atómica y molecular. La realización experimental en gases diluidos ultrafríos de la condensación de Bose-Einstein (*BEC*, *por sus siglas en inglés*) en 1995 [7–9], véase Figura 1.1, marcó el comienzo de un rápido desarrollo teórico y experimental en el estudio de estos novedosos gases cuánticos, en los cuales la estadística de partículas y sus interacciones, más que el estudio de simples átomos, juegan un papel central [10].

La predicción teórica del BEC se remonta a 1924, cuando Albert Einstein, inspirado por el trabajo de Satyendra N. Bose [11] sobre la estadística de los fotones, predijo la aparición de una transición de fase en un gas de átomos no interactuante [12]. Esta transición de fase está asociada a la condensación de los átomos bosónicos en el estado de menor energía y es consecuencia de efectos estadísticos cuánticos [10].

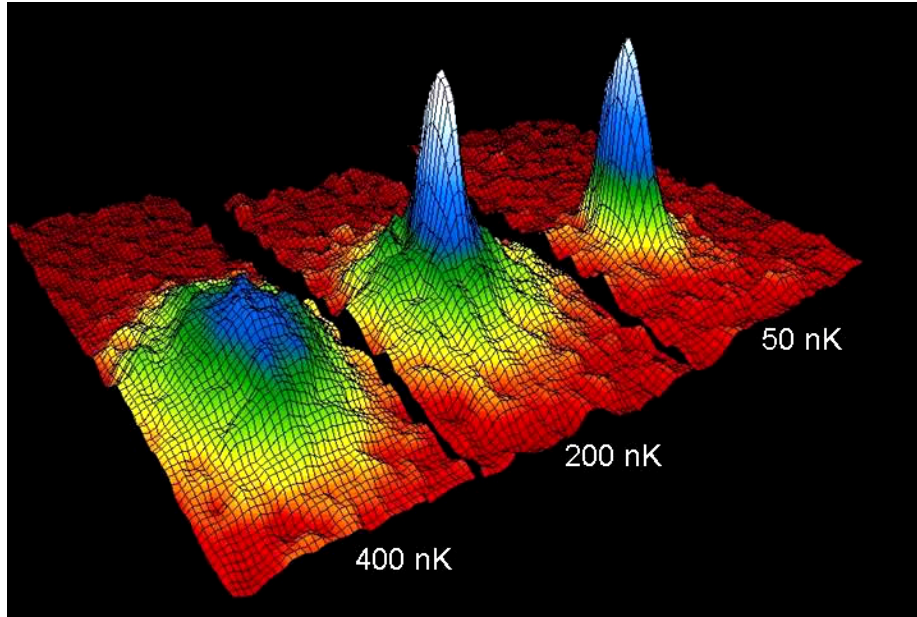


Figura 1.1: Serie de imágenes en color falso de un gas de átomos de rubidio ultrafrío que muestran la aparición de un BEC en el experimento de Cornell et al. (1995) [7]. En la representación, rojo, amarillo y verde significan baja densidad, mientras que azul y blanco indican alta densidad. *Imagen tomada de National Science Foundation [13].*

Otro paso importante fue la producción del gas degenerado de Fermi obtenido al enfriar un gas compuesto por átomos de ^{40}K , de naturaleza fermiónica, muy por debajo de la temperatura de Fermi [14]. En investigaciones posteriores, se ha logrado observar el estado superfluido en un estado de mezcla de espines, donde la formación de pares entre espines diferentes ($\uparrow - \downarrow$) desempeña un papel fundamental [15]. Por ejemplo, se ha observado el estado superfluido en pares moleculares de átomos fermiónicos, como ^6Li [16] o ^{40}K [17], que experimentan condensación de Bose-Einstein porque el espín total de la molécula es entero, y consecuentemente es un bosón. Es importante mencionar que el estado superfluido no es único del BEC molecular, los átomos fermiónicos pueden formar otro tipo de pares, como es el caso de los pares de Cooper, dando origen a un estado superfluido de naturaleza muy semejante al estado BCS en un material superconductor [18]. La formación de estos pares es posible porque en los gases ultrafríos puede controlarse experimentalmente la intensidad de las interacciones interatómicas por medio de un campo magnético externo a través de las llamadas resonancias de Feshbach [19], véase sección 1.2.1. Con este alto nivel de control sofisticado, es posible realizar una transición continua desde el estado BCS (compuesto de pares de Cooper débilmente acoplados), hasta el estado BEC (compuesto por moléculas fuertemente ligadas), a través del llamado cruce BEC-BCS [20]. Es notable

como en apenas dos décadas el estudio de los gases ultrafríos diluidos ha pasado de ser una mera curiosidad teórica a formar parte esencial de la física contemporánea, con fuertes vínculos con la física atómica, molecular y la materia condensada.

Los gases ultrafríos diluidos tienen muchas ventajas para el estudio de los fenómenos cuánticos. Las propiedades estáticas y dinámicas de un BEC débilmente interactuante se pueden describir con bastante precisión mediante la teoría de campo medio (*MFT*, por sus siglas en inglés) [6]. La idea principal de MFT en la teoría de muchos cuerpos es reemplazar todas las interacciones individuales entre las partículas del sistema por una interacción media o efectiva. Este enfoque, por su simplicidad matemática y conceptual, facilita el acceso eficiente a soluciones numéricas e incluso, en algunos casos, a soluciones analíticas. Es mucho más simple que abordar la ecuación de Schrödinger de muchos cuerpos completa. La interacción efectiva entre dos partículas a bajas energías es una constante en la representación del momento [6]. En el espacio de coordenadas esto corresponde a una interacción de contacto representada por $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, donde \vec{r} y \vec{r}_0 son las posiciones de las dos partículas. Este modelo conduce a la ecuación de Gross-Pitaevskii (*GPE*, por sus siglas en inglés) [21,22], que se describe más adelante en la subsección 1.1.4.

1.1.1. Estadística Cuántica de Fermiones y Bosones

Los bosones pueden ocupar el mismo estado de una sola partícula a diferencia de los fermiones, véase Figura 1.2. El número de ocupación se define como la cantidad de partículas en un estado cuántico específico. En sistemas bosónicos puede ser cualquier número entero positivo, mientras en sistemas fermiónicos solo puede ser 0 ó 1, lo que cumple el principio de exclusión de Pauli [23]. Este principio fundamental de la mecánica cuántica, establece que no puede haber dos fermiones con números cuánticos idénticos que ocupen simultáneamente el mismo estado cuántico. Los estados en contradicción con este principio no son físicamente realizables.

La diferencia en el comportamiento de bosones y fermiones resulta en un comportamiento estadístico notablemente diferente al considerar sistemas con un gran número de partículas. La física estadística diferencia entre la estadística bosónica y fermiónica, siendo esta última la que describe partículas que obedecen el principio de exclusión de Pauli. Ejemplos de fermiones incluyen electrones, los protones, los neutrones y los átomos de ${}^6\text{Li}$. Por otro lado, la estadística bosónica describe partículas que no siguen este principio, como fotones, bosones W y Z, el bosón de Higgs y átomos de ${}^7\text{Li}$.

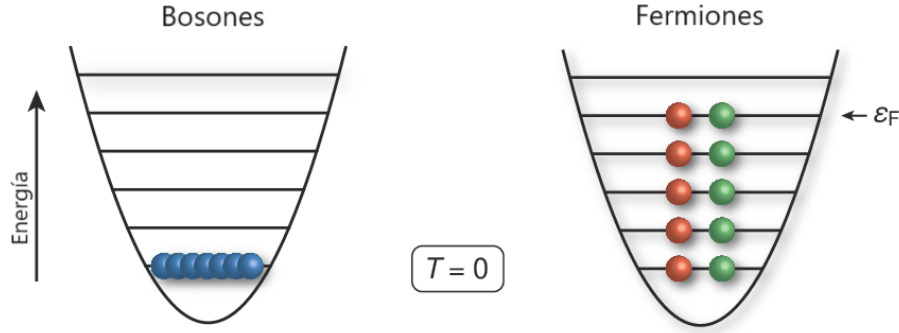


Figura 1.2: Representación esquemática de la estadística cuántica bosónica y fermiónica. A temperatura cero, los bosones forman un condensado de Bose-Einstein, mientras que los fermiones se disponen en un mar de Fermi. La energía del estado ocupado más alto del mar de Fermi es la energía de Fermi ϵ_F . Las esferas verdes y rojas corresponden a dos estados de espín (espín arriba y espín abajo). Las esferas azules indican bosones, las rojas y verdes fermiones. *Tomada y modificada de [24].*

Las distribuciones de Bose-Einstein se aplica a bosones, mientras que las de Fermi-Dirac se aplica a fermiones.

Las distribuciones de Bose-Einstein y de Fermi-Dirac describen como se organizan las partículas en sistemas de partículas idénticas no interactuantes, aplicandose a bosones y fermiones respectivamente [6]. Estas distribuciones nos permiten determinar la cantidad de átomos o moléculas con naturaleza bosónica o fermiónica en un estado de energía determinado, cuando el sistema se encuentra a una temperatura (T) y un potencial químico (μ) específicos. Según estas estadísticas, el número promedio de partículas que ocupan cada estado cuántico se calcula de la siguiente manera [25]:

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1} \quad (1.1)$$

el signo positivo (+) corresponde a la distribución de Fermi-Dirac y el negativo (−) a la distribución de Bose-Einstein, $\beta = 1/k_B T$ (k_B la constante de Boltzmann), i el estado cuántico de la partícula individual y ϵ_i la energía del mismo estado.

Es importante notar que en la distribución de Bose-Einstein, el potencial químico debe ser menor o igual a cero ($\mu \leq 0$). En otro caso, se podría llegar a una situación en el que el número de ocupación n_i de un estado cuántico i sea un número negativo, lo que carece de sentido físico, pues esto implica que un número negativo de bosones ocupa tal estado. En cambio, en la distribución de Fermi-Dirac, no hay restricciones en el valor del potencial químico, es posible tomar valores positivos o negativos.

Al definir el coeficiente $\alpha = \frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T}$, cuando $\alpha \gg 1$, podemos despreciar el término ± 1 en ambas distribuciones, ya sea la de Fermi-Dirac o la de Bose-Einstein. En este escenario, ambas distribuciones convergen hacia la distribución de Maxwell-Boltzmann [25]. Esto significa que el sistema pierde sus características cuánticas y empieza a obedecer la mecánica estadística clásica.

1.1.2. Condensación de Bose-Einstein de un Gas

El comportamiento macroscópico de un gas ultrafrío y diluido está determinado por la física estadística y la mecánica cuántica. A continuación, abordaremos cómo surge este comportamiento cuántico y cómo se ve influenciado por la temperatura del gas y su densidad. A diferencia de un gas clásico, donde las partículas se consideran puntuales, en un gas ultrafrío y diluido, estamos tratando con un sistema cuántico. Por lo tanto, cada átomo posee tanto un momento como una longitud de onda asociada, cuya relación se describe mediante la fórmula de De Broglie $\lambda_{dB} = h/p$, donde h es la constante de Planck. Para establecer una conexión entre la temperatura del gas y su longitud de onda promedio, se introduce el concepto de *longitud de onda térmica* [25].

En un gas clásico compuesto por un gran número de partículas, los átomos siguen una distribución de momentos conocida como la distribución de Maxwell-Boltzmann. Esta distribución está directamente relacionada con la temperatura T del gas. Específicamente, el valor promedio del momento de los átomos, $\langle p \rangle$, es proporcional a la raíz cuadrada de T , es decir, $\langle p \rangle \propto \sqrt{T}$. A partir de esto, podemos definir una longitud de onda promedio para todos los átomos en el gas, la cual también depende de la temperatura. La fórmula de De Broglie nos revela que esta longitud de onda, de manera inevitable, es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de T , expresada como $\lambda \propto 1/\sqrt{T}$. Al utilizar la distribución de Maxwell-Boltzmann, es posible demostrar que esta longitud de onda promedio, que representa la longitud de onda térmica (λ_T), se calcula a través de la siguiente expresión [25]:

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (1.2)$$

Donde h representa la constante de Planck, m la masa atómica de las partículas, T la temperatura del gas, y k_B la constante de Boltzmann. Nótese que cuando la temperatura T es alta, la longitud de onda de De Broglie es pequeña. En consecuencia, en un gas a temperatura alta la interferencia entre las ondas asociadas a cada átomo se

vuelve insignificante, lo que significa que el comportamiento ondulatorio (o cuántico) del sistema queda suprimido. La condensación de Bose-Einstein en un gas ideal solo ocurre cuando la temperatura es lo bastante baja para que la longitud de onda térmica λ_T sea del mismo orden que la distancia interatómica $l = n^{-1/3}$ [6]. En este caso, las ondas de De Broglie son lo suficientemente grandes para interferir unas con otras y los efectos cuánticos emergen. Si se continúa disminuyendo la temperatura la interferencia aumenta y la distinguibilidad de los átomos se pierde [26]. En consecuencia la dinámica del sistema queda descrito por una gran función de onda macroscópica [27].

El parámetro adimensional de Densidad de Espacio Fase (*PSD*, por sus siglas en inglés) se define como $PSD \equiv n\lambda_{dB}^3$ [6]. Este parámetro relaciona la densidad del gas (n) con la longitud de onda asociada λ_{dB} de las partículas que lo conforman. El PSD permite determinar cuántos átomos (o partículas) se encuentran en un cubo con λ_{dB} de lado. Si $PSD > 1$, significa que, en promedio, hay más de una partícula en cada una de estas unidades de volumen. Este parámetro nos ayuda a determinar una temperatura crítica, que se define cuando se alcanza la condición $PSD = 1$. Cuando $PSD > 1$, empieza a manifestarse la interferencia y los efectos cuánticos a nivel macroscópico se hacen evidentes. A través de esta premisa, podemos calcular la temperatura crítica para la condensación de Bose-Einstein en un gas ideal:

$$T_c = C \frac{\hbar n^{2/3}}{2\pi m k_B} \quad (1.3)$$

Donde $C = 3.3125$ una constante. Es importante destacar que la temperatura crítica está completamente determinada por la densidad del sistema. En el caso de átomos alcalinos, las densidades obtenidas varían desde alrededor de 10^{13} cm^{-3} , en los experimentos iniciales, hasta rangos de $10^{14} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ en los estudios más recientes. Estas densidades se acompañan de temperaturas de transición que oscilan entre aproximadamente 100 nK y algunos pocos microkelvin [6]. Por ejemplo, en el caso de ^{87}Rb , el primer gas donde se observó un BEC a 170 nK [7], con $m = 1.443 \times 10^{-25} \text{ kg}$ y $n \approx 2 \times 10^{13} \text{ átomos/cm}^3$ y utilizando la ecuación (1.3) la temperatura crítica resulta en aproximadamente $T_c \approx 135 \text{ nK}$, una temperatura increíblemente baja y además muy próxima a la observada experimentalmente. Aplicando el mismo procedimiento, se encuentra que para ^4He líquido, donde se observó la superfluidez por primera vez, $T_c \approx 3.14 \text{ K}$ [28]. Este valor es muy cercano al valor observado de $T_\lambda \approx 2.177 \text{ K}$, que corresponde al famoso punto lambda.

Estos resultados llevaron a varios investigadores de mediados del siglo XX, como Fritz

London [29], a considerar una posible relación entre la superfluidez y la condensación de Bose-Einstein. Aunque son fenómenos relacionados, no son idénticos, la superfluidez es una propiedad de los fluidos cuánticos que les permite fluir sin viscosidad, mientras que la condensación de Bose-Einstein es un fenómeno cuántico que implica una ocupación macroscópica del estado cuántico más bajo por bosones.

La condensación de Bose-Einstein se ha realizado experimentalmente en gases diluidos de ^{87}Rb [7], ^7Li [9], ^{23}Na [8], H [30], ^{41}K [31], ^{133}Cs [32], ^{52}Cr [33], ^{174}Yb [34], átomos metaestables de He [35, 36], entre otros [37, 38]. Estos átomos presentan una amplia gama de propiedades, y su estudio experimental ha revelado fenómenos fascinantes que han enriquecido nuestra comprensión de los BECs. Además, han abierto nuevas vías de exploración de estos sistemas cuánticos en diversas disciplinas científicas.

1.1.3. Cruce BEC-BCS

En la sección anterior, abordamos la predicción teórica del BEC, enfocada en átomos bosónicos. Ahora, al hablar del estado base a una temperatura de $T = 0$ K, nos adentramos en la discusión de fermiones. En este contexto, el estado fundamental es el mar de Fermi. Sin embargo, nuestro interés radica en estados específicos que surgen cuando es posible la formación de pares entre fermiones con espines diferentes. La formación de estos pares es posible gracias a que en sistemas atómicos ultrafríos es posible controlar la intensidad de las interacciones interatómicas usando un campo magnético, a través de una resonancia de Feshbach [19]. Esto permite la ocupación macroscópica de un solo estado cuántico, lo que da lugar al fenómeno de la superfluidez en sistemas fermiónicos [26].

La capacidad de control en sistemas de muchos cuerpos es excepcional, convirtiendo a los átomos ultrafríos en sistemas ideales para estudiar fenómenos emergentes como la superfluidez y la superconductividad [26]. De particular importancia es la posibilidad de transitar de manera continua entre un sistema que presenta superfluidez de naturaleza bosónica (tipo BEC), a un sistema que presenta superfluidez fermiónica (tipo BCS), a través del cruce BEC-BCS [20].

Para describir los diferentes regímenes de interacción, se requiere un parámetro único que exprese el acoplamiento del sistema. Este parámetro se construye basándose en dos cantidades que caracterizan las interacciones: la densidad del sistema (n) y la longitud de dispersión de onda- s (a_s) [1].

El vector de onda de Fermi, expresado como $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$, está directamente re-

lacionado con la densidad del sistema. Representa el momento máximo posible para una partícula en un gas de Fermi a $T = 0$ K. Conforme aumenta la densidad del gas, también lo hace el vector de onda de Fermi, indicando que las partículas del gas tienen momentos más grandes.

La longitud de dispersión (a_s) cuantifica la intensidad de las interacciones entre partículas (átomos o moléculas) a medida que se aproximan. Un valor positivo indica una interacción repulsiva, en cambio uno negativo representa una interacción atractiva.

El parámetro adimensional de interacción ($k_F a_s$) se obtiene multiplicando el vector de onda de Fermi, que describe la densidad de estados cuánticos ocupados cerca del nivel de Fermi, por la longitud de dispersión, que determina la intensidad de las interacciones entre partículas. Este parámetro se utiliza para contrastar la longitud de dispersión y la separación interatómica.

Para temperaturas por debajo de la temperatura de Fermi, el parámetro de interacción permite identificar tres regímenes:

- $1/k_F a_s > 1$: En este régimen, la interacción entre átomos es predominantemente repulsiva y débil, esto posibilita la formación de pares moleculares con un comportamiento de naturaleza bosónica en un sistema compuesto por fermiones. Cuando la temperatura desciende por debajo de la temperatura crítica, el sistema puede experimentar una transición de fase hacia un BEC.
- $1/k_F a_s < -1$: En este régimen, la interacción entre átomos es predominantemente atractiva y débil. En estos sistemas los átomos forman pares de Cooper de largo alcance como los descritos en la teoría BCS. En principio, el sistema puede experimentar una transición al estado superfluido cuando la temperatura está por debajo de la temperatura crítica.
- $-1 < 1/k_F a_s < 1$: En este régimen, la interacción entre átomos son muy intensas (atractivas y repulsivas). Se conoce como cruce BEC-BCS, lo que indica que es un estado intermedio y de transición entre los estados BEC y BCS. Similar a los regímenes BEC y BCS, el cruce BEC-BCS se caracteriza por la formación de pares, lo que hace posible la emergencia de superfluidez en el sistema.

Una representación del cruce BEC-BCS mediante un diagrama de fase cualitativo se muestra en la Figura 1.3. En esta se muestra la evolución desde el régimen BCS con grandes pares de Cooper hasta el régimen BEC con moléculas fuertemente ligadas. El punto donde $1/k_F a_s = 0$ se denomina régimen unitario, corresponde a pares que

interactúan fuertemente con un tamaño comparable a k_F^{-1} [39]. La escala de cruce de formación de pares T^* diverge alejándose de la temperatura de transición T_c por debajo de la cual existe un condensado y el sistema es superfluido, a medida que aumenta la atracción.

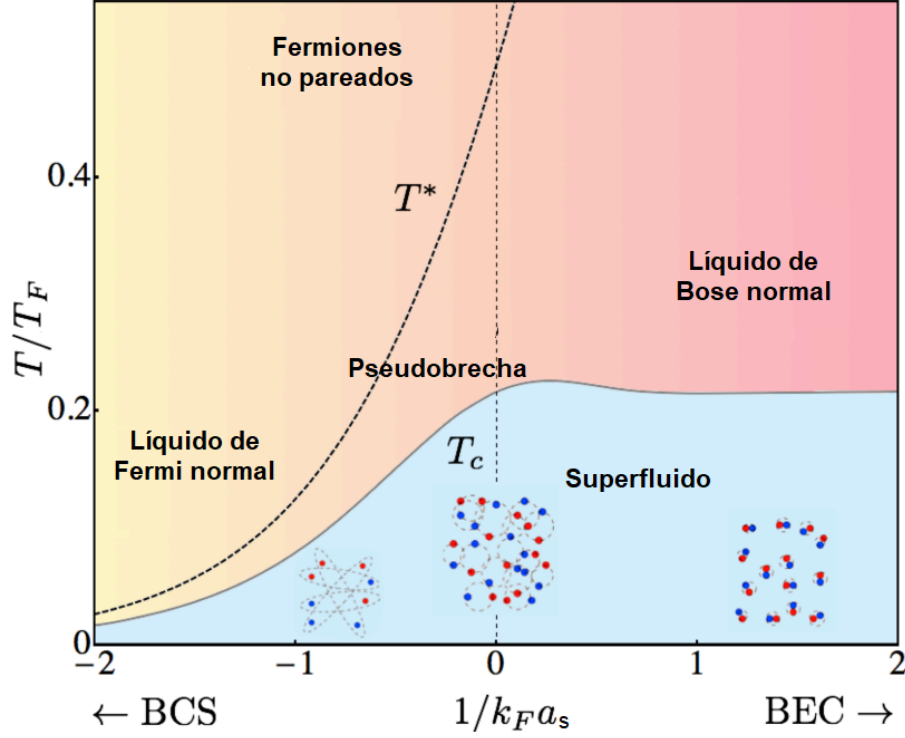


Figura 1.3: Diagrama de fase cualitativo de los regímenes BEC, BCS y su cruce como función de la temperatura T/E_F y el acoplamiento $1/k_F a_s$, donde k_F es el momento de Fermi y a_s la longitud de dispersión de onda-s. Tomada y modificada de [39].

1.1.4. Ecuación de Gross–Pitaevskii

La dinámica de los superfluidos de Fermi compuestos por pares en cualquier régimen de interacción puede ser descrita en buena aproximación por el Modelo Extendido de Thomas-Fermi [40] (*ETFM por sus siglas en inglés*) que es una aproximación de campo medio a temperatura cero. Este modelo se explora en gases de Fermi en diversas referencias [41–43]. De acuerdo a este modelo, la función de onda del sistema $\psi(\vec{r}, t)$ obedece la siguiente ecuación no lineal:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) + \mu [n(\vec{r}, t)] \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (1.4)$$

Donde $n(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ es la densidad del superfluido, μ su potencial químico y $M = 2m$ es la masa de cada par atómico (siendo m la masa de un átomo individual). Este trabajo tiene particular interés en estudiar el caso BEC molecular, es decir, sistemas compuestos por superfluidos de Fermi moleculares. En tal régimen, el potencial químico se puede expresar como $\mu(n) = gn(\vec{r}, t)$ con g la constante de acoplamiento. La constante g guarda la información de la interacción efectiva entre partículas y es proporcional a la longitud de dispersión intermolecular de onda-s (a_M), esta se define como $g = \frac{4\pi\hbar^2 a_M}{M}$. La densidad de partículas se define como el cuadrado de la magnitud de la función de onda macroscópica en un punto y tiempo dados, esto se expresa matemáticamente como $n(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$. Cuando se introducen estas relaciones en el ETFM, véase ecuación (1.4), se obtiene la ecuación de Gross-Pitaevskii (*GPE, por sus siglas en inglés*) [21, 22], como se muestra en la ecuación (1.5) y que proporciona una descripción adecuada de la dinámica de los pares moleculares en un BEC. Es importante señalar que el modelo GPE representa un caso específico del ETFM y se limita a superfluidos en el régimen BEC:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) + \frac{4\pi\hbar^2 a_M}{M} |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (1.5)$$

La validez de esta ecuación se fundamenta en dos condiciones principales: en primer lugar, la longitud de dispersión intermolecular (a_M) sea significativamente menor que la distancia promedio entre átomos (l); en segundo lugar, el número de átomos en el condensado sea considerablemente grande ($N \gg 1$) [6]. Esta ecuación no toma en cuenta los efectos de interacción que surgen de los átomos fuera del condensado. En temperaturas bajas, donde la fracción de átomos que no están en el condensado es insignificante, esto es una aproximación precisa para un gas de Bose diluido [44]. La GPE es una herramienta fundamental y poderosa para describir las excitaciones colectivas en un superfluido, como un BEC. En los laboratorios de gases ultrafríos, se realizan investigaciones exhaustivas sobre excitaciones fonónicas, como las ondas de Faraday [45], y excitaciones topológicas, como los vórtices cuantizados [46].

1.2. El gas cuántico de ${}^6\text{Li}$

El interés principal de utilizar átomos alcalinos en el estudio de los gases cuánticos surge de su estructura electrónica. En estos átomos, todos los electrones ocupan las capas cerradas, excepto uno, que se sitúa en un orbital s de la capa superior, dando

como resultado una estructura de tipo hidrogenoide; el estado electrónico fundamental es, por tanto, un doblete [47]. El litio es el más ligero de ellos y tiene dos isótopos estables, uno fermiónico (${}^6\text{Li}$) y uno bosónico (${}^7\text{Li}$).

En el LMU se opta por trabajar con gases cuánticos de ${}^6\text{Li}$ debido a las amplias resonancias de Feshbach que este isótopo presenta, con un ancho de aproximadamente 300 G [19]. Comparativamente, otros isótopos como ${}^{40}\text{K}$, ${}^{39}\text{K}$ y ${}^{87}\text{Rb}$ tienen resonancias de Feshbach con intervalos mucho más estrechos, que van desde 9.7 G hasta 52 G y 0.21 G, respectivamente. Un intervalo amplio es favorable en la manipulación de la magnitud y signo de las interacciones en función de un campo magnético externo.

1.2.1. Sintonizando la interacción: Resonancias de Feshbach

Las resonancias de Feshbach [19] son esenciales para controlar la interacción entre los átomos de los gases cuánticos, mediante estas resonancias se manipula la longitud de dispersión de las *ondas-s* empleando un campo magnético externo, véase Figura 1.4. Además, pueden emplearse para pasar de regímenes atractivos a repulsivos, de interacción débil a fuerte [10] y han posibilitado investigar diversos fenómenos relacionados con la física cuántica de muchos cuerpos [17]. En particular, el litio posee las resonancias Feshbach más amplias, lo que lo convierte en una de las especies más empleadas para explorar estos regímenes de interacción.

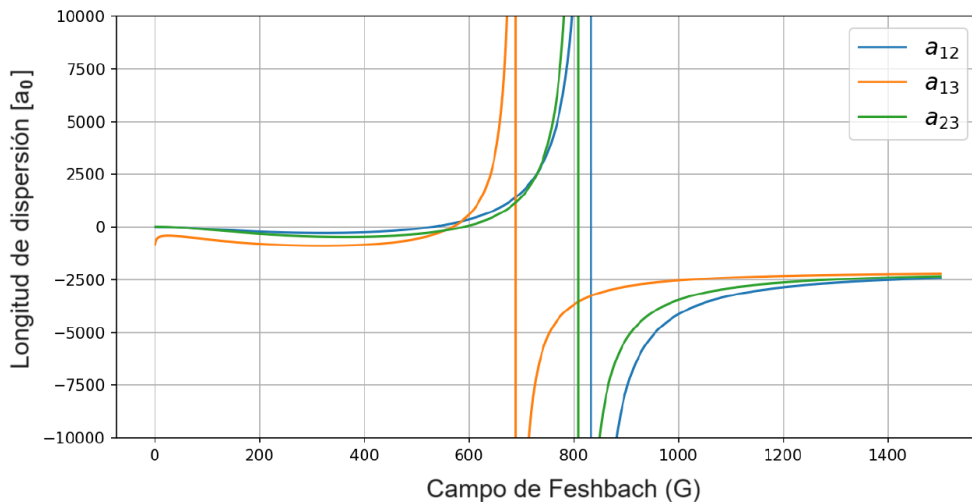


Figura 1.4: Resonancias de Feshbach entre los tres estados hiperfinos más bajos de ${}^6\text{Li}$. Tomada y modificada de [48].

Para entender las resonancias de Feshbach en el contexto de sistemas de gas ultrafrío,

necesitamos explorar los conceptos de canales abiertos y cerrados, que son esenciales en la teoría de dispersión cuántica [49]. Imagina que estamos estudiando la interacción entre dos átomos en un gas ultrafrío. Para describir esta interacción, utilizamos dos curvas de potencial molecular: $V_t(R)$, que representa un estado triplete, y $V_s(R)$, que representa un estado singlete. Estas curvas nos muestran cómo varía la energía potencial en función de la distancia internuclear, denotada como R , véase Figura 1.5.

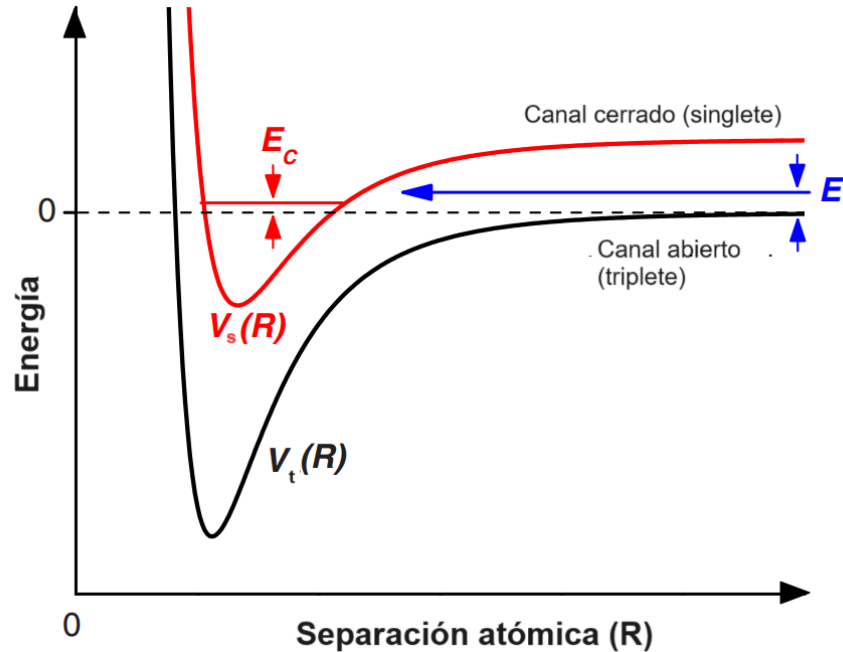


Figura 1.5: Modelo básico de resonancia de Feshbach de dos canales. *Tomada y modificada de [19].*

Cuando los átomos están muy separados, el potencial $V_t(R)$ se comporta asintóticamente conectándose con dos átomos libres. En este caso, $V_t(R)$ describe el canal abierto, que es esencialmente el estado en el que los átomos están lo suficientemente lejos como para no interactuar significativamente entre sí. Ahora, consideremos el potencial $V_s(R)$, que representa el canal cerrado. Este canal es importante porque puede dar lugar a estados moleculares ligados cerca del umbral del canal abierto. Es decir, cuando la distancia entre los átomos disminuye, el potencial $V_s(R)$ puede conducir a la formación de moléculas ligadas, lo que representa el canal cerrado [19].

Una resonancia Feshbach se produce cuando el estado molecular ligado en el canal cerrado se aproxima energéticamente al estado de dispersión en el canal abierto [19]. En otras palabras, esto sucede cuando dos átomos colisionan con una energía E en el canal de entrada y se acoplan de manera resonante a un estado ligado molecular con

energía E_c soportada por el potencial de canal cerrado. En el contexto de temperaturas ultrafrías, las colisiones ocurren cerca de la energía cero, es decir, $E \rightarrow 0$. Para lograr un acoplamiento resonante efectivo, es necesario ajustar magnéticamente E_c cerca de cero cuando los momentos magnéticos de los canales cerrados y abiertos difieren [19].

Una resonancia de Feshbach sintonizada magnéticamente puede describirse mediante una expresión sencilla, para la longitud de dispersión de *onda-s* en función del campo magnético se tiene la siguiente expresión [50]:

$$a_s(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right) \quad (1.6)$$

Donde Δ es el ancho de la resonancia magnética, y a_{bg} es la longitud de dispersión de fondo, que es la longitud de dispersión asociada a V_l , representa el valor fuera de resonancia. Está directamente relacionado con la energía del último nivel vibracional de V_l . El parámetro B_0 denota la posición de la resonancia, donde la longitud de dispersión diverge ($a \rightarrow \pm\infty$) [19].

1.3. Excitaciones Colectivas Cuánticas

En la materia condensada, las excitaciones colectivas son fenómenos que involucran el movimiento cooperativo y ondulatorio de múltiples partículas simultáneamente, en lugar de centrarse en partículas individuales. La colectividad de estas excitaciones juega un papel crucial en fenómenos cuánticos macroscópicos, influyendo en inestabilidades y transiciones de fase [51].

En el contexto de este trabajo, se utiliza una definición simple propuesta por Cornell y Wieman [52], se entenderá por *excitaciones colectivas* aquellas fluctuaciones coherentes en la distribución de la densidad. La teoría de estas excitaciones ha sido ampliamente estudiada en gases BEC armónicamente confinados utilizando la aproximación de GPE [44, 53, 54].

Las primeras observaciones de excitaciones colectivas en un BEC se llevaron a cabo en un gas ultrafrío de átomos de ^{87}Rb por el grupo de investigación de Carl Wieman y Eric Cornell [55]. Al someter al condensado a una fuerza no uniforme, ajustando la frecuencia y simetría, lograron excitarle y observar modos con diversos momentos angulares y niveles energéticos [55].

Los experimentos sobre excitaciones colectivas en BECs se han motivado por dos razo-

nes principales. Primero, estudiar estas excitaciones es un primer paso hacia entender el comportamiento dinámico de estos sistemas. Segundo, en la física experimental, las mediciones de alta precisión se expresan comúnmente en términos de frecuencias observables. En el contexto del BEC, la frecuencia observada de las excitaciones de onda estacionaria en un condensado es una prueba precisa de nuestra comprensión de las interacciones en el sistema [52]

1.3.1. Ondas de Faraday

Las ondas de Faraday son patrones estacionarios que surgen por una inestabilidad paramétrica en la superficie de una capa de fluido sometida a oscilaciones verticales [1]. Este fenómeno fue descrito por primera vez en 1831 por Michael Faraday en un fluido clásico [56] y desde entonces ha sido objeto de investigación en diversos contextos, incluyendo sistemas con ferrofluidos [57], sólidos elásticos suaves [58], redes de nanopartículas metálicas [59], entre otros [60]. Este patrón de ondas de Faraday se generó por primera vez en BECs por Engels y Atherton [61]. Su método consistió en la aplicación periódica de una modulación en el confinamiento transversal, lo que resultó en una excitación paramétrica de ondas sonoras longitudinales en la dirección correspondiente al confinamiento más débil, es decir, la dirección horizontal.

Experimentalmente, las ondas de Faraday en BECs presentan una riqueza exhuberante. Se ha identificado que este patrón presenta el mismo comportamiento que los cristales de espacio-tiempo discretos [62], además es un excepcional marco para el estudio del fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría espacial y temporal [63]. Los BECs ofrecen sin duda el escenario adecuado para este tipo de experimentos debido a su gran capacidad de sintonización experimental. Recientemente, el LMU ha logrado generar por primera vez estas excitaciones en sistemas fuertemente interactuantes compuestos por un superfluido molecular de Fermi en el régimen BEC [45].

En este experimento, se produce un BEC en una trampa armónica con simetría cilíndrica. La modulación temporal de las frecuencias radiales de esta trampa armónica provoca la aparición de ondas de Faraday. Esta perturbación se manifestó en un patrón de franjas en sentido longitudinal, véase Figura 1.6a. Este proceso es análogo al experimento de Faraday, en el cual el movimiento vertical del recipiente generaba patrones que se propagaban horizontalmente.

En dicho trabajo se analiza la distribución de las franjas formadas en el patrón de Faraday, véase la Figura 1.6a, ya que esto nos da información sobre la manera en la que

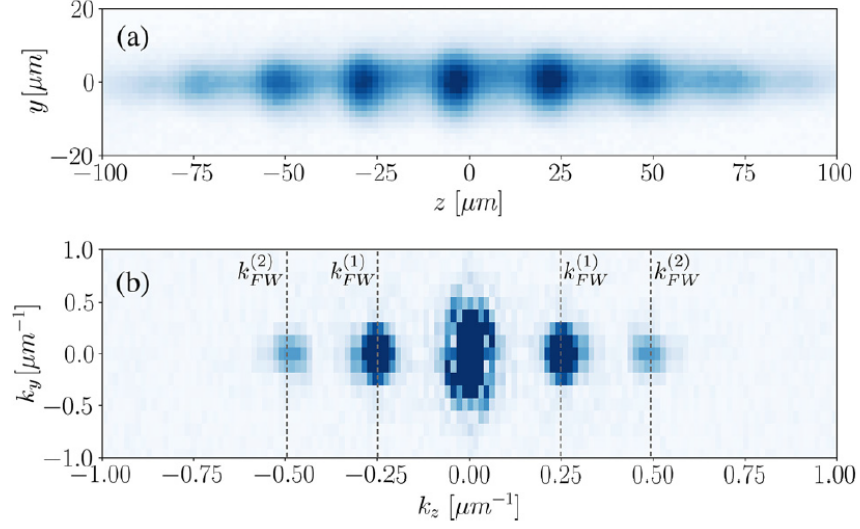


Figura 1.6: (a) Imágenes de absorción de ondas de Faraday captadas en la trampa del superfluido. (b) Transformada de Fourier de la imagen de absorción en (a), las líneas discontinuas indican la posición de dos componentes visibles del vector de onda de Faraday, $k_{FW}^{(1)}$ y $k_{FW}^{(2)}$. La presencia de estos componentes indica la aparición de la modulación de densidad asociada a la onda de Faraday. Imagen tomada a un campo magnético de 690 G, correspondiente a $1/k_{Fa_s} = 7.1$. Tomada y modificada de [45].

las ondas propagan en el fluido. En particular, podemos extraer los vectores de onda de cada modo de propagación, véase Figura 1.6b. Es esta una de las motivaciones de la presente tesis, en donde desarrollamos herramientas computacionales para analizar estos sistemas.

La dinámica de las ondas de Faraday está gobernada por la ecuación de Mathieu, la cual se caracteriza por describir sistemas paraméricamente excitados [64]. Partiendo de la GPE y llevando a cabo un análisis de Floquet, nuestro grupo de investigación [45] muestra la relación entre las ondas de Faraday y la ecuación de Mathieu en superfluidos fuertemente interactuantes. El análisis de Floquet revela que existen una serie de resonancias, consistentes en una resonancia principal a la mitad de la frecuencia de excitación, Ω , y lenguas de resonancia superiores centradas en valores de frecuencia que son múltiplos enteros de la frecuencia de excitación, $\omega_{Bog} = \frac{n\Omega}{2}$, con n el número de modo. La interpretación física es que las ondas de Faraday se forman cuando la energía asociada a dos fonones de Bogoliuvov ($2\hbar\omega_{Bog}$) es un múltiplo entero de la energía de excitación $\hbar\Omega$ [45].

Además se obtiene una expresión analítica para cada uno de los modos de inestabilidad, véase ecuación (1.7). Esta fórmula analítica explícita identifica el vector de

onda de Faraday para cada modo y, por lo tanto, su longitud de onda, la cual está directamente asociada con la frecuencia espacial del patrón que se puede observar experimentalmente [65]. Este vector de onda juega un rol significativo en el entendimiento y estudio de la dinámica del condensado bajo fuerzas externas de propulsión. Por ejemplo, el número de onda está directamente relacionado con las frecuencias resonantes del condensado (ver ecuación 1.7), y su elección puede determinar la aparición de inestabilidades y la formación de diferentes patrones en las ondas de Faraday. Este enfoque proporciona una visión tanto cualitativa como cuantitativa del experimento.

$$k_{FW}^{(n)} = \pm \sqrt{\frac{ME_{Floq}}{\hbar^2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{n\hbar\Omega}{E_{Floq}}\right)^2}} \quad (1.7)$$

Donde M la masa del par molecular, Ω la frecuencia de excitación, n el número de modo y $E_{Floq} = M\omega_r^2 R^2/2$ la energía de Floquet con R el radio de Fermi y ω_r la frecuencia radial de confinamiento. La ecuación (1.7) concuerda satisfactoriamente con datos experimentales y con cálculos simulados a partir de la GPE, lo que indica que este sencillo modelo analítico basado en los estados de Floquet proporciona una buena descripción cuantitativa de este fenómeno [45].

Como se ha mencionado anteriormente, la formación del patrón de ondas de Faraday en BECs es posible a través de una excitación periódica que, en nuestro caso, consiste en modular periódicamente el confinamiento radial de la muestra en la trampa. Esto induce una modulación de la densidad del condensado dando lugar a la formación de un patrón de franjas. El espaciamiento entre las franjas está directamente relacionado con la frecuencia de excitación. P. Capuzzi y P. Vignolo [66] utilizando la relación de dispersión deducen una expresión analítica que permite conocer el número de franjas en un superfluido elongado en forma de cigarro y confinado en un potencial armónico como el estudiado en el LMU:

$$N = \frac{1}{\pi\lambda} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \frac{\Omega}{\omega_r} \quad (1.8)$$

Donde Ω la frecuencia de excitación, ω_r la frecuencia radial de la trampa, $\lambda = \omega_z/\omega_r$ y el parámetro γ el exponente de la aproximación politrópica, donde la ecuación de estado en este modelo está dada por $\mu(n) = Cn^\gamma$, con μ el potencial químico, n la densidad del gas y C una constante [66,67]. El exponente γ depende del régimen de interacción. Por ejemplo, $\gamma = 1$ para un BEC con interacciones débiles. Un gas de

Fermi como un BEC tienen $\gamma = 2/3$ el límite unitario [68].

Las relaciones que existen entre las expresiones (1.7) y (1.8) posibilitan ahondar en la comprensión de las ondas de Faraday en BECs. Entender este fenómeno es crucial por varias razones. En primer lugar, provee una plataforma para investigar fenómenos novedosos en gases ultrafríos [69]; también permite estudiar fenómenos no lineales en sistemas cuánticos [70]; además, pueden servir como análogos cuánticos de los sistemas ondulatorios clásicos [71]; por último, el control y manipulación de patrones de ondas de Faraday en BECs ofrece perspectivas prometedoras para posibles aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, la medición de frecuencias de señales complejas utilizando técnicas basadas en ondas de Faraday ha impulsado el desarrollo de láseres de fonones, computadoras cuánticas y sensores de vibración avanzados [72].

Por estos motivos resulta importante contar con herramientas que nos permitan localizar y contar franjas en patrones de ondas de Faraday de manera eficaz y eficiente. En este sentido, se han desarrollado algoritmos específicos en este proyecto para abordar la tarea de analizar estas excitaciones que se generan en el LMU.

1.3.2. Vórtices cuantizados

Otra excitación colectiva relevante en este trabajo son los vórtices cuantizados. Estos vórtices representan excitaciones topológicas de un superfluido [73], y se caracterizan por la circulación cuantizada de su campo de velocidad. La existencia de vórtices cuantizados es una de las características más sorprendentes y fascinantes de la superfluididad. La idea de la existencia de vórtices cuantizados en superfluidos fue propuesta por primera vez en 1949 por Onsager [74].

Para lograr una comprensión más profunda de este fenómeno en superfluidos, es necesario examinar la GPE, véase ecuación 1.5, en su formulación dependiente del tiempo a una temperatura de cero grados. En este contexto, es posible expresar la función de onda de la siguiente manera:

$$\Psi_0(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{i\varphi(\vec{r}, t)} \quad (1.9)$$

donde $\varphi(\vec{r}, t)$ es la fase del condensado y $n(\vec{r}, t) = |\Psi_0(\vec{r}, t)|^2$ su densidad. A partir de tal expresión, se puede calcular la corriente de probabilidad del sistema cuántico, dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 j(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar}{2mi} [\Psi_0^*(\vec{r}, t) \nabla \Psi_0(\vec{r}, t) - \Psi_0(\vec{r}, t) \nabla \Psi_0^*(\vec{r}, t)] \\
 &= \frac{\hbar}{m} n_0(\vec{r}, t) \nabla \varphi(\vec{r}, t)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Dado que un BEC interactuante tiene la capacidad de fluir, podemos relacionar la corriente de probabilidad de la ecuación 1.10 con la corriente del fluido, expresándola como $n_0 v_s$ [6]. A partir de esto, podemos reconocer que el campo de velocidades del condensado se describe de la siguiente manera:

$$v_s(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi(\vec{r}, t) \tag{1.11}$$

Para un BEC debilmente interactuante a temperatura cero, en buena aproximación, todo el fluido se puede considerar como un superfluido [6]. Asimismo, al considerar que en la aproximación de Gross-Pitaevskii todo el fluido reside en el condensado, la función $v_s(\vec{r}, t)$ puede ser interpretada como la velocidad de flujo del superfluido. En la ecuación 1.11, observamos que la velocidad del superfluido es directamente proporcional al gradiente de la fase. Dado que el rotacional de un gradiente es nulo, podemos deducir que el superfluido es irrotacional, es decir:

$$\nabla \times v_s(\vec{r}, t) = 0 \tag{1.12}$$

Si un fluido clásico satisface la ecuación 1.12, todos coincidiríamos en que el fluido es irrotacional. Sin embargo, si el superfluido es irrotacional, ¿cómo se produce la formación de vórtices?. La respuesta está implícita en la expresión mencionada anteriormente. Siempre se cumple, a menos que la fase presente una singularidad, en cuyo caso $\nabla \times v_s(\vec{r}, t) \neq 0$. Tales singularidades en la fase pueden ser introducidas en el sistema de diversas maneras. Por ejemplo, perturbando al condensado usando potenciales externos, la referencia [63] es un ejemplo muy elegante de ello.

Al considerar un contorno cerrado \mathcal{C} alrededor de la singularidad, para mantener la función de onda como monovaluada, el cambio de fase $\Delta\varphi$ a lo largo de cualquier contorno cerrado debe ser un múltiplo de 2π , o cumplir con la siguiente condición:

$$\Delta\varphi = \oint_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = 2\pi q \tag{1.13}$$

El parámetro q es un número entero que garantiza la unicidad de la función de onda. La circulación Γ del campo de velocidades sobre un contorno cerrado \mathcal{C} se define por:

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{\hbar}{m} q = \frac{h}{m} q \quad (1.14)$$

En otras palabras, la circulación del fluido esta cuantizada en unidades de h/m .

Tomemos como ejemplo un vórtice rectilíneo, como se describe en [6]. Imaginemos un superfluido dentro de un cilindro de longitud infinita ($L \gg 1$) y radio R , donde $R \gg \xi$, siendo ξ el *healing length* del superfluido. La línea del vórtice, centrada en $r = 0$, se extiende a lo largo del eje z desde la parte inferior del cilindro hasta la superior, véase Figura 1.7.

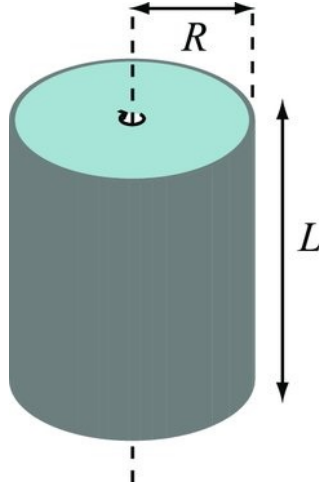


Figura 1.7: Un único vórtice cuantizado en un cilindro. *Tomada y modificada de [75].*

Por simetría, las líneas alrededor del filamento son círculos concéntricos alrededor de la línea del vórtice, por lo tanto $v_s(\vec{r}) = v_s(r)\hat{\theta}$. Considerando el contorno \mathcal{C} un círculo de radio r centrado en el filamento se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_{\mathcal{C}} \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} v_s(r)\hat{\theta}(\hat{\theta}r d\theta) \\ &= 2\pi r v_s(r) = \frac{h}{m} q \end{aligned} \quad (1.15)$$

Por lo tanto, el campo de velocidad del superfluido con un vórtice cuantizado es:

$$v_s(r) = q \frac{\hbar}{m} \hat{\theta} \quad (1.16)$$

El parámetro q es llamado “*carga del vórtice*” y nos indica que cantidad de momento angular, en unidades de \hbar , contiene el vórtice. En este caso, cada partícula lleva un momento angular $q\hbar$ alrededor del eje. Por tanto, el momento angular total se expresa como $L_z = Nq\hbar$, con N el número de partículas. Cuando la singularidad en la función de onda del condensado está ubicada fuera del eje de la trampa, el momento angular suele diferir de $Nq\hbar$ [6].

Nótese que $\nabla v_s(\vec{r}, t) = 0$ en todo momento, exepcto cuando $r = 0$ [6]. Para este ejemplo en particular, se puede mostrar que en el eje de vórtice se tiene que:

$$\nabla \times v_s(\vec{r}, t) = \hat{z} \frac{q\hbar}{m} \delta^2(\vec{r}) \quad (1.17)$$

Donde $\delta^2(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)$ representa la delta de Dirac bidimensional en el plano xy , y $\vec{r} = (x, y)$ indica las coordenadas x e y .

Los vórtices cuantizados son característica fundamental de los sistemas superfluidos y superconductores [76]. Se han observado en diversos sistemas como el helio líquido superfluido [77], gases ultrafríos [78] y excitones-polaritones en microcavidades semiconductoras [79].

Tras la realización experimental del BEC [7–9], la estabilidad, estructura y dinámica de los vórtices cuantizados en estos nuevos sistemas de muchos cuerpos pronto cautivó la atención de la comunidad científica, y han sido estudiados de manera exhaustiva tanto de las perspectiva teórica como experimental en muy numerosos trabajos. Como ejemplo citamos los siguientes artículos de revisión [80, 81].

De particular importancia para el LMU y, consecuentemente, para esta tesis, es el estudio de vórtices cuantizados en superfluidos fermiónicos fuertemente correlacionados en el cruce BEC-BCS. Éstos fueron observados por primera vez en 2005 por el grupo de Wolfgang Ketterle en MIT [82] y desde entonces estudiados por otros grupos.

A lo largo de esta tesis, se destacará el trabajo realizado en la generación de vórtices cuantizados en superfluidos por parte de *LithiumLab* [46], dirigido por el Dr. Giacomo Roati, ubicado en el Istituto Nazionale di Ottica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (INO-CNR) y en el Laboratorio Europeo di Spettroscopia non Lineare (LENS) en la Universidad de Florencia, Italia.

Para lograrlo, en *LithiumLab* produjeron dos anillos superfluidos concéntricos, uno interno y otro externo, separados por una fina barrera. Posteriormente, utilizando

una técnica de impresión de fase usando luz láser [83], se hace rotar a estos anillos en direcciones opuestas. Finalmente, se remueve la barrera que los separa, lo que provoca que los anillos roten en direcciones opuestas, lo que provoca se forme una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz justo en la interfaz [84]. Esto resulta en la formación de un patrón circular organizado de vórtices cuantizados, véase Figura 1.8.

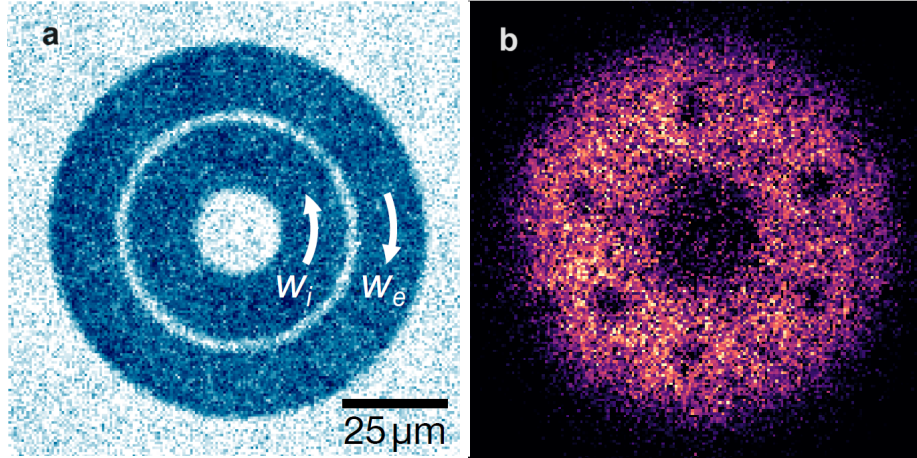


Figura 1.8: Izquierda: Perfil de densidad de dos superfluidos BEC concéntricos en contrarrotación, puestos en movimiento relativo mediante una técnica de impresión de fase y separados por una barrera de potencial. Derecha: Típicas imágenes de los patrones de vórtices cuantizados obtenidos tras la fusión de los dos superfluidos. Tomada y modificada de *Lithium Lab* [46].

El estudio de la vorticidad cuántica ha permitido entender con mayor profundidad el fenómeno de la superfluidez [80]. Una tendencia actual en el campo es estudiar configuraciones compuestas por un gran número de vórtices, pues estas podrían dar origen a turbulencia. Es justo este uno de los objetivos del LMU, en donde se busca entender bajo qué condiciones una determinada configuración de vórtices cuantizados podría evolucionar a un estado turbulento [85–87]. Con esto en mente, en esta tesis desarrollamos *Blobs 1.1*, un algoritmo que permite identificar y contar vórtices.

1.4. Técnica de imagen por absorción

La técnica de *Imagen por Absorción* en gases ultrafríos es fundamental para el estudio de fenómenos como la formación de condensados de Bose-Einstein [88], la interacción entre átomos en redes ópticas [89], y la dinámica de sistemas cuánticos de muchos cuerpos [90]. Proporciona una herramienta poderosa para los investigadores en física cuántica y óptica cuántica para explorar y comprender los estados de la materia a

temperaturas extremadamente bajas.

En esta técnica, un haz láser resonante se ajusta con precisión para ser absorbido por los átomos en el gas, lo que reduce la intensidad transmitida. La sombra resultante se captura en una cámara CCD [26]. Este proceso registra los perfiles de intensidad como imágenes en una matriz de píxeles. Los píxeles registran proporcionalmente la luz integrada transmitida desde ubicación precisa en el plano del objeto durante la exposición [48], obteniendo así perfil de intensidad de la imagen con interacción con los átomos como la matriz de píxeles $C^{átomos}(x_i, y_i)$.

Experimentalmente, esto se logra utilizando un perfil de haz gaussiano casi colimado, con una cintura considerablemente mayor que la muestra atómica [48]. Esta técnica se emplea usualmente luego de la expansión de la nube desde la trampa de átomos.

Para estimar la densidad óptica, se captura una imagen adicional del fondo con el haz de prueba apagado. Esto ayuda a reducir el ruido de la luz de fondo y el ruido electrónico (llamados recuentos oscuros), como se describe en [48]. Se obtiene así el perfil de intensidad de la imagen con ruido de fondo, representado por la matriz de píxeles $C^{fondo}(x_i, y_i)$. Además, se considera la intensidad de la prueba, generando el perfil de densidad de la imagen del haz gaussiano sin interacción con los átomos, lo que resulta en la matriz de píxeles $C^{prueba}(x_i, y_i)$.

En la aproximación de baja intensidad, cuando la intensidad de la luz I es menor a la intensidad de saturación de la transición I_{sat} , la densidad óptica se expresa matemáticamente con la siguiente expresión [48]:

$$DO(x_i, y_i) = -\alpha \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma} \right) \right] \log \left[\frac{C^{átomos}(x_i, y_i) - C^{fondo}(x_i, y_i)}{C^{prueba}(x_i, y_i) - C^{fondo}(x_i, y_i)} \right] \quad (1.18)$$

con γ un parámetro que toma en cuenta las imperfecciones experimentales, $\Delta = \omega - \omega_0$ la desintonización de la frecuencia resonante ω_0 , y Γ es el ancho natural de la línea de transición entre los estados fundamentales $|g\rangle$ y excitados $|e\rangle$. La densidad óptica es la cantidad de luz absorbida por la nube. Una representación gráfica del cálculo de la densidad óptica se muestra en la Figura 1.9.

La imagen resultante en la Figura 1.9 muestra la distribución espacial de los átomos ultrafríos dentro de la nube atómica. La intensidad de la luz absorbida en cada píxel corresponde a la densidad de átomos en esa posición en la nube. Esta técnica de imagen proporciona una ventana única para estudiar fenómenos cuánticos en sistemas

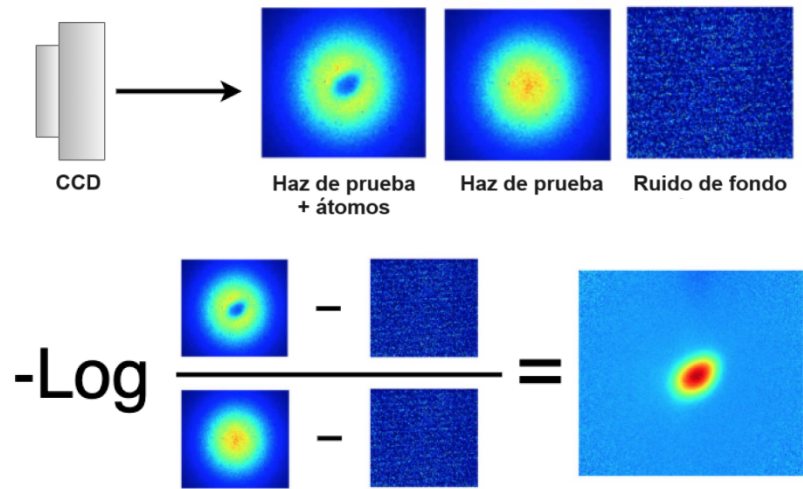


Figura 1.9: La cámara CCD adquiere las tres imágenes necesarias para calcular la densidad óptica: $C^{\text{átomos}}$ (haz de prueba + átomos), C^{fondo} (ruido de fondo) y C^{prueba} (haz de prueba). Tomada y modificada de [48].

de baja temperatura, siendo fundamental para explorar las propiedades de las ondas de Faraday y los vórtices cuantizados en este trabajo.

Capítulo 2

Algoritmos: excitaciones colectivas simuladas

En este capítulo se crean imágenes que simulan patrones de ondas de Faraday en una dimensión y vórtices cuantizados en dos dimensiones. Además, se desarrollan algoritmos computacionales para el análisis de estas imágenes. *Faraday 1.1* cuenta franjas en patrones de ondas de Faraday y *Blobs 1.0* localiza y cuenta vórtices en un arreglo cuadrangular. Se ha empleado el lenguaje de programación *Python* y la plataforma *Google Colab* para escribir y ejecutar el código. Estos algoritmos sientan las bases para el desarrollo de otros capaces de analizar imágenes reales de este tipo de excitaciones colectivas generadas en el LMU del Instituto de Física, UNAM, y en *Lithium Lab* de INO-CNR & LENS, Universidad de Florencia.

2.1. Ondas de Faraday

2.1.1. Faraday 1.0: Detección de máximos locales

El paso inicial consiste en generar un perfil utilizando una función que simule con fidelidad un patrón de ondas de Faraday unidimensional como el mostrado en la Figura 1. Un perfil de onda de Faraday se construye sumando las intensidades de los píxeles en cada una de las columnas de su imagen, de forma similar a la construcción de un histograma. Al seguir este procedimiento, se obtiene un perfil periódico con picos de intensidad máxima en el centro y que disminuyen hacia los extremos. En este contexto, para simular dicho perfil, se emplea una función matemática, véase

ecuación (2.1), contruida a partir de dos funciones, una periódica (sinusoidal) y otra tipo gaussiana. Esta función reproduce con precisión el perfil deseado, cuyos máximos representan las franjas con mayor densidad del patrón de ondas de Faraday.

$$f(x) = \sin^2(mx) \cdot e^{-x^2} \quad (2.1)$$

Donde m es un entero positivo y x la coordenada longitudinal. Los máximos en la función $\sin^2(mx)$ tienen periodicidad π y ocurren cuando $mx = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, donde k es un entero. Dado que $x \in [-\pi, \pi]$, el número de máximos generados será $2m$. Para $m = 10$ la función genera un perfil de 20 máximos, véase Figura 2.1. El perfil se generó utilizando una lista de 1000 puntos, cada punto representa un píxel, este número es de gran relevancia para la resolución de la imagen simulada. Al final de este capítulo se mostrará como la resolución de la imagen simulada influye en el número de procesos de filtrados que admite un perfil de Faraday con presencia de ruido aleatorio.

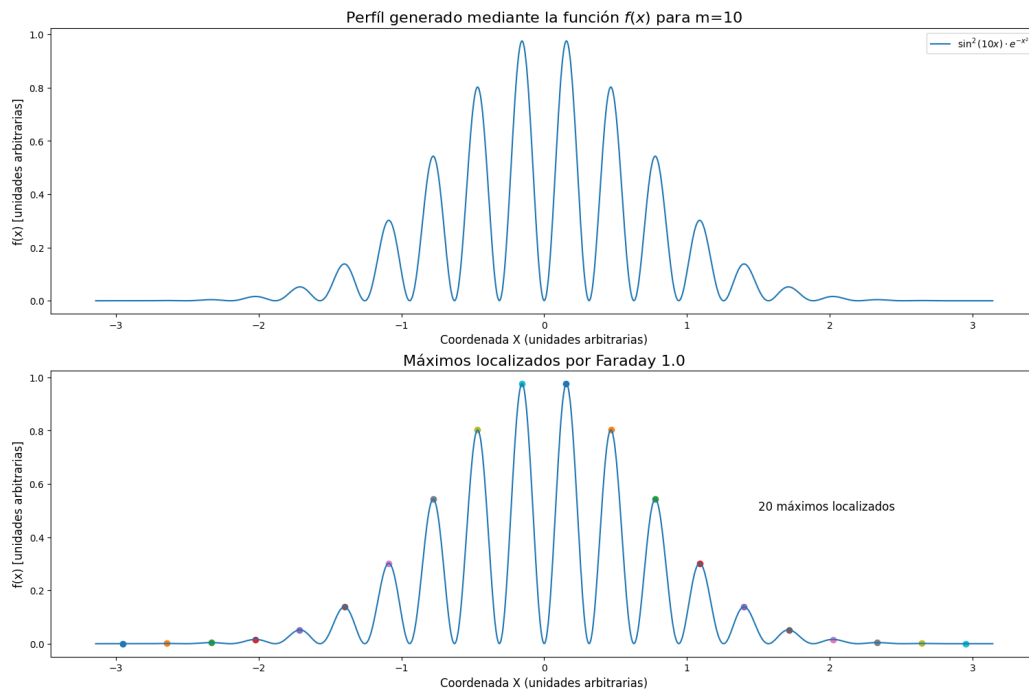


Figura 2.1: Perfil del patrón de ondas de Faraday. En la parte superior, el perfil generado mediante $f(x) = \sin^2(mx) \cdot e^{-x^2}$ para $m = 10$. En la parte inferior, puntos de diferentes colores representan los máximos localizados por *Faraday 1.0*.

La idea detrás del algoritmo *Faraday 1.0* para contar las franjas, representadas como máximos en el perfil, es simple: se basa en detectar estos máximos locales en su vecindad mediante la comparación con los primeros vecinos. Desde el punto de vista

computacional, el algoritmo se sitúa en una posición i y compara su valor con los valores en las posiciones $i - 1$ e $i + 1$. Para que i sea considerado un máximo, debe cumplir dos condiciones simultáneamente: el valor en i debe ser mayor que el valor en $i - 1$, y también mayor que el valor en $i + 1$. Los índices y sus respectivas coordenadas que satisfacen ambas condiciones son recopilados por el algoritmo y almacenados en un arreglo *numpy*. Posteriormente, estos puntos se ubican y muestran en la gráfica del perfil de Faraday del cual fueron seleccionados. *Faraday 1.0* localiza los 20 máximos generados por la ecuación (2.1) para $m = 10$.

```

1 """FARADAY 1.0: GENERA PERFIL DE FARADAY Y CUENTA SUS MÁXIMOS
2 Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4 #Librerías Python
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import numpy as np
7
8 #Función que genera 2m máximos(franjas)
9 def f(x,m):
10     return np.exp(-x**2) * (np.sin(m*x))**2
11
12 #Crea arreglo con coordenadas (x,y) del perfil con resolución de 1000 puntos
13 xlist = np.linspace(-np.pi,np.pi,1000)
14 ylist = f(xlist,10)
15 perfil_faraday = np.vstack((xlist, ylist))
16
17 # Encuentra máximos en el perfil de franjas de perfil_faraday
18 H = []
19 for i in range(1, len(perfil_faraday[0]) - 1):
20     if ((perfil_faraday[1,i] > perfil_faraday[1,i - 1]) and (perfil_faraday[1,i] > perfil_faraday[1,i + 1])):
21         H.append(i)
22 H= perfil_faraday[:, H]
23 print('El número de máximos es:', H.shape[1])

```

El perfil de Faraday que se muestra representa el caso ideal y más simple. Sin embargo, los perfiles más realistas a menudo están afectados por ruido, es decir, perturbaciones que interfieren con el patrón original y complican su análisis. *Faraday 1.0* sobreestima el número de máximos cuando los perfiles presentan ruido. Para abordar este problema, se desarrollan filtros que suavizan los perfiles ruidosos, lo cual permite seguir localizando los máximos de interés. Estas mejoras se incorporan a *Faraday 1.0*, dando lugar a un nuevo algoritmo llamado *Faraday 1.1*, que es capaz de detectar máximos en perfiles de Faraday ruidosos.

2.1.2. Faraday 1.1: Detección de máximos locales con ruido

Basándose en la ecuación (2.1) se genera una nueva función que toma en cuenta cierta porción de ruido. Para ello, simplemente se suma de forma aritmética una función que genere perturbaciones en la función original. Se busca que las perturbaciones

sean periódicas y de valor positivo. Por lo tanto, se elige $p_r(x)$ coseno al cuadrado que a la vez se multiplica por una amplitud positiva que modula la intensidad de las perturbaciones. Entonces, el nuevo perfil de Faraday con ruido está dado por una función de la forma $f_r(x) = f(x) + p_r(x)$, donde $f(x)$ es la función que genera el perfil de Faraday originalmente utilizado, y $p_r(x)$ es la función que introduce las perturbaciones en dicho perfil, véase ecuación 2.2 y Figura 2.2.

$$f_r(x) = \sin^2(mx) \cdot e^{-x^2} + \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \cos^2(b_i x) \quad (2.2)$$

Los parámetros a_i determinan la amplitud de la perturbación, mientras que b_i indica su distribución espacial. Los valores específicos son: $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.025$, $a_3 = 0.1$, $b_1 = 100$, $b_2 = 100 - \sqrt{2}$, $b_3 = 30\pi$. Además, se tiene $m = 10$ y $x \in [-\pi, \pi]$.

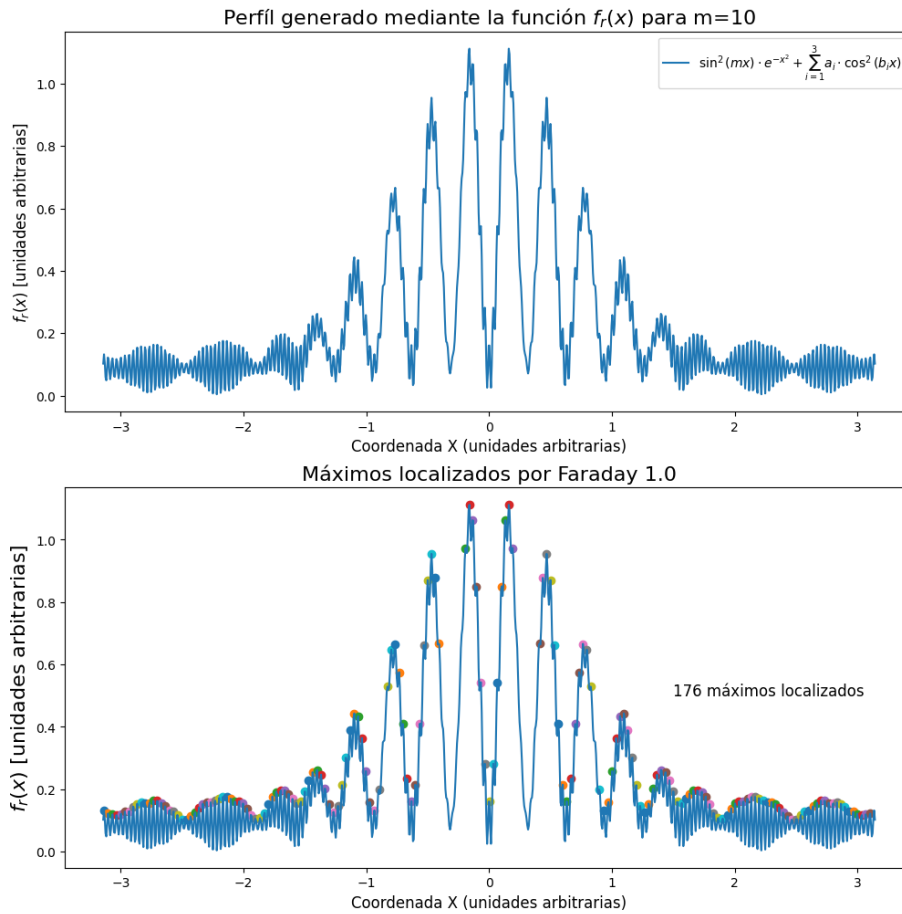


Figura 2.2: Perfil del patrón de Faraday ruidoso. En la parte superior, el perfil generado mediante $f_r(x) = \sin^2(mx) \cdot e^{-x^2} + \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \cos^2(b_i x)$. En la parte inferior, en puntos de diferentes colores los máximos localizados por *Faraday 1.0*.

Primeramente, se analiza el perfil ruidoso con *Faraday 1.0*, esto con la finalidad de mostrar las dificultades con que se enfrenta y justificar la necesidad de desarrollar *Faraday 1.1*. Como se puede observar en la Figura 2.2 el número de máximos locales debido al ruido es considerable. *Faraday 1.0* identifica 176 máximos, este considera como un máximo a todo aquel punto que sobresale con respecto a sus vecinos inmediatos. Aunque el algoritmo funciona “adecuadamente” en el conteo de estos puntos máximos, no distingue entre aquellos generados por ruido y los asociados a las franjas.

Para reducir el ruido, se realiza un proceso de filtrado que consiste en eliminar ciertos puntos mínimos del perfil, lo que resulta en un perfil más suave. Para que un punto i sea un mínimo, debe ser menor que sus vecinos inmediatos, $i - 1$ y $i + 1$. Los puntos que cumplen dicha condición son almacenados por el algoritmo y posteriormente sustraídos del total de puntos. Con cada iteración de filtrado, la gráfica generada por los puntos conservados por el algoritmo se vuelve más “suave”, es decir, se reduce el número de máximos y mínimos ruidosos, manteniendo los máximos y mínimos del patrón de mayor intensidad, que son los de interés.

```

1  """FARADAY 1.1: GENERA PERFIL DE FARADAY RUIDOSO Y CUENTA SUS MÁXIMOS PRINCIPALES
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4  #Librerías Python
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  import numpy as np
7
8  #Parámetros de ruido, resolución, máximos y número de filtrados
9  a1=0.05; a2=0.025; a3=0.1; b1=100; b2=100 - np.sqrt(2); b3=30*np.pi; N = 6;
10
11 #Función que genera 2m máximos(franjas) con ruido
12 def f(x,a1,a2,a3,b1,b2,b3,m):
13     return np.exp(-x**2) * (np.sin(m*x))**2 + a1*(np.cos(b1*x))**2 + a2*(np.cos(b2*x))**2 + a3*(np.cos(b3*x))**2
14
15 #Crea arreglo con coordenadas (x,y) del perfil con resolución de 1000 puntos
16 xlistn = np.linspace(-np.pi,np.pi,1000)
17 ylistn = f(xlistn,a1,a2,a3,b1,b2,b3,10)
18 perfil_faraday_noise = np.vstack((xlistn, ylistn))
19
20 # Filtrar N veces los puntos mínimos
21 for _ in range(N):
22     Hnmin = []
23     for i in range(1, perfil_faraday_noise.shape[1] - 1):
24         if ((perfil_faraday_noise[1, i] < perfil_faraday_noise[1, i - 1]) and (perfil_faraday_noise[1, i] <
25             perfil_faraday_noise[1, i + 1])):
26             Hnmin.append(i)
27     # Eliminar los puntos mínimos encontrados en esta iteración
28     perfil_faraday_noise = np.delete(perfil_faraday_noise, Hnmin, axis=1)
29
30 # Encuentra los valores máximos dentro del perfil
31 Hnf1 = []
32 for i in range(1, perfil_faraday_noise.shape[1] - 1):
33     if ((perfil_faraday_noise[1, i] > perfil_faraday_noise[1, i - 1]) and (perfil_faraday_noise[1, i] >
34         perfil_faraday_noise[1, i + 1])):
35         Hnf1.append(i)
36 Hnf1 = perfil_faraday_noise[:, Hnf1]
37 print('El número de máximos encontrados es:', Hnf1.shape[1])

```

El número de filtrados para un perfil dado lo determina la cantidad de ruido que se desea eliminar sin llegar a excluir los puntos de interés, véase Figura 2.3. De izquierda a derecha, se observan las gráficas generadas por los puntos después de haber realizado uno, cinco y nueve filtrados, respectivamente. Es claro que para un solo proceso de filtrado se observa bastante ruido aún. Para la siguiente imagen, con cinco procesos de filtrado, la mayoría del ruido ha sido suprimido, sin embargo aún se observa algo de ruido en los extremos. Finalmente, después de nueve procesos de filtrados se observa que los máximos se aprecian con claridad.

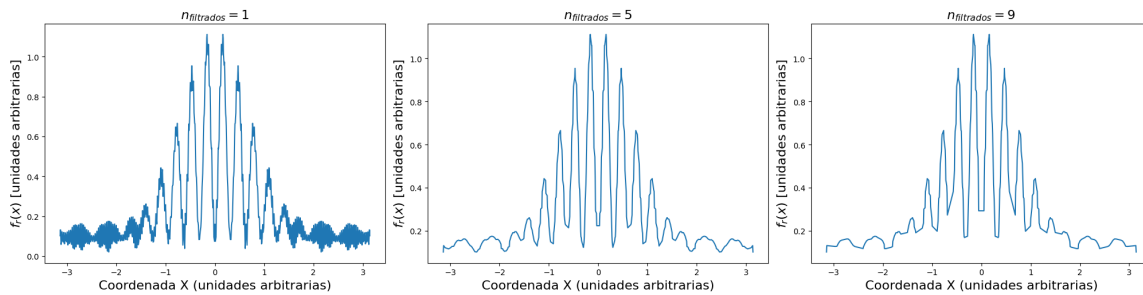


Figura 2.3: Perfiles de Faraday generados por diferentes iteraciones de filtrados.

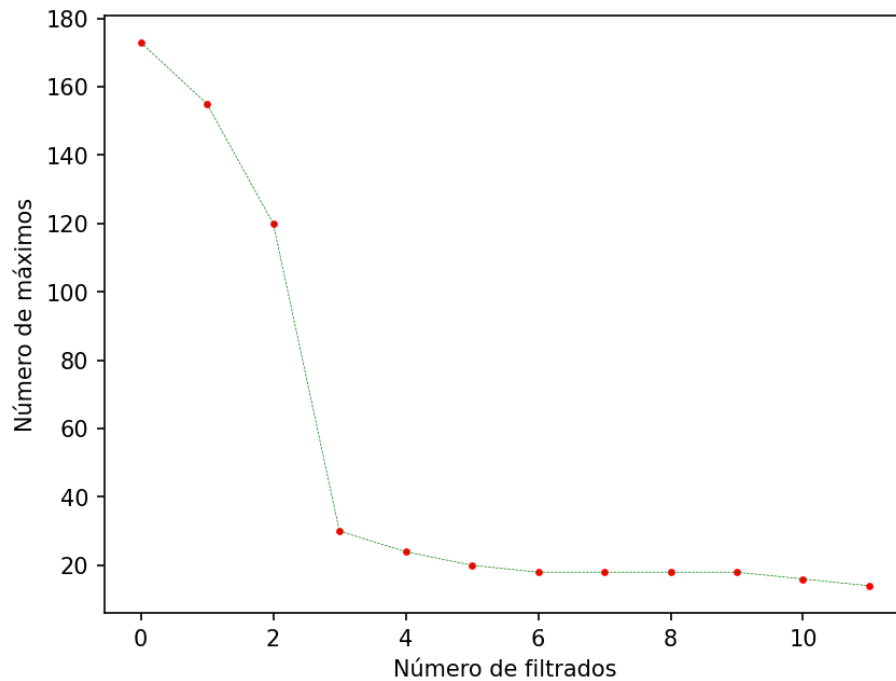


Figura 2.4: Gráfica que muestra el número de máximos localizados por el algoritmo *Faraday 1.1* en función del número de procesos de filtrados.

En la Figura 2.4 se presenta una gráfica del número de máximos localizados por el algoritmo *Faraday 1.1* en función del número de procesos de filtrados que ejecuta el

algoritmo. Se observa que el número de máximos ruidosos prevalece cuando el número de procesos de filtrado es menor o igual a tres. Sin embargo, a partir de cuatro filtrados el número de máximos ruidosos disminuye drásticamente. En la transición de tres a cuatro procesos de filtrado hay una diferencia de 90 máximos ruidosos que el algoritmo elimina. Después se observa que el número de máximos ruidosos disminuye de forma más gradual, esto debido a que los máximos más marcados se mantienen. No obstante, si el número de procesos es relativamente alto se puede eliminar máximos que son de interés para el caso de estudio. Por ejemplo, para 40 procesos de filtrado solo persisten los dos máximos centrales.

Se tiene que 6 procesos de filtrado es lo óptimo para que el algoritmo *Faraday 1.1* identifique correctamente los 20 máximos de interés en el perfil de Faraday ruidoso, véase Figura 2.5. Sin embargo, hay que notar que en los extremos del perfil, donde su intensidad es menor, es más afectado por las perturbaciones del ruido y los máximos encontrados son menos claros. Para 5 y 7 procesos de filtrado, el algoritmo predice 24 y 18 máximos, respectivamente. Para que *Faraday 1.1* haga una buena predicción es necesario encontrar el número óptimo de procesos de filtrado.

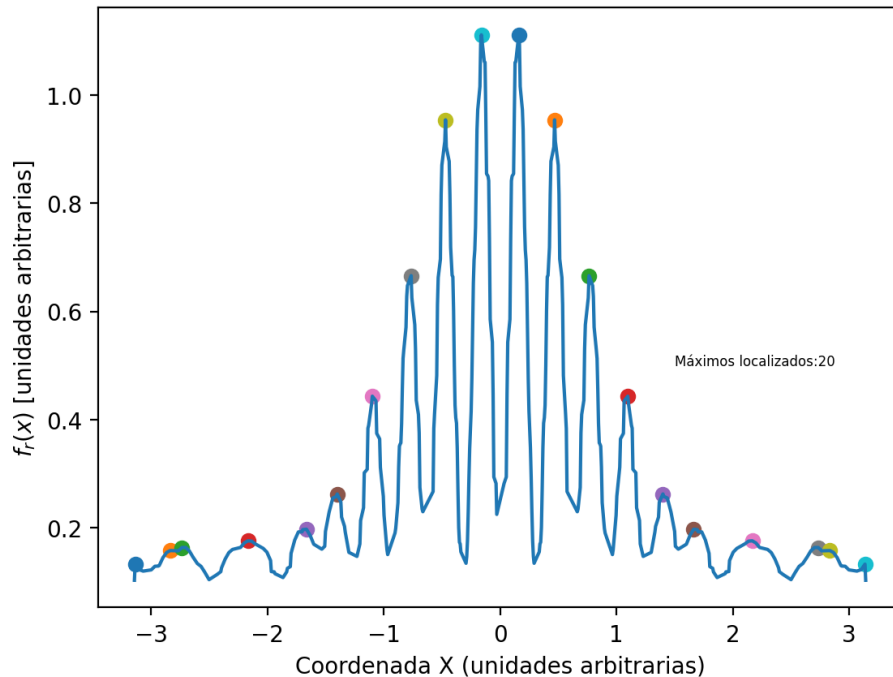


Figura 2.5: Perfil de Faraday después de 6 procesos de filtrado con sus respectivos máximos ubicados y contados por *Faraday 1.0*.

También se ha encontrado que el número de filtrados depende directamente del número de puntos utilizados para generar el perfil. Lo anterior se debe a que el ruido

generado por la función depende de tal número de puntos. Se ha observado que a mayor número de puntos mayor es el número de ruido presente en el perfil y por tanto es necesario realizar un mayor número de procesos de filtrado, véase Figura 2.6. Claramente se observa, que cuando el número de puntos utilizado para generar el perfil es pequeño cuando al aplicar los primeros procesos de filtrado el número de máximos identificados por *Faraday 1.1*. cae drásticamente, inclusive para 200 puntos el patrón generado ni siquiera soporta un proceso de filtrado, pues en este elimina varios puntos de interés.

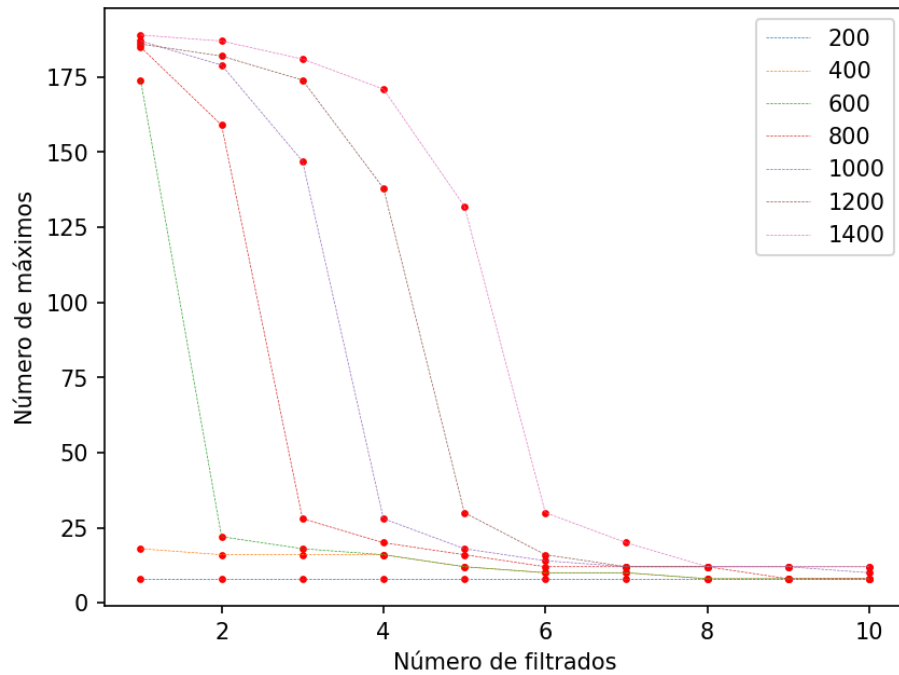


Figura 2.6: Máximos localizados por *Faraday 1.1* en función del número de procesos de filtrado aplicados a perfiles de diferente resolución.

Finalmente, se ha logrado el desarrollo de un algoritmo que localiza y cuenta el número de máximos (franjas) en un perfil que simula un patrón de ondas de Faraday con presencia de ruido y que reproduce apropiadamente las imágenes reales obtenidas de este fenómeno en un superfluido BEC molecular en el LMU. En el siguiente capítulo se aplicará *Faraday 1.1* a las imágenes obtenidas en tal laboratorio y se realizarán las mejoras pertinentes para su óptimo funcionamiento. Por ahora, este ha sido un primer acercamiento al conteo de franjas en este tipo de excitaciones.

2.2. Vórtices en dos dimensiones

La representación visual de un vórtice cuantizado en un superfluido se puede lograr mediante una expresión matemática y el uso de un lenguaje de programación, como en este caso, *Python*. Usando la ecuación (2.3), se puede crear una superficie que simule vórtices homogéneos dispuestos en una red cuadrangular, donde las regiones de menor densidad, que representan vórtices, se asignan a píxeles de menor intensidad.

$$I(x, y) = - [\cos^2(\sin(x))] [\cos^2(\sin(y))] \quad (2.3)$$

Donde x y y las coordenadas espaciales del plano sobre el que se encuentra el superfluido que se desea simular. El número de vórtices que se desea generar depende del dominio de la función *coseno* en las coordenadas espaciales. Los mínimos en la función se obtienen cuando ambas coordenadas espaciales son múltiplos de π , es decir, x, y son iguales a $\pm m\pi$ con $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Estos mínimos se distinguen como una depresión en la superficie y representarán los vórtices cuantizados. Para generar m^2 vórtices, se utiliza un dominio D que abarca desde $-\frac{m\pi}{2}$ hasta $\frac{m\pi}{2}$. Con $m = 5$, se obtiene una superficie con 25 vórtices, como se muestra en la Figura 2.7.

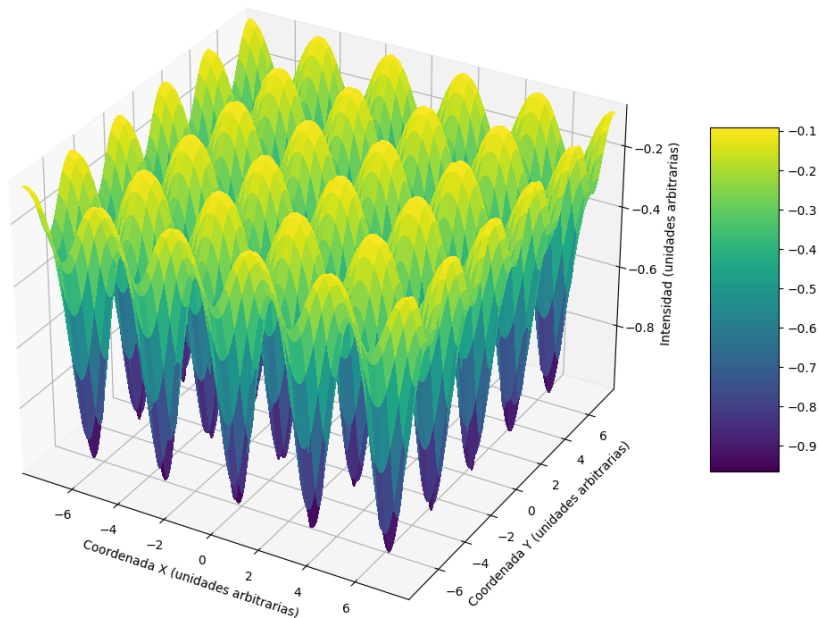


Figura 2.7: Superficie generada a partir de la ecuación (2.3). Las depresiones en la superficie representan vórtices cuantizados en el superfluido.


```

1  """GENERA SUPERFICIE CON m^2 HUECOS QUE SIMULAN VÓRTICES
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4  #Librerías Python
5  import numpy as np
6  import matplotlib.pyplot as plt
7  from matplotlib import cm
8
9  #Define rango de la imagen y número de vórtices
10 m = 5
11 a = m * np.pi / 2
12 x = np.outer(np.linspace(-a, a, num=1024), np.ones(1024))
13 y = x.copy().T
14
15 #Calcula el valor de z = f(x,y) usando las variables x, y, sigma
16 z = -(((np.cos(np.sin(x)))**2) * (np.cos(np.sin(y))**2) )
17
18 #Crea figura 3D de los vórtices
19 fig = plt.figure(figsize=(15, 10))
20 ax = plt.axes(projection='3d')
21 surf=ax.plot_surface(x, y, z, cmap=cm.viridis, linewidth=0, antialiased=False)
22 fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)
23 ax.set_xlabel('Coordenada X (unidades arbitrarias)'); ax.set_xlim(-a, a)
24 ax.set_ylabel('Coordenada Y (unidades arbitrarias)'); ax.set_ylim(-a, a)
25 ax.set_zlabel('Intensidad (unidades arbitrarias)'); ax.set_zlim(np.min(z), np.max(z))
26 plt.show()

```

Conocer el número y ubicación de los vórtices es de especial interés para este trabajo. Es posible crear algoritmos para detectar y contar los puntos críticos (los mínimos) en una superficie tridimensional, similar como se hizo para contar franjas en un patrón de ondas de Faraday. No obstante, se puede lograr el mismo resultado simplificando el problema al llevar la información a dos dimensiones mediante la proyección de los valores de densidad en cada punto de la superficie y utilizando otros métodos de detección para estas regiones de interés.

Proyecciones en diferentes planos nos proporcionan información desde diferentes perspectivas, véase Figura 2.8. La proyección que proporciona más información de interés para este trabajo es la del plano XY, que representa la densidad del superfluido. Tal proyección permite simular con gran veracidad las imágenes que se obtienen mediante las técnicas de absorción en laboratorio, véase Figura 2.9.

La distribución de los vórtices en excitaciones colectivas en un superfluido depende de la trampa de potencial que confina al gas y del método de generación de vórtices. Se pueden tener geometrías circulares, elipsoidales, anillos, entre otras. En este trabajo, la simulación de imágenes se centra en la generación de vórtices en una disposición regular, específicamente en una geometría cuadrada. Esto se hace con el propósito de permitir una fácil identificación visual del número de vórtices y para poder comparar los resultados con los algoritmos desarrollados. La identificación de los vórtices no depende de la geometría en la que se encuentren, sino de sus propiedades locales.

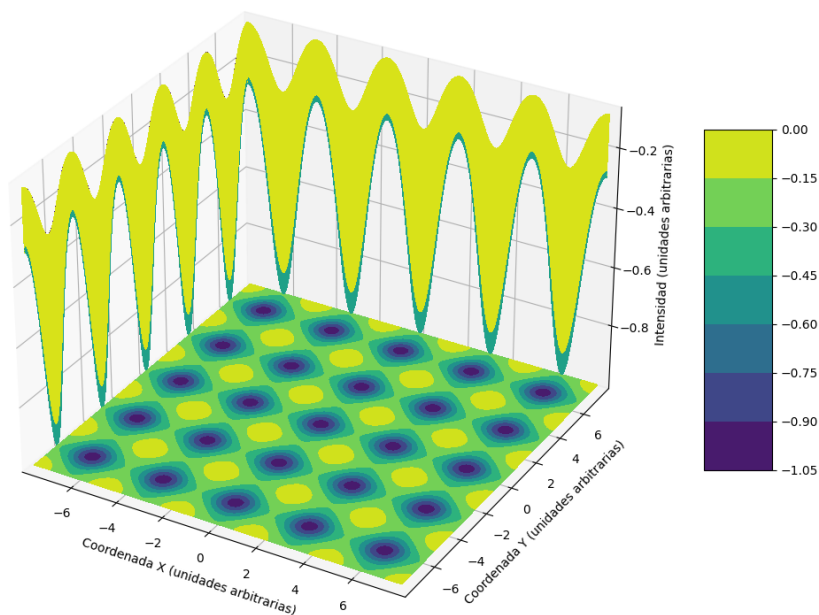


Figura 2.8: Proyección de la superficie en los planos ortogonales.

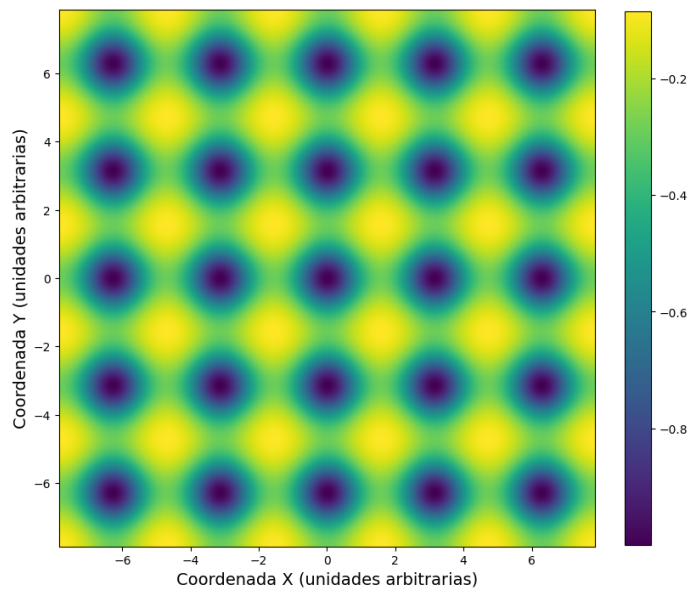


Figura 2.9: Simulación de imagen de absorción de un gas ultrafrío. Las regiones con tendencia al color azul tienen menor densidad y representan vórtices cuantizados.

A continuación, se describen dos métodos desarrollados para identificar y contar las regiones de interés en imágenes que representan vórtices cuantizados en un superfluido: la segmentación por umbrales y la detección de *blobs*.

2.2.1. Seg 1.0: Detección de vórtices por segmentación

El término segmentación de imágenes se refiere a la partición de una imagen en un conjunto de regiones que la conforman. En muchas tareas, el objetivo es que las regiones representen áreas significativas de la imagen, como por ejemplo, cultivos, zonas urbanas o bosques en una imagen de satélite. Las regiones también pueden definirse como un grupo de píxeles que tienen tanto un borde y una forma particular, como un círculo, una elipse o un polígono. Cuando las regiones de interés no cubren toda la imagen, podemos seguir hablando de segmentación en regiones de interés en primer plano y regiones de fondo que deben ignorarse [91].

El proceso de segmentación por umbral puede considerarse como el proceso de separar el primer plano del fondo. La segmentación por umbral extrae principalmente el primer plano basándose en la información del valor de gris, por lo que resulta especialmente útil para segmentar imágenes con un fuerte contraste entre los objetos en primer plano y el fondo. Para la segmentación umbral de imágenes con muy bajo contraste es necesario mejorar primero el contraste de las imágenes y, a continuación, realizar el procesamiento umbral [92].

Uno de los propósitos de este trabajo es identificar al conjunto de píxeles que representan vórtices. Considerando que los vórtices presentan forma e intensidad uniforme en la imagen, se optó por un método de segmentación global. No obstante, cuando los vórtices presentan variaciones significativas en diferentes regiones de la imagen, es necesario elegir otros métodos de segmentación. Por ejemplo, en lugar de aplicar un umbral a toda la imagen, la segmentación adaptativa ajusta el umbral de manera local en diferentes partes de la imagen.

La segmentación por umbral global consiste en establecer como blancos los píxeles cuyo valor de gris es superior al valor umbral y como negros los píxeles inferiores o iguales al valor umbral. O a la inversa, los píxeles mayores que el valor umbral se establecen en negro y los píxeles menores o iguales al valor umbral se establecen en blanco. La única diferencia entre ambos es la forma de presentación. A continuación se desarrolla la primera opción.

Primeramente, si se parte de una imagen con canales RGB esta debe convertirse a escala de grises, véase Figura 2.10. Para ello, se utiliza el método `color.rgb2gray()` de la librería `scikit-image` [3], que es una colección de algoritmos para el procesamiento de imágenes en *Python*. La imagen que se obtiene está normalizada entre cero y uno, esto es esencial para facilitar la segmentación de la imagen.

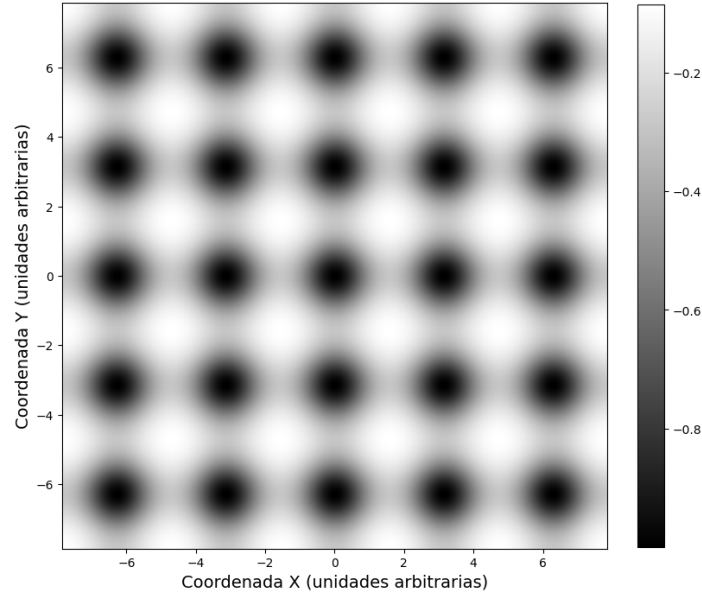


Figura 2.10: Simulación de imagen de absorción de un gas ultrafrío en escala de grises. Las regiones con tendencia al negro representan vórtices.

Suponiendo que la imagen de entrada es I , la altura es H , la anchura es W y que $I(r, c)$ representa el valor en escala de grises de la fila r y la columna c de I , con $0 \leq r < H$ y $0 \leq c < W$. La imagen de salida tras el procesado de umbral global es O , $O(r, c)$ se define como el valor de gris de la columna c y la fila r de O en la nueva representación de la imagen:

$$O(r, c) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(r, c) > \text{umbral} \\ 0, & \text{si } I(r, c) \leq \text{umbral} \end{cases} \quad (2.4)$$

Para la imagen de la Figura 2.10 se generan diez representaciones diferentes con umbrales que van de 0.1 a 1.0 con intervalos de 0.1, véase Figura 2.11. Este modo de representación se denomina *imágenes etiquetadas*, y la idea detrás de ellas es asignar a cada región eliminada un identificador único, creando así una imagen en la que todos los píxeles de una región tienen su identificador único como valor de píxel. Una imagen etiquetada puede utilizarse como una especie de máscara para identificar los píxeles de una región en alguna operación que calcule sus propiedades, como el área o la longitud del eje mayor de una elipse. Adicionalmente, se puede emplear para realizar el conteo del número de regiones de interés en una imagen, un enfoque que aplicaremos en este trabajo para llevar a cabo el conteo de los vórtices cuantizados.

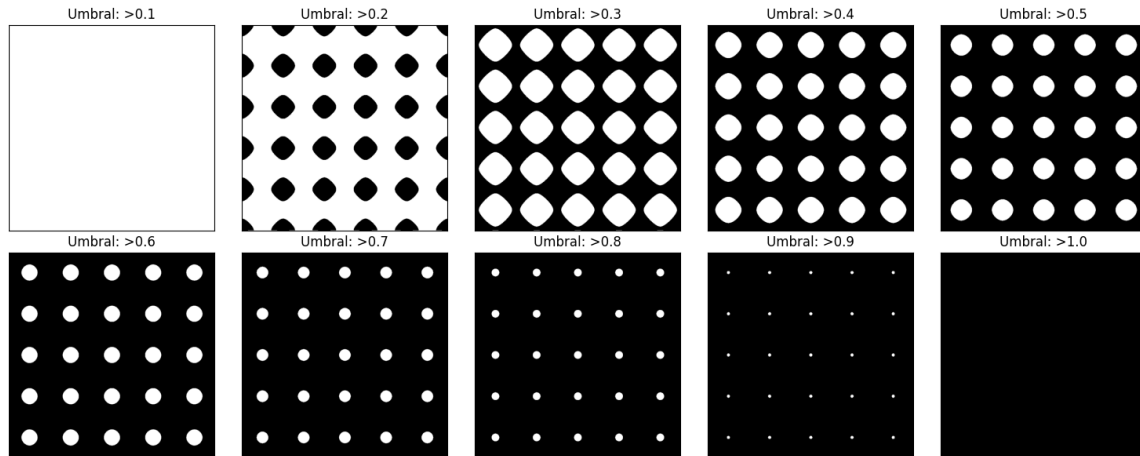


Figura 2.11: Segmentación por umbral global. Se generan diez imágenes con umbrales entre 0.1 y 1, con intervalo entre umbrales de 0.1.

```

1  """SEGMENTA LA IMAGEN DE VÓRTICES
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4  #Librerías Python
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  from skimage.color import rgb2gray
7  from skimage import measure
8
9  # imagen: numpy array convertida a escala de grises
10 gray_image = rgb2gray(imagen)
11
12 # Establecer el tamaño de la imagen
13 plt.figure(figsize=(15, 6))
14
15 #Iterando diferentes umbrales
16 for i in range(10):
17     binarized_gray = (gray_image > (i+1)*0.1)*1
18     plt.subplot(2,5,i+1)
19     all_labels = measure.label(binarized_gray, return_num=True, connectivity=2)
20     plt.title("Umbral: >"+str(round((i+1)*0.1,1)))
21     plt.imshow(binarized_gray, cmap = 'gray')
22     plt.tick_params(axis='both', which='both', bottom=False, top=False, left=False, right=False)
23     plt.xticks([])
24     plt.yticks([])
25 plt.tight_layout()

```

De la Figura 2.11 se puede apreciar que los umbrales que mejor significado tienen para el objetivo de este trabajo son los umbrales entre 0.3 y 0.9, en los que claramente las regiones en blanco representan los vórtices de la Figura 2.9. Sin embargo, el umbral de 0.5 se ajusta mejor en términos de la cantidad y el tamaño de los vórtices en la imagen. Lo que sigue a continuación es el conteo de tales regiones.

Utilizando nuevamente *scikit-image*, aplicamos la función *measure.label*, que etiqueta las regiones conectadas de un arreglo de enteros. En este contexto, aplicamos esta función a la imagen después de segmentarla, donde los píxeles tienen valores de 0 y

1 en su representación de *imágenes etiquetadas*. Para conocer el número de regiones en la imagen, la función toma en cuenta la conectividad entre los píxeles, es decir, cuenta el número de regiones en las que los píxeles están conectados. Dos píxeles están conectados cuando son vecinos y tienen el mismo valor. En 2 dimensiones, pueden ser vecinos en el sentido de 1 ó 2 conexiones. El valor se refiere al número máximo de saltos ortogonales para considerar un píxel vecino, véase Figura 2.12.

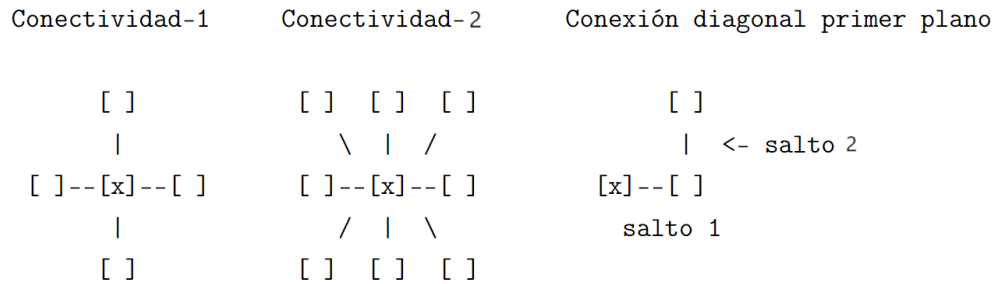


Figura 2.12: Conectividad entre píxeles de las regiones a identificar con *measure.label*.

Aplicando la función *measure.label* al umbral 0.5 de la Figura 2.11 con una conectividad-2 esta predice la cantidad de 25 regiones como se observa en la Figura 2.13. Hay que recordar que los píxeles de las regiones blancas tienen valor 1 y las regiones negras valor 0. Lo que hace la función *measure.label* es contar el número de regiones blancas que están conectadas estrictamente con conectividad-2 y devolver ese número. Las regiones blancas representan el número de vórtices que se han generado en la imagen. Integrando estas funciones se obtiene el algoritmo *Seg 1.0*, que cuenta vórtices en imágenes simuladas utilizando el método de segmentación global por umbrales.

```

1  """SEG 1.0: CUENTA EL NÚMERO DE REGIONES CONECTADAS EN UNA IMAGEN
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4  #valor de umbral
5  u= 0.5
6
7  # Establecer el tamaño de la imagen a 15,15
8  plt.figure(figsize=(15, 5))
9
10 #Calcula el número de regiones conectadas para un umbral dado
11 binarized_gray = (gray_image > u)
12 all_labels = measure.label(binarized_gray, return_num=True, connectivity=2)
13
14 #Imprime el número de regiones conectadas
15 plt.title("$N_{Seg}=$" + str(all_labels[1]))
16
17 #Visualización de la imagen binarizada
18 plt.imshow(binarized_gray, cmap = 'gray')
19 plt.xlabel('Índice X (píxeles)', fontsize=14)
20 plt.ylabel('Índice Y (píxeles)', fontsize=14)
21 plt.tight_layout()

```

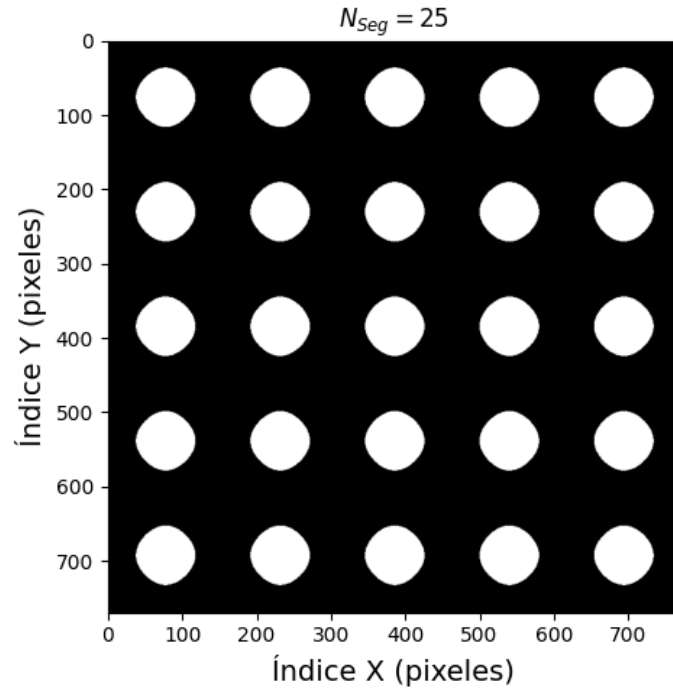


Figura 2.13: Representación después de segmentar la imagen considerando un umbral de 0.5 en escala de 0 a 1. El algoritmo predice un número de $N_{Seg} = 25$ regiones.

Seg 1.0 funciona adecuadamente para calcular el número de vórtices en la imagen generada. Los dos parámetros más importantes en este método son el valor del umbral y la conectividad, estos se deben elegir adecuadamente para obtener una representación fiable de los vórtices y su conteo adecuado. Una de las limitaciones de este algoritmo es que, en imágenes con un alto nivel de ruido, tiende a sobrestimar los vórtices. Para abordar imágenes con presencia de ruido, como las obtenidas en laboratorios de gases ultrafríos, se requiere un método para suavizarlas. Basado en *Seg 1.0*, se desarrolla *Seg 1.1* que emplea el método de Sauvola para reducir el ruido aleatorio en las imágenes de vórtices simulados.

2.2.2. Seg 1.1: Detección de vórtices con ruido y filtro Sauvola

La Figura 2.14 representa la simulación de una imagen con 25 vórtices en presencia de ruido tipo *Speckle*. Este tipo de ruido granular es común en las imágenes obtenidas en entornos de laboratorio, lo que motiva la elección de utilizarle en este trabajo. La imagen anterior se generó introduciendo ruido mediante la adición de perturbaciones aleatorias a los valores de los píxeles de la imagen original de la Figura 2.9.

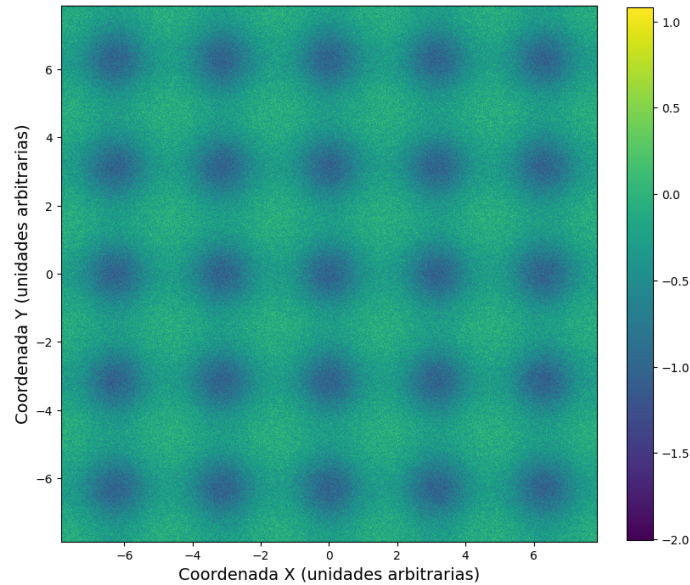


Figura 2.14: Simulación de imagen de absorción de un gas ultrafrío considerando ruido. Las regiones de color azul tienen menor densidad y representan vórtices.

```

1  """GENERA IMAGEN DE m*2 VÓRTICES CON PRESENCIA DE RUIDO
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4  #Librerías Python
5  import numpy as np
6  import matplotlib.pyplot as plt
7
8  #Define rango de la imagen y número de vórtices
9  m=5
10 a = m * np.pi / 2
11 x = np.outer(np.linspace(-a, a, num=1024), np.ones(1024))
12 y = x.copy().T
13
14 #Define y rediseña la función de vórtices ruidosos
15 def f(x,y):
16     return -((np.cos(np.sin(x)))**2) * (np.cos(np.sin(y)))**2)
17 z = f(x,y)
18
19 #Introduce ruido tipo speckle
20 speckle_intensity = 0.25
21 speckle_noise = speckle_intensity*np.random.randn(*z.shape)
22 z_noisy = z + speckle_noise
23
24 #Imprime la imagen
25 plt.figure(figsize = (9,9))
26 fig=plt.imshow(z_noisy, extent=[-a,a,-a,a])
27 plt.xlabel('Coordenada X (unidades arbitrarias)', fontsize=14)
28 plt.ylabel('Coordenada Y (unidades arbitrarias)', fontsize=14)
29 plt.colorbar(fraction=0.045)
30 plt.savefig("plot_vortices.jpg")
31 plt.show()

```

Considerando un umbral óptimo de 0.5 y conectividad-2, como se ilustra en la Figura 2.15a, *Seg 1.0* estima 13,384 regiones individuales que están conectadas, tal estimación es significativamente grande y no representa el número real de vórtices en la imagen.

El algoritmo considera cada una de las pequeñas regiones ruidosas como una región de interés. Para disminuir el ruido se aplicó el filtro de Sauvola a la Figura 2.14. Con esta modificación, utilizando un umbral óptimo de 0.5 y una conectividad de 2, el algoritmo identifica 25 regiones. El resultado anterior coincide con el número de vórtices presentes en la imagen, véase Figura 2.15b.

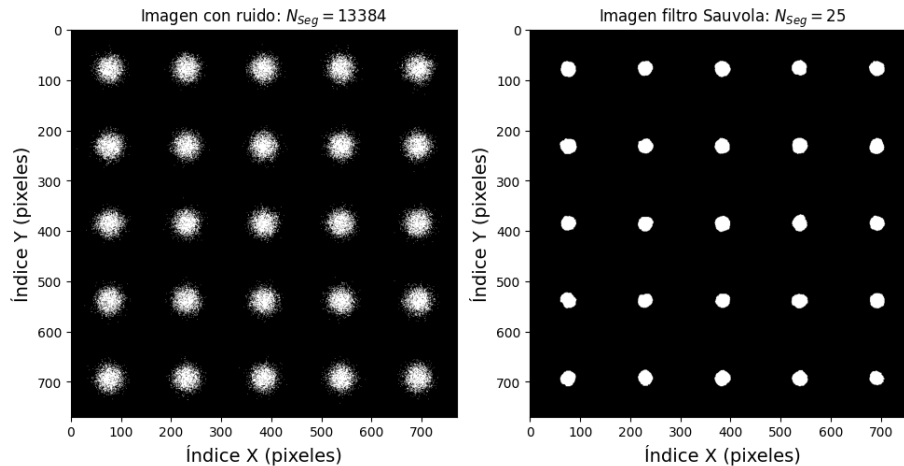


Figura 2.15: Conteo de vórtices utilizando *Seg 1.1*. En la izquierda, conteo de vórtices por segmentación simple. A la derecha, conteo de vórtices con segmentación después de aplicar filtro de Sauvola.

```

1  """SEG 1.1: CUENTA EL NÚMERO DE REGIONES CONECTADAS (SEGMENTACIÓN SIMPLE Y SAUVOLA)
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4  from skimage import filters
5  from skimage.filters import (threshold_sauvola)
6
7  #Crea subplots y determina su tamaño
8  fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5))
9
10 #Método simple de segmentación
11 binarized_gray1 = gray_image > 0.5
12 axs[0].imshow(binarized_gray, cmap='gray')
13 axs[0].set_title('Thresholded Image (Fixed)')
14 all_labels = measure.label(binarized_gray1, return_num=True, connectivity=2)
15 axs[0].set_title("Imagen con ruido:$-N_{Seg}=$" + str(all_labels[1]))
16
17 #Método de Sauvola de segmentación
18 binarized_gray_sauvola = filters.threshold_sauvola(gray_image) > 0.5
19 axs[1].imshow(binarized_gray_sauvola, cmap='gray')
20 all_labels = measure.label(binarized_gray_sauvola, return_num=True, connectivity=2)
21 axs[1].set_title("Imagen filtro Sauvola:$-N_{Seg}=$" + str(all_labels[1]))
22
23 #Establecer etiquetas de ejes y mostrar la imagen
24 for ax in axs:
25     ax.set_xlabel('Índice X (pixeles)', fontsize=14)
26     ax.set_ylabel('Índice Y (pixeles)', fontsize=14)
27 plt.tight_layout()
28 plt.show()

```

El filtro Sauvola calcula un umbral adaptativo local para cada píxel de la imagen, teniendo en cuenta su vecindad. Esta técnica de umbralización local es útil para imágenes en las que el fondo no es uniforme, especialmente para el reconocimiento de texto [93]. No obstante, en este trabajo ha sido aplicado con éxito para disminuir el ruido tipo *Speckle* o tipo *moteado* en las imágenes de vórtices.

A diferencia del umbral global, que utiliza un único valor de umbral para toda la imagen, el método Sauvola aplica el umbral de manera adaptativa a escala local. Utiliza la ecuación (2.5) para calcular un umbral T para cada píxel (x, y) , teniendo en cuenta las características de su ventana local, definida por una ventana rectangular de tamaño $w \times w$ centrada alrededor del píxel (x, y) .

$$T(x, y) = m(x, y) \left[1 + k \left(\frac{d(x, y)}{R} - 1 \right) \right] \quad (2.5)$$

En esta fórmula, $m(x, y)$ y $d(x, y)$ representan la media y desviación estándar en la ventana local, respectivamente. k es un parámetro configurable que pondera el efecto de la desviación estándar (generalmente entre 0.2 y 0.5) y R el rango dinámico de desviación estándar (generalmente establecida en 128). La media local y la desviación estándar se utilizan para ajustar el valor del umbral según el contraste en la vecindad local del píxel [94]. La función `threshold_sauvola` de `skimage.filters` considera un tamaño de ventana de 15×15 píxeles para calcular el umbral del píxel central.

El término $d(x, y)/R$ mide cuanto difiere la intensidad local de la intensidad media local. Si k es cero, no ocurre ajuste adaptativo, y el umbral es igual a la media local. A medida que aumenta k , el valor $d(x, y)/R$ tiene un efecto mayor en el umbral. Un valor de k más grande implica que las áreas con contrastes locales más pequeños en la intensidad se tomarán menor en cuenta al estimar el umbral, que resulta en una menor sensibilidad a estas diferencias locales.

Por otro lado, un valor más bajo de k hará que el umbral sea más sensible a las diferencias locales. Esto significa que incluso pequeñas variaciones locales en la intensidad tendrán un impacto significativo en el umbral, lo que puede llevar a una segmentación más fina y detallada, pero también puede ser más susceptible al ruido.

Ambos algoritmos de segmentación desarrollados son adecuados para contar vórtices en imágenes simuladas con poco o ningún ruido. El algoritmo *Seg 1.0* es capaz de detectar vórtices en imágenes sin ruido, pero su rendimiento disminuye en presencia de ruido. Por otro lado, *Seg 1.1* puede detectar vórtices en imágenes con cierto nivel

de ruido, para imágenes con *speckle_noise* de 0.15, el algoritmo comienza a tener dificultades para realizar predicciones precisas.

A continuación, se describen algoritmos basados en métodos de detección de *blobs* utilizando los filtros Laplaciano de la Gaussiana (LoG) y Diferencia de Gaussianas (DoG). Estos filtros permiten un análisis en múltiples escalas, lo que puede resultar desafiante con un método de segmentación fijo. Además, ambos filtros aplican un suavizado gaussiano para reducir el ruido en la imagen. Otra característica importante es que los filtros LoG y DoG operan de manera local, considerando la vecindad inmediata de cada píxel. Este enfoque de análisis local puede capturar variaciones significativas que los métodos de segmentación globales podrían pasar por alto.

2.2.3. Blobs 1.0: Detección de *Blobs* con filtros LoG y DoG

Un *Blob* se caracteriza por ser una región donde los píxeles comparten propiedades similares, como brillo, color y forma, lo que lo diferencia del entorno circundante. La definición de *Blob* se basa en la constancia de tales propiedades de interés, por lo que se denomina también identificación de punto/región de interés. Este campo, que forma parte de la visión por ordenador, se centra en encontrar elementos básicos de la imagen, como esquinas, bordes, curvas, entre otros [95].

Cuando una imagen está afectada significativamente por el ruido y los métodos de segmentación simple o el método de Sauvola no resultan adecuados, se pueden recurrir a enfoques basados en métodos diferenciales. Estos métodos permiten lidiar con imágenes ruidosas de manera más efectiva. Estos métodos se basan en la derivada de la función de intensidad con respecto a las coordenadas y, por lo tanto, señalan las regiones en las que la intensidad cambia más rápidamente con respecto al resto de la imagen. Los *Blobs* pueden representarse matemáticamente mediante un par formado por un punto de silla y un punto extremo, lo que le da el aspecto de un pico en el dominio de frecuencias [95].

La mayoría de los métodos de detección de *Blobs* se basan en la selección automática de escalas inspirada en Lindeberg [96]. Antes de la detección, la imagen se convierte a una representación en espacio de escala aplicando un núcleo de suavizado convolucional sobre la imagen. En la mayoría de los casos se trata del filtro gaussiano, que realiza una media ponderada de los píxeles circundantes basándose en la distribución gaussiana, véase ecuación (2.6), lo que da lugar a una imagen borrosa [95].

$$G(x, y; \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (2.6)$$

Donde x, y las coordenadas espaciales y σ la desviación estándar. El Laplaciano de la Gaussiana (LoG) es un método diferencial popular utilizado para la detección de *Blobs* [97]. En primer lugar, convoluciona la imagen de entrada mediante un kernel gaussiano a una determinada escala (σ) para obtener una representación espacio-escala $L(x, y; \sigma) = G(x, y; \sigma) * I(x, y)$, donde x e y son las coordenadas en píxeles de $I(x, y)$. A continuación, aplicamos el operador Laplaciano, que produce una respuesta positiva y pronunciada para los *Blobs* oscuros de un tamaño específico [97].

$$\nabla^2 L(x, y; \sigma) = \frac{\partial^2 L(x, y; \sigma)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L(x, y; \sigma)}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

El mismo resultado se obtiene si primero se aplica el operador laplaciano a la gaussiana, obteniéndose así la función *LoG* bidimensional centrada en cero y desviación típica gaussiana (σ) que convoluciona la imagen de entrada $I(x, y)$.

$$LoG(x, y; \sigma) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right] e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (2.8)$$

A diferencia de los filtros de primer orden que detectan los bordes basándose en máximos o mínimos locales, el Laplaciano detecta los bordes en los cruces por cero, es decir, cuando el valor cambia de negativo a positivo y viceversa.

Debido al alto costo computacional del cálculo del Laplaciano, a menudo se prefiere el filtro de Diferencia de Gaussianas (DoG) en lugar del filtro LoG. El filtro DoG, representado por la ecuación (2.9), se convoluciona con la imagen de entrada $I(x, y)$. Lindeberg [98] menciona que se puede considerar a los puntos de interés obtenidos mediante el filtro *DoG* como una aproximación de los puntos de interés obtenidos con el filtro *LoG*.

$$DoG(x, y; \sigma_1, \sigma_2) = G(x, y; \sigma_1) - G(x, y; \sigma_2) \quad (2.9)$$

Para imágenes con mucho ruido la mejor precisión del filtro *LoG* puede hacer la diferencia siempre y cuando el tiempo de cómputo sea aceptable, en caso contrario se puede optar por el filtro *DoG*.

En la Figura 2.16, se ilustra el efecto de los filtros LoG y DoG aplicados a una imagen en escala de grises. La convolución de una imagen con los filtros DoG y LoG mejora la visibilidad de los bordes y límites entre los objetos, los cuales están asociados con cambios bruscos en las intensidades de los píxeles.



Figura 2.16: Filtros LoG y DoG aplicados a una imagen en escala de grises. *Imagen de uso libre tomada de scikit-image [3].*

Para aplicar el filtro a la imagen, antes que nada el filtro se debe discretizar, lo cual consiste en crear un kernel que convolucionara con los valores discretos de los píxeles de la imagen. Los kernels son cuadrículas de números 1D ó 2D que indican la influencia de los vecinos de un píxel en su valor final. Para calcular el valor de cada píxel transformado, se suman los productos del valor de cada píxel vecino por el valor del kernel correspondiente. Durante una operación de convolución, el núcleo pasa por cada píxel de la imagen, repitiendo este procedimiento, y luego aplica el efecto a toda la imagen, véase Figura 2.17.

En este trabajo se usarán ambos filtros para mostrar que se obtienen resultados similares. Las funciones (LoG y DoG) a utilizar son parte de la librería *scikit-image* y se describen a continuación.

Como se ha mencionado anteriormente el método LoG es el más preciso. La función de la librería que se utiliza es *skimage.feature.blob_log()*, su habilidad principal es encontrar *Blobs*, vórtices en este caso, en una imagen dada en escala de grises. En pocas palabras, este calcula el Laplaciano de imágenes gaussianas con desviaciones estándar sucesivamente crecientes y las apila en un cubo. Los vórtices son los máximos locales de este cubo. Solamente se detectan vórtices brillantes sobre fondos oscuros. Finalmente, el algoritmo regresa las coordenadas del vórtice y su tamaño.

El método DoG se trata de una aproximación más rápida del enfoque LoG. En este

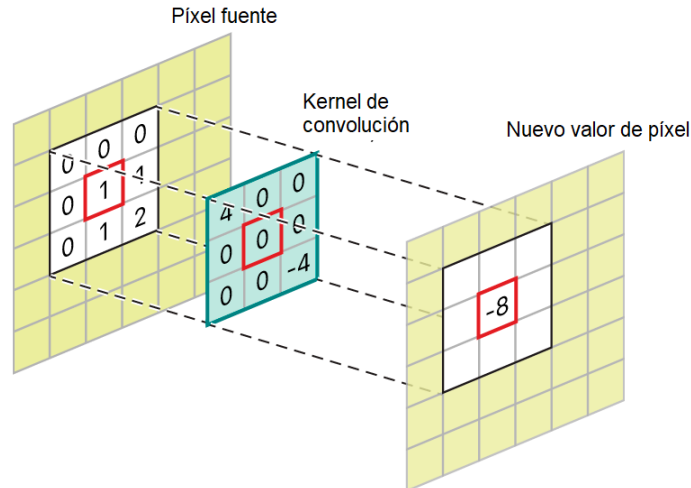


Figura 2.17: Esquema que muestra la operación de convolución de una imagen fuente con el kernel de convolución. Cada píxel de salida depende de los píxeles de entrada, la función que los relaciona es el kernel. *Tomada y modificada de [99].*

caso, la imagen se desenfoca con desviaciones estándar crecientes y la diferencia entre dos imágenes desenfoçadas sucesivamente se apilan en un cubo. Una vez más, se supone que los vórtices son brillantes sobre fondo más oscuro. La función de la librería que se utiliza es `skimage.feature.blob_dog()`. Los parámetros son casi los mismos que para `skimage.feature.blob_log()`, sin embargo, el método DoG no utiliza el parámetro `num_sigma`, en cambio tiene el parámetro `sigma_ratio`: flotante, que determina la relación entre la desviación típica de los núcleos gaussianos utilizados para calcular la diferencia de gaussianas.

Se desarrolló un algoritmo, llamado *Blobs 1.0*, para analizar las imágenes de vórtices simulados. Primero, convierte imágenes RGB a escala de grises utilizando la función `rgb2gray()`. No obstante, este paso no es necesario para las imágenes monocromáticas del LMU y *Lithium Lab*. Luego, se aplica `skimage.feature.blob_log()` y `skimage.feature.blob_dog()` a la imagen, para al final devolver una imagen con los vórtices localizados y su conteo.

```

1 """BLOBS 1.0: CUENTA Y LOCALIZA VÓRTICES EN UNA IMAGEN SIMULADA CON PRESENCIA DE RUIDO
2 Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4 # Librerías Python
5 from skimage.feature import blob_dog, blob_log
6 from skimage.filters import threshold_sauvola
7 import numpy as np
8
9 # imagen: formato numpy.ndarray
10 # fi,ff,ci,cf : Delimitación de imagen (fila inicial, fila final, columna inicial, columna final)
11 # min_sigma: La desviación estándar mínima para el kernel gaussiano. Manténgala baja para detectar manchas más pequeñas.

```

```

12 # max_sigma: La desviación estándar máxima para el kernel gaussiano. Manténgalo alto para detectar manchas más grandes.
13 # num_sigma: El número de valores intermedios de desviaciones estándar a considerar entre min_sigma y max_sigma.
14 # sigma_ratio: La relación entre la desviación típica de los núcleos gaussianos
15 # threshold: El límite inferior absoluto para los máximos del espacio de escala.
16 # overlap: Nivel de solapamiento entre vórtices. Asignar 0.
17
18 def Blobs1punto0(imagen,fi,ff,ci,cf,min_sigma,max_sigma,num_sigma, sigma_ratio, threshold, overlap):
19
20     # Normaliza la imagen en valores entre 0 y 1
21     imagen = imagen[fi:ff,ci:cf]
22     B_min = np.min(imagen)
23     B_max = np.max(imagen)
24     B_scaled = (imagen - B_min) / (B_max - B_min)
25
26     # Aplica filtro Sauvola
27     thresh_sauvola = threshold_sauvola(B_scaled)
28     image_gray = thresh_sauvola
29     gray_inverted = 1 - image_gray
30
31     # Blobs se encuentran utilizando el método del Laplaciano de Gaussianas (LoG)
32     blobs_log = blob_log(gray_inverted, min_sigma, max_sigma, num_sigma, threshold, overlap,
33                          log_scale=False, threshold_rel=None, exclude_border=False)
34
35     # Blobs se encuentran utilizando el método del Diferencia de Gaussianas (LoG)
36     blobs_dog = blob_dog(gray_inverted, min_sigma, max_sigma, sigma_ratio, threshold, threshold_rel=None,
37                          exclude_border=False)
38
39     # Crear listas de los Blobs encontrados por los 2 métodos
40     blobs_list = [blobs_log, blobs_dog]
41     blobs_len_list = [len(blobs_log), len(blobs_dog)]
42     print('Número de vórtices con método LoG:', len(blobs_log))
43     print('Número de vórtices con método DoG:', len(blobs_dog))

```

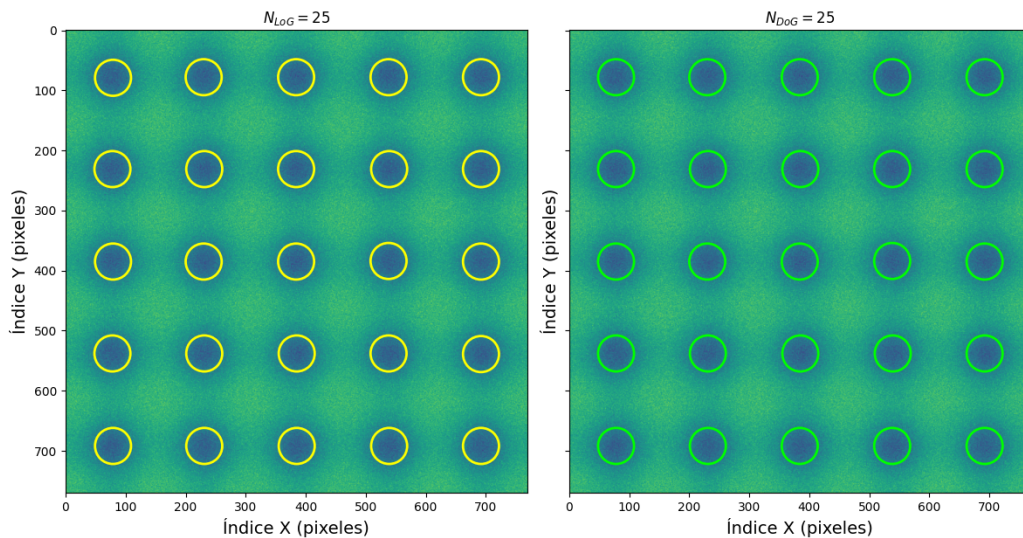


Figura 2.18: Número de vórtices detectados por los métodos LoG y DoG. Ambos métodos coinciden en la existencia de 25 vórtices. Los parámetros asignados fueron $min_sigma = 30$, $max_sigma = 50$, $num_sigma = 1$ (LoG), $sigma_ratio = 1.6$ (DoG) y $threshold = 0.05$.

Blobs 1.0 predice correctamente los 25 vórtices presentes en la imagen, véase Figura 2.18. En función de lo anterior se puede afirmar que el algoritmo *Blobs 1.0* fundamentado en los métodos LoG y DoG funciona adecuadamente para la predicción del

número de vórtices en una imagen simulada con presencia de ruido. En este caso particular, cuando utilizamos el método LoG con $num_sigma = 1$, el tiempo de ejecución es de aproximadamente 0.5 segundos, mientras que el método DoG requiere 1.15 segundos. Esto sugiere que el método LoG es más rápido, lo que podría parecer contradictorio con lo mencionado anteriormente. Sin embargo, en imágenes reales, donde los patrones de vórtices no son tan uniformes, será necesario utilizar valores más altos de num_sigma en el método LoG, lo que incrementará el tiempo de cálculo y lo convertirá en la opción menos rápida en comparación con el método DoG.

Para concluir, se realiza un análisis de cómo el ruido influye en los métodos desarrollados en este capítulo. Se abordan tres algoritmos: *Faraday 1.1*, destinado a detectar franjas en un patrón de ondas de Faraday, y *Seg 1.1* y *Blobs 1.0*, empleados para la detección de vórtices cuantizados. Cada uno de estos algoritmos se evalúa en imágenes simuladas que representan estas dos variedades de excitaciones colectivas.

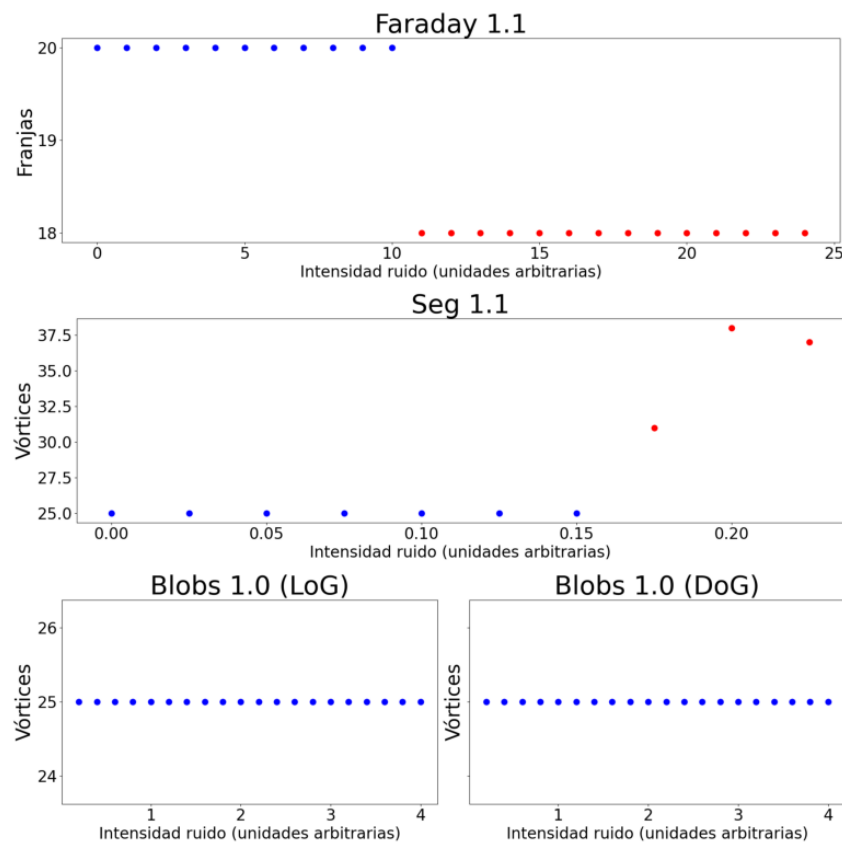


Figura 2.19: Parámetro de algoritmos en función del ruido. *Faraday 1.1* localiza y cuenta franjas, *Seg 1.1* y *Blobs 1.0* localizan y cuentan vórtices. Los métodos de generación y las escalas de ruido son diferentes para cada algoritmo.

En la Figura 2.19, se presenta una representación gráfica de la parametrización de los tres métodos desarrollados en esta sección en función del ruido. El método *Faraday 1.1* demuestra una capacidad adecuada para predecir el número de franjas en el perfil simulado, incluso cuando los parámetros de intensidad de ruido (a_i) se multiplican por un factor de diez. Sin embargo, a medida que los valores de intensidad de ruido aumentan significativamente, este método deja de predecir adecuadamente.

Por otro lado, el método *Seg 1.1* es notablemente sensible al ruido, ya que a partir de que $speckle_intensity = 0.15$, el algoritmo deja de predecir con precisión el número de vórtices en la imagen simulada.

En contraste, *Blobs 1.0* demuestra ser fiable y no se ve afectado por el ruido, inclusive para valores de $speckle_intensity = 4$. Este método mantiene su eficacia de predicción de manera estable en presencia de ruido significativo, lo cual lo convierte en una alternativa digna de confianza para analizar imágenes con estas características.

En resumen, en este capítulo se desarrollaron algoritmos para analizar imágenes simuladas de ondas de Faraday y vórtices cuantizados en un superfluido. Primeramente, los algoritmos *Faraday 1.0* y *Faraday 1.1* que localizan y cuentan máximos que representan franjas de un perfil generado por un patron de ondas de Faraday, en ausencia y presencia de ruido, respectivamente. Se desarrolló *Seg 1.0* que localiza y cuenta vórtices en un superfluido en ausencia de ruido y *Seg 1.1* para el caso con ruido. Finalmente, también se desarrolló *Blob 1.0* que cuenta y localiza los vórtices independientemente del ruido. En el siguiente capítulo se procede a aplicar estos algoritmos en imágenes obtenidas de estas excitaciones colectivas en laboratorios de átomos ultrafríos.

Capítulo 3

Algoritmos: excitaciones colectivas reales

Este capítulo muestra paso a paso el desarrollo de dos algoritmos para el análisis de imágenes de excitaciones colectivas en un superfluido. *Faraday 1.2* localiza y cuenta el número de franjas presentes en un patrón de ondas de Faraday utilizando un método analítico de máximos locales mediante comparación a primeros vecinos sumado a un proceso de filtrado. En cambio, *Blobs 1.2* disminuye el ruido tipo *speckle*, localiza y cuenta el número de vórtices presentes en un patrón de vórtices cuantizados mediante el uso de filtros (o *kernels*) gaussianos (*LoG* y *DoG*). Además, se muestra que este último algoritmo tiene la capacidad de también localizar y contar franjas en los patrones de ondas de Faraday.

3.1. Faraday 1.2: Detección de franjas de Faraday

En esta sección se procede a aplicar *Faraday 1.1* al análisis de imágenes reales de un patrón de ondas de Faraday en un superfluido generado en el LMU. Para obtener estas imágenes, el LMU ha empleado la técnica de imagen por absorción mencionada anteriormente en la sección 1.4. En primer lugar, se seleccionan aquellas imágenes que presentan patrones de ondas de Faraday más estables. Esto se debe a que en estas imágenes las franjas son más intensas y su geometría más uniforme, lo que proporciona un entorno propicio para llevar a cabo las mejoras en el algoritmo.

La información inicial de las imágenes se presenta en formato *.SIS*, que es el formato nativo de la cámara CCD del LMU. Para llevar a cabo su análisis, es necesario

convertirlas en arreglos *numpy.ndarray*, los cuales son matrices multidimensionales homogéneas con elementos de tamaño fijo. Cada elemento de estos arreglos almacena información de la imagen en escala de grises. El tamaño de las imágenes es de 1024×256 píxeles, sin embargo la región donde se presenta el patrón de ondas de Faraday tiene un tamaño de 160×40 píxeles (ver Figura 3.1). Cada región amarilla representa una franja, y en la imagen hay un total de aproximadamente 9 franjas.

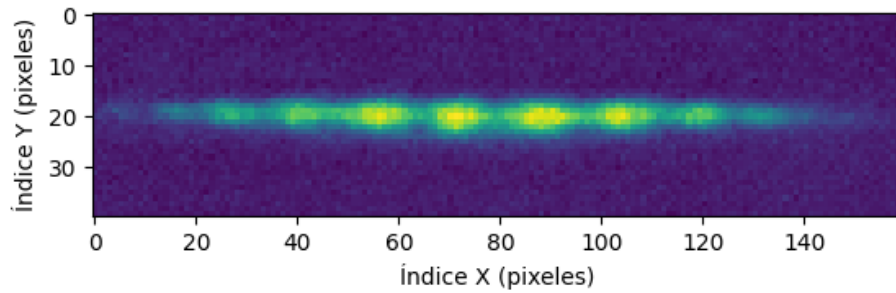


Figura 3.1: Ondas de Faraday en una nube ultrafría de ${}^6\text{Li}$ generado en el LMU.

Para obtener el perfil del patrón de ondas de Faraday se grafica la intensidad total de cada índice a lo largo del eje longitudinal X. Para la imagen de la Figura 3.1 se obtiene su perfil del patrón de ondas de Faraday, véase Figura 3.2. Este perfil es muy parecido al simulado en la sección anterior, los picos representan las franjas.

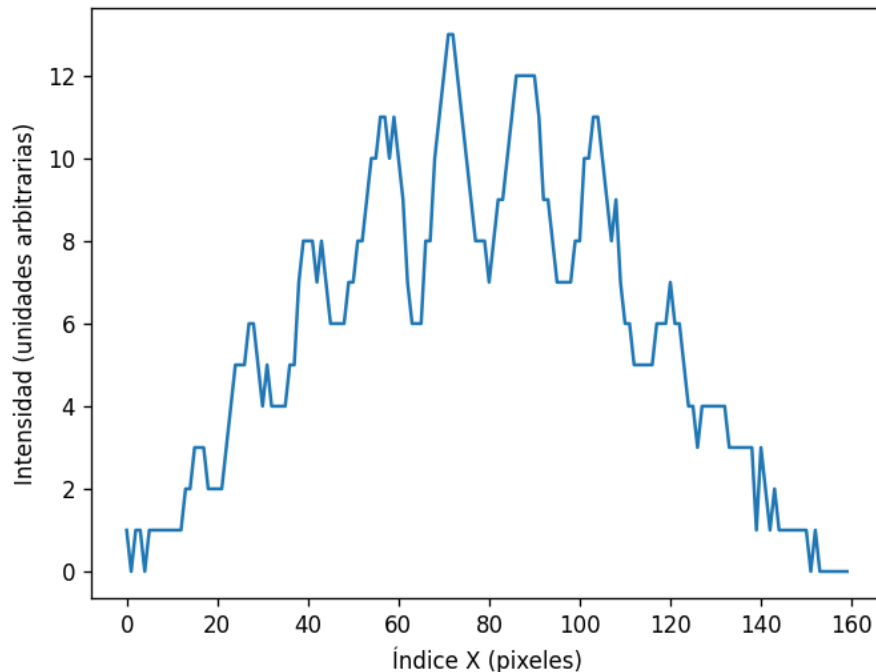


Figura 3.2: Perfil del patrón de ondas de Faraday.

Al observar la Figura 3.2, se pueden identificar máximos que no corresponden a franjas. Aunque este ruido no es significativo, es importante tenerlo en cuenta durante el análisis. Es relevante destacar que en las imágenes simuladas, cada valor de intensidad es único, a diferencia del perfil en la imagen real, donde se identifican regiones con valores de intensidad idénticos en puntos cercanos entre sí. El funcionamiento de *Faraday 1.1* se basa en la comparación de valores con los puntos vecinos más cercanos para detectar los máximos. La presencia de valores repetidos representa un desafío.

Al aplicar el algoritmo al perfil de la Figura 3.2, el algoritmo no puede identificar y contar correctamente los máximos de interés, como se muestra en la Figura 3.3. *Faraday 1.1* identifica solo un máximo en el perfil. Solo considera como máximos aquellos puntos que tienen vecinos inmediatos tanto anteriores como posteriores con valores de intensidad más bajos. Los picos no identificados del perfil no consisten en un solo punto, sino en un conjunto de puntos que comparten el mismo valor de intensidad. Por lo tanto, no cumplen con la condición necesaria para ser considerados máximos absolutos en su vecindad y no son detectados.

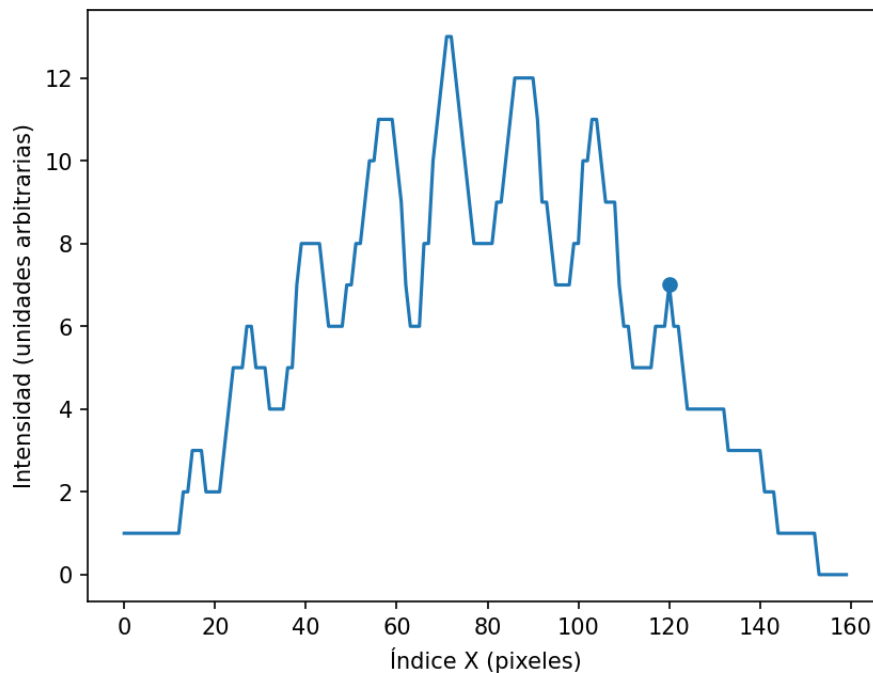


Figura 3.3: Máximos encontrados por *Faraday 1.1* en el perfil del patrón de ondas.

Para subsanar lo anterior, en lugar de tener una condición de menor estricta para el filtrado de puntos ($i < i - 1$ y $i < i + 1$) y mayor estricta para la localización de máximos ($i > i - 1$ y $i > i + 1$), se impone una condición de menor o igual ($i - 1 \leq i$ y

$i + 1 \leq i$) y de mayor o igual ($i \geq i - 1$ y $i \geq i + 1$), respectivamente. Es decir, ahora se pueden eliminar puntos en una vecindad de puntos que tienen el mismo valor en el filtrado y, además, se pueden localizar puntos máximos en una cresta (vecindad de puntos máximos con valores a primeros vecinos repetidos).

Con estas mejoras, el algoritmo localiza y cuenta dos puntos en una cresta que cumplen tal condición, los extremos de la misma. Sin embargo, de acuerdo a las Figuras 3.1 y 3.2, una cresta solo representa una franja, por tanto el algoritmo debe contarle como tal. Para ello, se impone una condición más, del par de puntos de la vecindad máxima que cumplen las condiciones establecidas, solo se toma en consideración uno de ellos. Después de adicionar las mejoras mencionadas a *Faraday 1.1* se obtiene un nuevo algoritmo que se denominará *Faraday 1.2*. Cuando aplicamos el algoritmo al perfil de la Figura 3.2, utilizando dos procesos de filtrado, este encuentra un total de 7 máximos lo que coincide con los máximos más intensos observados a simple vista, véase Figura 3.4. No obstante, no consigue detectar los máximos ubicados en los extremos, los cuales, al tener una intensidad menor, son excluidos en el procedimiento de filtrado del algoritmo.

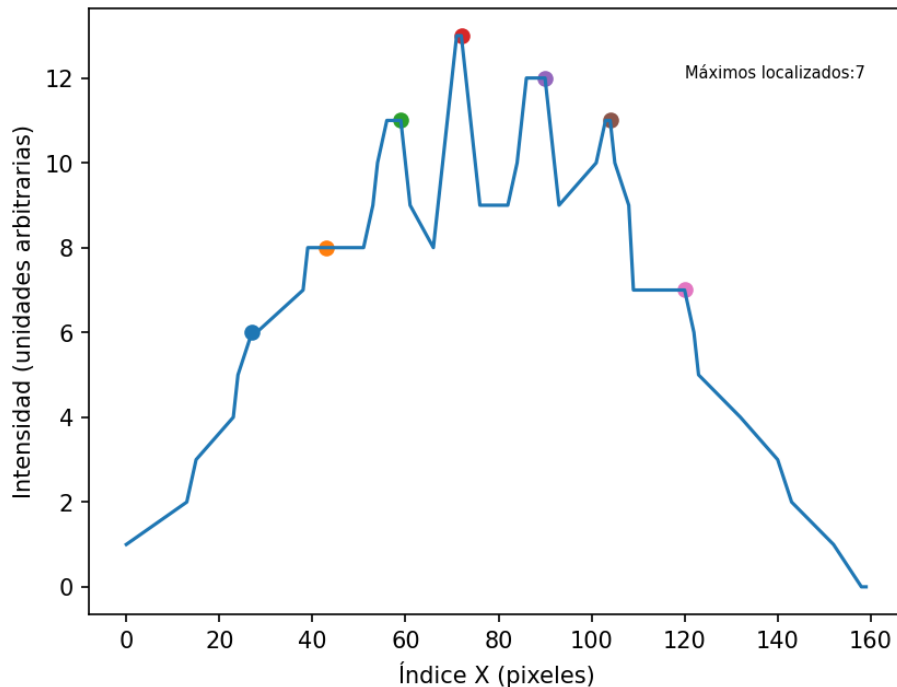


Figura 3.4: Perfil del patrón de ondas de Faraday y máximos encontrados al aplicar *Faraday 1.2* con dos procesos de filtrado.

```

1  """FARADAY 1.2: CUENTA FRANJAS EN IMAGENES DE ONDAS DE FARADAY
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM"""
3
4  # Librerías Python
5  import numpy as np
6
7  # imagen: formato numpy.ndarray
8  # n: número de procesos de filtrados
9  # s: parámetro para filtrar máximos repetidos de una misma franja
10 # fi,ff,ci,cf : Delimitación de imagen (fila inicial, fila final, columna inicial, columna final)
11
12 def Nfranjas(imagen,fi,ff,ci,cf,n,s):
13
14     # Crea el perfil de Faraday a partir de la imagen
15     sumOfColumns = np.sum(imagen[fi:ff,ci:cf], axis=0)
16     xlistCNI = np.arange(len(sumOfColumns)) # No es necesario usar linspace si solo necesitas una secuencia de enteros
17     perfil_faraday = np.vstack((xlistCNI, sumOfColumns.astype(int)))
18
19     #Filtrado para eliminar puntos repetidos
20     for _ in range(1):
21         Hrep = []
22         for i in range(1, perfil_faraday.shape[1] - 1):
23             if ((perfil_faraday[1, i] == perfil_faraday[1, i - 1]) and (perfil_faraday[1, i] == perfil_faraday[1, i +
24                 1])):
25                 Hrep.append(i)
26                 perfil_faraday = np.delete(perfil_faraday, Hrep, axis=1)
27
28     #Filtrado para suavizar el perfil
29     for _ in range(n):
30         Hmin = []
31         for i in range(1, perfil_faraday.shape[1] - 1):
32             if ((perfil_faraday[1, i] <= perfil_faraday[1, i - 1]) and (perfil_faraday[1, i] <= perfil_faraday[1, i +
33                 1])):
34                 Hmin.append(i)
35                 perfil_faraday = np.delete(perfil_faraday, Hmin, axis=1)
36
37     # Encuentra los valores máximos dentro del perfil
38     Hmax = []
39     for i in range(1, perfil_faraday.shape[1] - 1):
40         if ((perfil_faraday[1, i] >= perfil_faraday[1, i - 1]) and (perfil_faraday[1, i] >= perfil_faraday[1, i + 1])):
41             Hmax.append(i)
42     Hmax = perfil_faraday[:, Hmax]
43
44     #Elimina máximos repetidos por proximidad (pertenecen a la misma franja)
45     Hmax_repetidos = np.where(Hmax[1][:-1] == Hmax[1][1:])[0]
46     diferencia = np.abs(Hmax[0][Hmax_repetidos] - Hmax[0][Hmax_repetidos + 1])
47     indices_filtrados = Hmax_repetidos[diferencia <= s]
48     Hmax_unicos = np.delete(Hmax, indices_filtrados + 1, axis=1)
49     print('El número de máximos encontrados es:', Hmax_unicos.shape[1])

```

Es evidente que este perfil de ondas de Faraday, generado a partir de imágenes reales, se ve más afectado por el proceso de filtrado que el perfil simulado en el capítulo anterior, como se ilustra en la Figura 3.5. Esto se debe a que las imágenes reales tienen una baja resolución, lo que significa que están “pixeladas”. La Figura 3.1 consta de 160 píxeles de longitud, que son equivalentes a la cantidad de puntos utilizados para generar su perfil. En contraste, los perfiles simulados generados con 1000 puntos dan la impresión de ser curvas casi continuas. Según lo representado en la Figura 2.6, a medida que aumenta la definición de una imagen simulada, esta puede soportar un mayor número de procesos de filtrado.

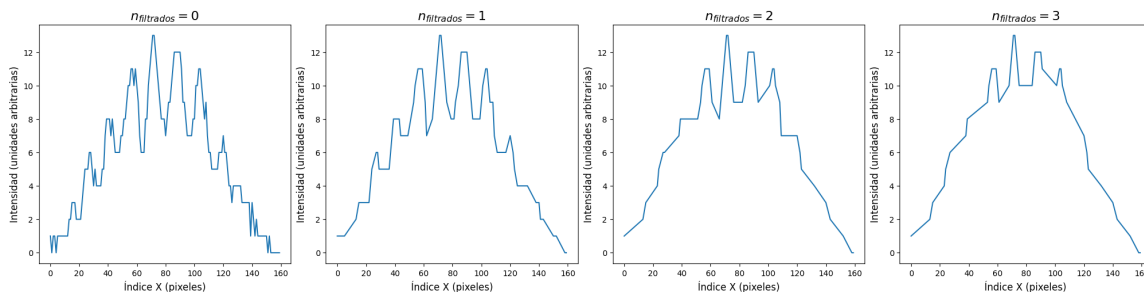


Figura 3.5: Perfil del patrón de ondas de Faraday para diferente número de procesos de filtrado.

Una baja resolución de la imagen resulta en perfiles que son altamente sensibles al proceso de filtrado, lo que aumenta el riesgo de eliminar máximos de interés y, en última instancia, disminuye la eficacia de la localización y el recuento de las franjas presentes en la imagen. Por ejemplo, al aplicar tres procesos de filtrado, el algoritmo elimina tres máximos de intensidad considerable al considerarlos ruido, lo que resulta en un recuento final de solo cuatro máximos, véase Figura 3.6.

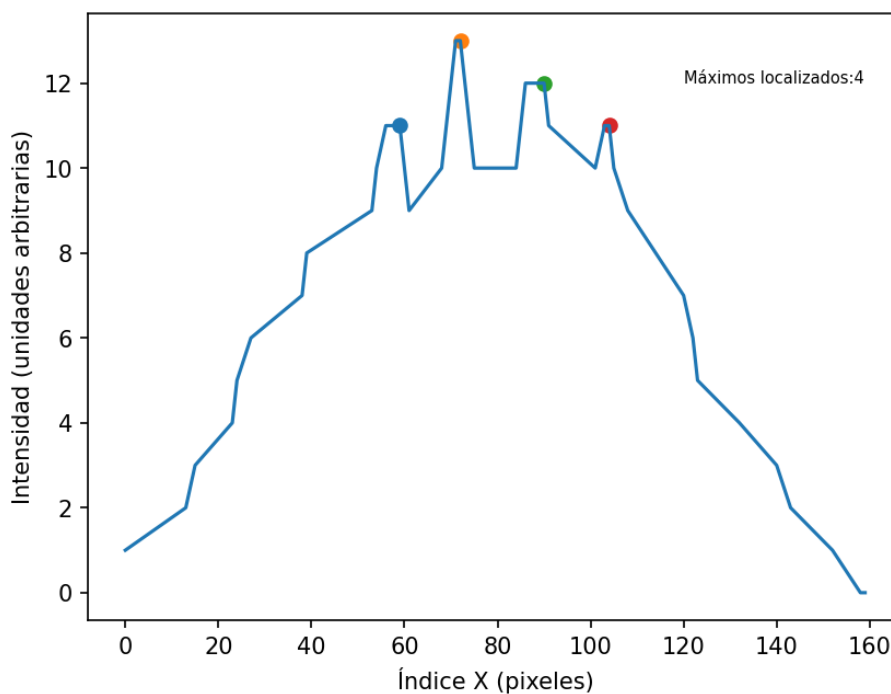


Figura 3.6: Perfil del patrón de ondas de Faraday y máximos encontrados al aplicar *Faraday 1.2* con tres procesos de filtrado.

En la Figura 3.7 se lleva a cabo una parametrización del filtrado de la imagen donde se puede apreciar claramente la variación del número de máximos localizados por

Faraday 1.2 en función del número de procesos aplicados al perfil original. El número de máximos se reduce drásticamente en los dos primeros procesos de filtrado para después hacerlo de forma más gradual hasta llegar a un valor constante después de seis procesos de filtrado. Nótese que tal gráfica tiene similitud con la gráfica color rojo de la Figura 2.6, la cual es un perfil de Faraday simulado con 800 puntos. Esto nos indica que tal perfil de Faraday simulado es el que mejor representa al perfil de Faraday de las imágenes generadas de los patrones de ondas de Faraday en el LMU.

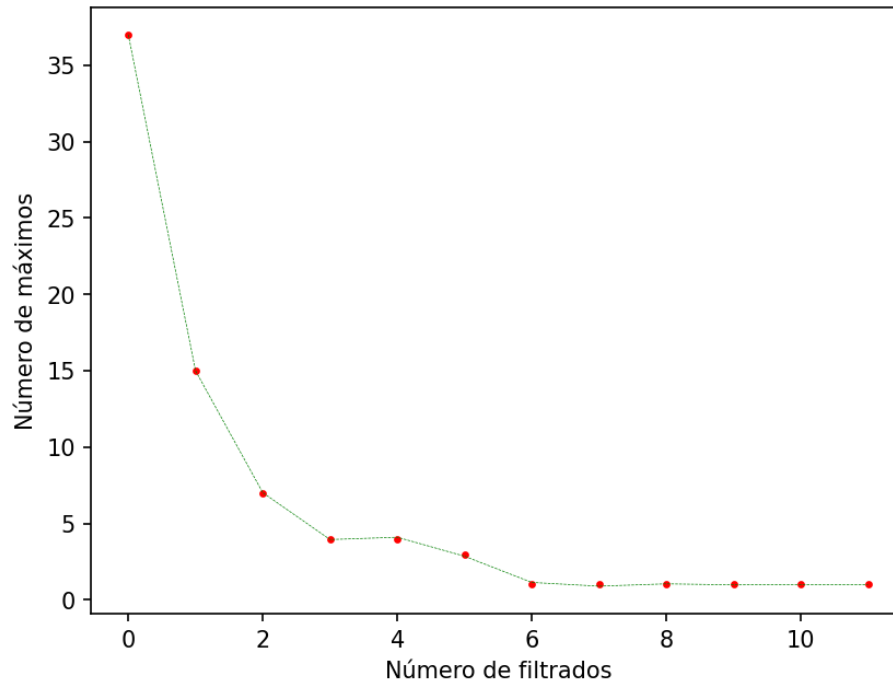


Figura 3.7: Número de máximos encontrados por *Faraday 1.2* en función del número de procesos de filtrados aplicados al perfil de Faraday de la Figura 3.2.

Por experiencia, se ha notado que dos procesos de filtrado es el número óptimo para el conteo más eficaz de máximos en estas imágenes, después de ello el algoritmo suprime crestas que representan franjas legibles del patrón de ondas de Faraday. Con seis o más proceso de filtrados el algoritmo elimina todo el ruido e información relevante, quedándose con un máximo que representa la franja central de mayor intensidad.

En resumen, en esta sección se introduce *Faraday 1.2*, un nuevo algoritmo que, basado en la comparación a primeros vecinos, es capaz de filtrar, localizar y contar los máximos más intensos de perfiles generados a partir de imágenes reales que representan patrones de ondas de Faraday en un superfluido, obtenidas en el LMU. Con estas mejoras, se ha logrado desarrollar un algoritmo que es capaz de localizar y contar las

franjas en este tipo de excitaciones colectivas con una buena aproximación. Sin embargo, no es completamente eficaz en la localización y conteo del número de franjas. Por lo tanto, en la siguiente sección se explorará si los métodos de detección de *Blobs* a desarrollar también podrían utilizarse para localizar y contar franjas en imágenes reales de ondas de Faraday.

3.2. Blobs 1.1: Detección de vórtices cuantizados

Las imágenes de vórtices que se estudian en este trabajo nos fueron amablemente proporcionadas por el Dr. Giacomo Roati, líder del grupo Lithium Lab, del LENS & INO-CNR con sede en la Universidad de Florencia. Estas imágenes son de superfluidos que contienen en buena aproximación 6, 10 y 18 vórtices, véase Figura 3.8. Estos números son la cantidad de vórtices esperados en la región central del anillo, despreciando los que puede haber en los bordes, y tienen su dispersión de ± 2 vórtices.

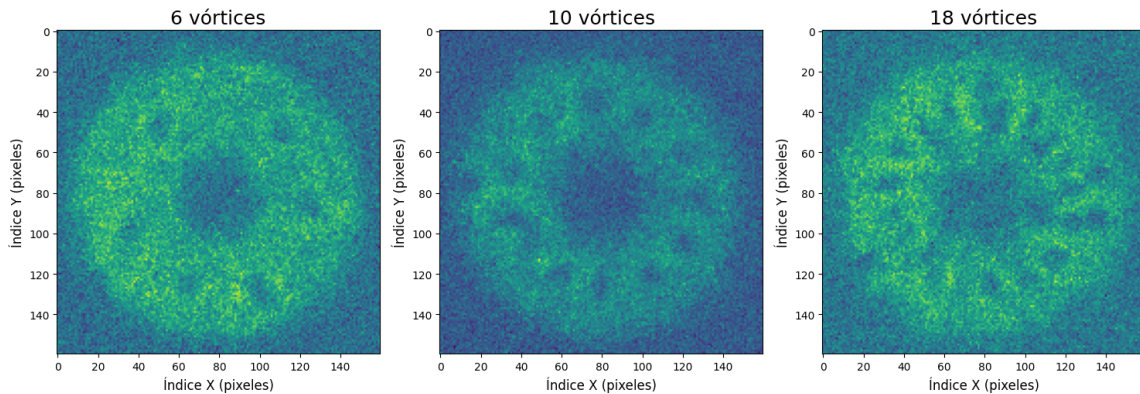


Figura 3.8: Imágenes de vórtices generados en un superfluido en una geometría generada por dos círculos concéntricos. Cortesía de *Lithium Lab*.

En la imagen de 6 vórtices, estos son claramente visibles, sus intensidades y geometrías son más uniformes y el conteo coincide con el número esperado. En el caso de la imagen con 10 vórtices, estos continúan siendo visibles, pero sus geometrías son menos uniformes entre sí, y su número estimado es mayor al previsto. Finalmente, para la imagen con 18 vórtices, es difícil distinguirlos de forma individual. Algunos están muy cerca de otros y dan la impresión de haberse combinado, y sus formas son irregulares.

A continuación, se empleará el algoritmo *Blobs 1.0* para intentar predecir el número de vórtices en la imagen más simple de la Figura 3.8, que corresponde al superfluido con la presencia de 6 vórtices. El algoritmo ofrece dos métodos, *LoG* y *DoG*.

Primeramente, se normaliza el valor de los píxeles entre 0 y 1, lo cual permite hacer una inversión de intensidad en la imagen, logrando así vórtices brillantes en lugar de regiones oscuras. Lo anterior se lleva a cabo debido a que *Blobs 1.0* está mejor capacitado para detectar las regiones brillantes en la imagen. Se utiliza el método de normalización lineal por su simplicidad y se lleva a cabo en función de la siguiente ecuación

$$X_{norm} = \frac{X - X_{min}}{X_{max} - X_{min}} \quad (3.1)$$

Donde X_{norm} es el valor del píxel normalizado, X el valor de cada píxel original, X_{min} y X_{max} los valores máximo y mínimo de los píxeles de la imagen, respectivamente. Posteriormente, la imagen se invierte píxel por píxel donde el valor del píxel invertido se obtiene mediante la siguiente expresión $X_{inv} = 1 - X_{norm}$. En la Figura 3.9 se puede apreciar él antes y después de llevar a cabo el proceso de inversión de intensidad. Las regiones brillantes ahora son oscuras y viceversa.

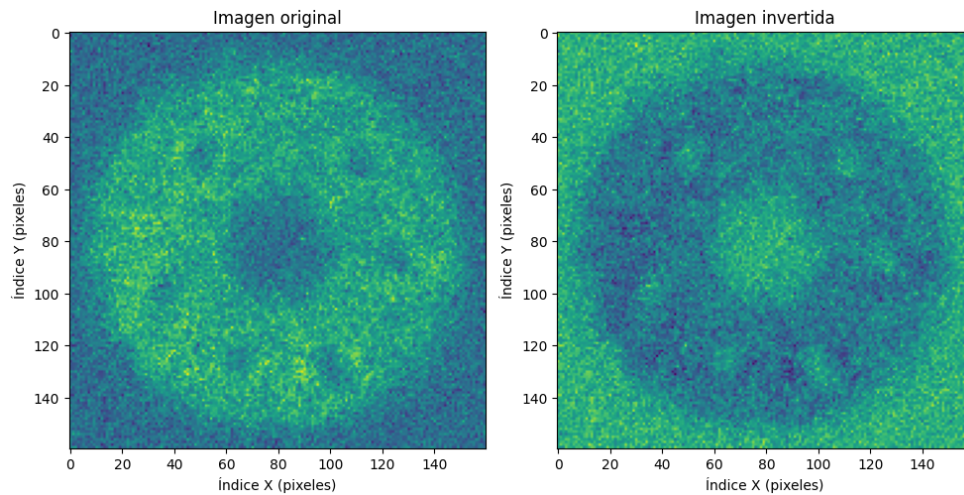


Figura 3.9: Imagen original e invertida con presencia de 6 vórtices.

Ahora bien, al aplicar *Blobs 1.0* a la imagen invertida que contiene 6 vórtices, podemos localizar y contar el número de vórtices, que se representan como regiones circulares brillantes. El resultado se muestra en la Figura 3.10, y es evidente que el algoritmo tiende a sobreestimar el número de vórtices. Incluso al ajustar sus parámetros, el algoritmo sigue presentando esta sobreestimación.

Tanto los métodos *LoG* como *DoG* se basan en la detección de cambios en la intensidad de los píxeles en relación con las regiones circundantes. Sin embargo, en imágenes

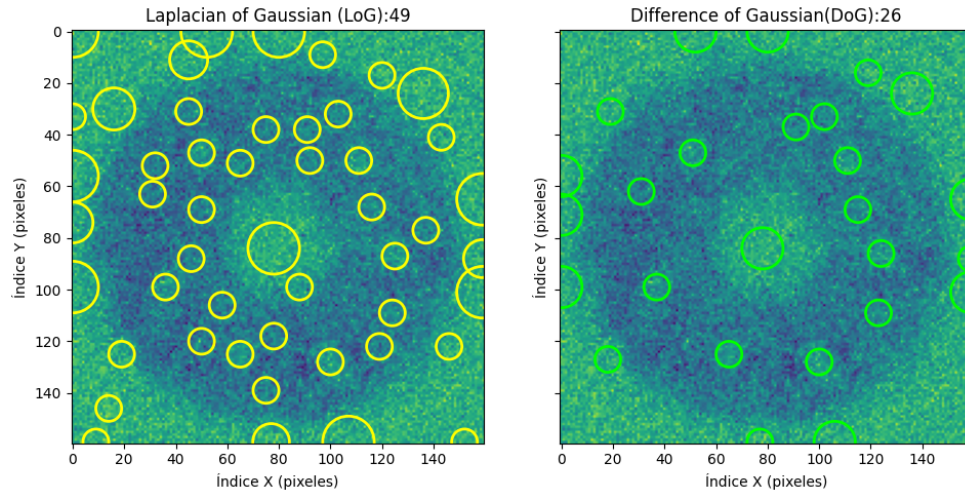


Figura 3.10: Localización y conteo de vórtices mediante *Blobs 1.0*. El método *LoG* es más sensible al ruido que el método *DoG*. Los parámetros asignados fueron $min_sigma = 5$, $max_sigma = 10$, $num_sigma = 20$ (*LoG*), $sigma_ratio = 1.6$ (*DoG*) y $threshold = 0.01$.

con un nivel significativo de ruido, esta característica puede representar una limitación, como en este caso. No obstante, es posible reducir el impacto del ruido mediante procesos de filtrado de Sauvola, véase Figura 3.11.

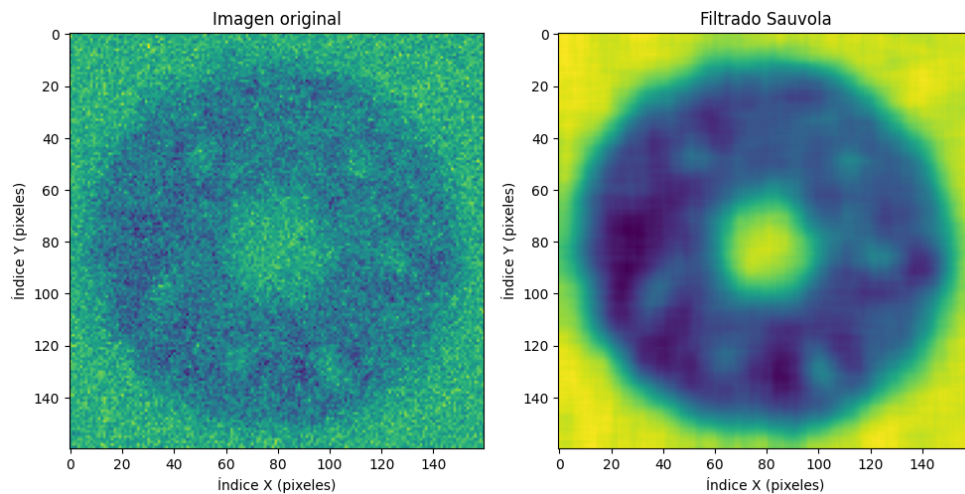


Figura 3.11: A la izquierda imagen de 6 vórtices con ruido moteado y la derecha técnica de umbral de Sauvola.

Ahora si, después de haber tratado con el ruido de la imagen original se procede a aplicar de nuevo *Blobs 1.0* ahora a la imagen resultante. Resulta que el algoritmo localiza correctamente los vórtices que se observan a simple vista en la Figura 3.9, estos son los 6 vórtices que se encuentran en la región circular azul. Sin embargo,

el algoritmo clasifica erróneamente como vórtices a la región circular central de la imagen, la cual se debe a la geometría de la trampa, así como a regiones en la periferia que son un efecto de los bordes de la imagen, véase Figura 3.12.

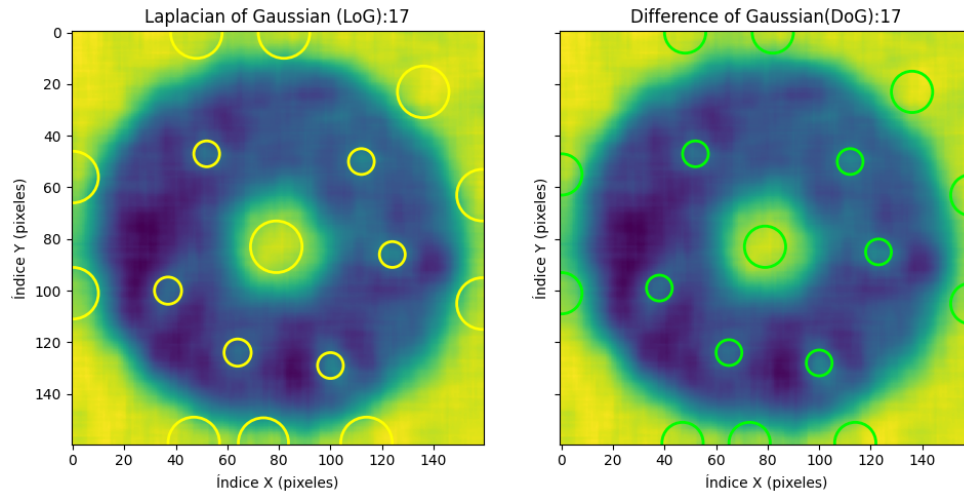


Figura 3.12: Localización y conteo de vórtices mediante *Blobs 1.0* después de aplicar la técnica de umbral de Sauvola a la imagen original.

Para abordar este inconveniente, se implementa una restricción en cuanto al tamaño de los vórtices. Se observa que el tamaño de los vórtices en la región circular azul es uniforme, y esta magnitud está relacionada con los parámetros del experimento y puede ser estimada. Siguiendo esta premisa y teniendo en cuenta el tamaño aproximado de los vórtices, se instruye al algoritmo para que localice y cuente únicamente aquellos vórtices cuyas dimensiones estén dentro de un rango adecuado para la configuración del experimento. En consecuencia, se introduce la restricción en *Blobs 1.0* de enfocarse en la detección y recuento de vórtices con tamaños comprendidos entre 3 y 7 píxeles. El tamaño será un nuevo parámetro que tendrá que indicarse al algoritmo de acuerdo a la configuración del experimento.

```

1  """BLOBS 1.1: CUENTA Y LOCALIZA VÓRTICES EN IMÁGENES
2  Laboratorio de Materia Ultrafría del Instituto de Física, UNAM
3  """
4  # Librerías Python
5  from skimage.feature import blob_dog, blob_log
6  from skimage.filters import threshold_sauvola
7  import numpy as np
8
9  # imagen: formato numpy.ndarray
10 # rmin: radio mínimo de los blobs, rmax: radio máximo de los blobs (acotan tamaño de vórtices)
11 # fi,ff,ci,cf : Delimitación de imagen (fila inicial, fila final, columna inicial, columna final)
12 # min_sigma: La desviación estándar mínima para el kernel gaussiano. Manténgala baja para detectar manchas más pequeñas.
13 # max_sigma: La desviación estándar máxima para el kernel gaussiano. Manténgalo alto para detectar manchas más grandes.
14 # num_sigma: El número de valores intermedios de desviaciones estándar a considerar entre min_sigma y max_sigma.

```



```

15 # sigma_ratio: La relación entre la desviación típica de los núcleos gaussianos
16 # threshold: El límite inferior absoluto para los máximos del espacio de escala.
17 # overlap: Nivel de solapamiento entre vórtices. Asignar 0.
18
19 def Blobs1punto1(imagen, fi, ff, ci, cf, rmin, rmax, min_sigma, max_sigma, num_sigma, sigma_ratio, threshold, overlap):
20
21     # Normaliza la imagen en valores entre 0 y 1
22     imagen = imagen[fi:ff, ci:cf]
23     B_min = np.min(imagen)
24     B_max = np.max(imagen)
25     B_scaled = (imagen - B_min) / (B_max - B_min)
26
27     # Aplica filtro Sauvola
28     thresh_sauvola = threshold_sauvola(B_scaled)
29     image_gray = thresh_sauvola
30     gray_inverted = 1 - image_gray
31
32     # Blobs se encuentran utilizando el método del Laplaciano de Gaussianas (LoG)
33     blobs_log = blob_log(gray_inverted, min_sigma, max_sigma, num_sigma, threshold, overlap,
34                          log_scale=False, threshold_rel=None, exclude_border=False)
35     blobs_log = np.array([x for x in blobs_log if rmin <= x[2] <= rmax])
36
37     # Blobs se encuentran utilizando el método del Diferencia de Gaussianas (LoG)
38     blobs_dog = blob_dog(gray_inverted, min_sigma, max_sigma, sigma_ratio, threshold, threshold_rel=None,
39                          exclude_border=False)
40     blobs_dog = np.array([x for x in blobs_dog if rmin <= x[2] <= rmax])
41
42     # Crear listas de los Blobs encontrados por los 2 métodos
43     blobs_list = [blobs_log, blobs_dog]
44     blobs_len_list = [len(blobs_log), len(blobs_dog)]
45
46     print('Número de vórtices con método LoG:', len(blobs_log))
47     print('Número de vórtices con método DoG:', len(blobs_dog))

```

Después de aplicar la normalización e inversión de intensidad en la imagen, la técnica de umbral de Sauvola y restringir el tamaño de los vórtices se obtiene un nuevo algoritmo que se denomina *Blobs 1.1*. Este algoritmo localiza y cuenta el correcto número de vórtices, véase Figura 3.13.

En imágenes con 10 vórtices *Blobs 1.1* localiza y cuenta 11 vórtices con ambos métodos (*LoG* y *DoG*), el algoritmo hace el cómputo correcto, ya que cae dentro del rango de 10 ± 2 vórtices. Sin embargo, para el caso de 18 vórtices *Blobs 1.1* localiza y cuenta solo 13 de ellos con los métodos *LoG* y *DoG*, véase Figura 3.13. El algoritmo no logra identificar 5 de los vórtices que supuestamente están presentes en esta imagen. No obstante, a simple vista tampoco es claro el número de vórtices individuales presentes.

Blobs 1.1 tiene una buena predicción de 6, 11 y 13 vórtices, con tiempos de cómputo de 0.15 s, 0.08 s y 0.1 s para el método *LoG*, respectivamente. En cuanto al método *DoG*, los tiempos de cómputo son de 0.07 s, 0.01 s y 0.2 s para las mismas imágenes, respectivamente. En todos los casos, el método *DoG* claramente muestra tiempos de cálculo más eficientes. Aunque se puede ajustar el parámetro *num_sigma* en cada imagen para optimizar el tiempo de procesamiento del método *LoG*, se ha seleccionado un valor que ofrece el mejor rendimiento para los tres casos en este escenario.

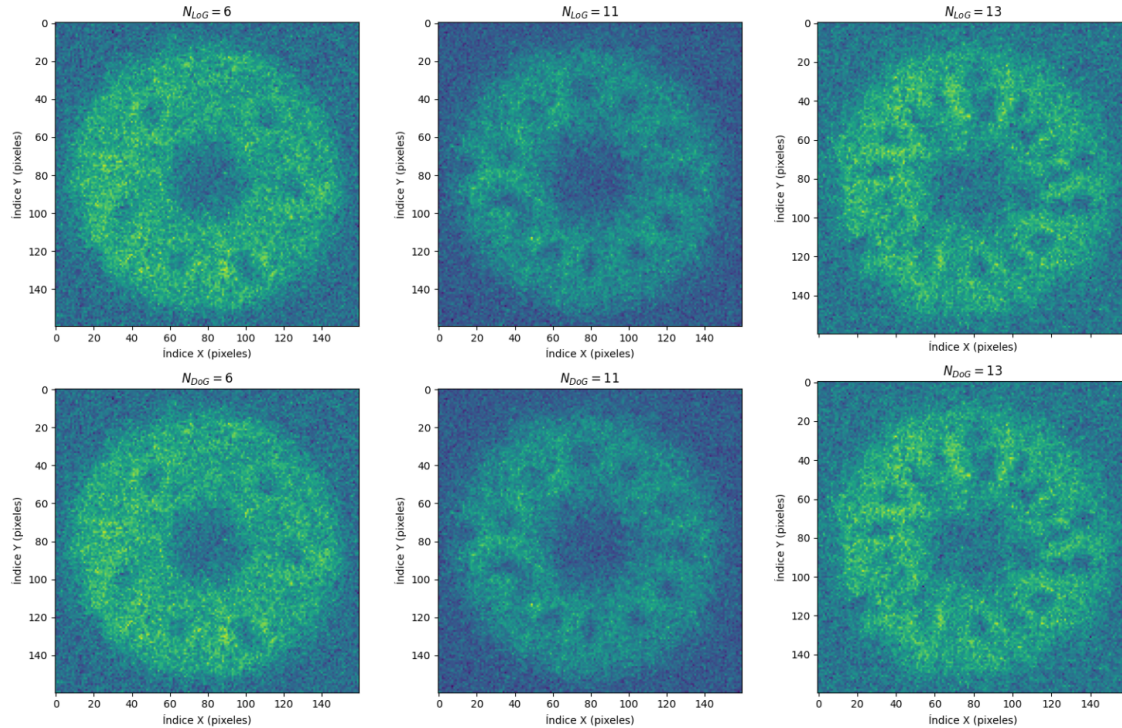


Figura 3.13: Localización y conteo de vórtices mediante *Blobs 1.1* para imágenes clasificadas como de 6, 10 y 18 vórtices.

Lo que hace *Blobs 1.1* es identificar las regiones que cumplen con características de vórtices de acuerdo a la técnica de detección de *Blobs*, que se basa en utilizar filtros (o *kernels*) en relación con las funciones *LoG* y *DoG*. Las regiones que no encajan con estas máscaras no son tomadas en cuenta. Cuando las regiones son circulares y uniformes son detectadas sin problema. En cambio, cuando estas regiones tienen forma irregular y heterogénea al algoritmo las omite. Este escenario se da en este caso, donde algunas regiones tienen geometrías irregulares y difieren entre sí. Por lo tanto, *Blobs 1.1* se limita a localizar vórtices individuales que tengan una forma más regular, en particular una forma circular y un brillo uniforme.

El algoritmo localiza y cuenta correctamente las regiones que tienen más similitud con lo que pudiera ser un vórtice individual estable. No obstante, no logra identificar los vórtices inestables, por ejemplo, cuando dos de ellos interfieren y forman una sola región alargada e irregular. Solucionar este problema queda por ahora como parte de las perspectivas futuras que este trabajo ofrece.

Algo interesante que se observó con los algoritmos desarrollados en esta sección para el conteo de vórtices, *Blobs 1.0* y *Blobs 1.1*, es que al utilizarlos en una imagen de

ondas de Faraday estos también detectan y cuentan el número de franjas presentes en dicho patrón, véase Figura 3.14. Por tanto, se cuenta con un método con la capacidad de detectar las excitaciones colectivas de interés para este trabajo. Ambos, franjas y vórtices, desde la perspectiva de visión por computadora se manifiestan como *Blobs* en la imagen.

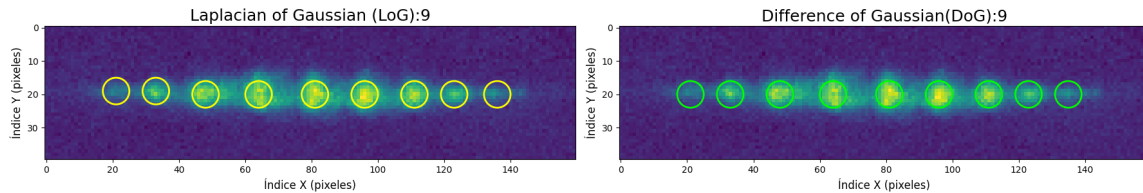


Figura 3.14: Detección y conteo de franjas utilizando *Blob 1.0* en un patrón de ondas de Faraday. Los parámetros asignados fueron $min_sigma = 3$, $max_sigma = 10$, $sigma_ratio = 1.6(DoG)$, $threshold = 0.15(LoG)$ y $threshold = 0.15(DoG)$.

En resumen, en este capítulo se ha logrado desarrollar algoritmos capaces para identificar y contar de manera eficaz y eficiente franjas y vórtices presentes en imágenes reales de excitaciones colectivas de un superfluido. Estos algoritmos presentan limitaciones para excitaciones poco estables donde la geometría y distribución de franjas ó vórtices se difumina, que incluso es difícil para el ojo humano detectar estas regiones de interés. El estudio de imágenes con las dificultades antes mencionadas queda fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, una línea prometedora e interesante a seguir en futuros trabajos podría ser el uso de Inteligencia Artificial (IA) para el análisis de excitaciones colectivas inestables. En concreto, recientemente se ha desarrollado un detector de vórtices cuantizados mediante aprendizaje profundo que puede localizar con precisión vórtices en tiempo real en configuraciones ruidosas y de no-equilibrio en imágenes de densidad de BEC simuladas. Esta red neuronal puede distinguir entre vórtices y antivórtices si también se dispone del perfil de fase del condensado [5].

Capítulo 4

Análisis de resultados

En este capítulo, se examinan las relaciones entre el número de franjas en un patrón de ondas de Faraday y diversas cantidades físicas como el vector de onda de Faraday, la energía de Floquet, el radio de Fermi, entre otras. También se realiza un análisis estadístico del número de vórtices cuantizados en las imágenes y se investiga la probabilidad de su distribución en diferentes regiones circulares.

4.1. Patrones de ondas de Faraday

La ecuación (1.8) permite conocer el número de franjas en un patrón de ondas de Faraday presente en un BEC en función de las frecuencias de la trampa armónica (ω_r y ω_z), su frecuencia de excitación (Ω) y el parámetro γ . Para un gas ultrafrío de Bose $\gamma = 1$ en buena aproximación.

Variable	Valor
L_{px}^{imagen}	0.7903 μm
ω_r	$2\pi \times 163$ Hz
ω_z	$2\pi \times 11$ Hz
Ω	$2\pi \times 326$ Hz
N	$\approx (5 - 10) \times 10^3$ pares

Tabla 4.1: Valores experimentales para generar ondas de Faraday en el LMU.

Basándonos en los parámetros de la Tabla 4.1 se hace el cálculo del número de franjas en el patrón de Faraday generado en el LMU. Recordando que $\lambda = \omega_z/\omega_r$. Además se cumple $\Omega = 2\omega_r$, es decir, que la frecuencia de excitación es dos veces que la frecuencia

radial de la trampa que confina al condensado, condición para que el patrón de ondas de Faraday sea generado. Tomando en cuenta lo anterior para $\gamma = 1$, la ecuación (1.8) se reduce a una forma muy simple que se expresa en la ecuación (4.1).

$$N_{fr} = \frac{2\omega_r}{\pi\omega_z} = \frac{2 \cdot 2\pi \times 163Hz}{\pi \cdot 2\pi \times 11Hz} = 9.43 \quad (4.1)$$

Aproximando el resultado al entero más cercano, obtenemos que $N_{fr} = 9$ franjas. Este resultado concuerda con la predicción proporcionada por *Blobs 1.1* en la Figura 3.14, la cual es una imagen de ondas de Faraday generada en el LMU utilizando los mismos parámetros considerados en el cálculo.

Nótese, que de acuerdo a la ecuación (4.1), cuando se cumple la condición $\Omega = 2\omega_r$, el número de franjas depende únicamente de la relación existente entre ω_r y ω_z en gases ultrafríos de Bose ($\gamma = 1$).

De manera inversa, si conocemos el número de franjas y queremos calcular γ para el superfluido en que está inmerso el patrón de ondas de Faraday se puede utilizar la misma ecuación (1.8), al reacomodar términos se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} = \left(\frac{N_{fr}\pi\omega_z}{2\omega_r} \right)^2 \quad (4.2)$$

Para un conjunto de 9 franjas, según las estimaciones de *Blobs 1.1*, la ecuación (4.2) se satisface cuando $\gamma = 1.1$. Esto proporciona una metodología para determinar el valor de γ en relación con el número de franjas, lo que facilita la caracterización del superfluido. En la aproximación de campo medio para un BEC, el potencial químico μ se relaciona con la densidad n como $\mu(n) = gn$ [100]. En este caso, $\gamma = 1$, un valor muy cercano al $\gamma = 1.1$ obtenido empíricamente. Esto sugiere que la constante C está relacionada con el parámetro de interacción g , lo que nos hace intuir que la ecuación de estado para el sistema superfluido de 9 franjas es $\mu(n) = gn^{1.1}$.

En resumen, al conocer el número de franjas, podemos acceder a la variación del potencial químico en función de la densidad del condensado. Este enfoque nos proporciona información valiosa sobre la física subyacente en el sistema en cuestión, permitiéndonos comprender mejor las propiedades del superfluido.

Ahora nos disponemos a examinar la distribución de las franjas en el patrón de ondas de Faraday, como se muestra en la Figura 4.1. Es evidente a simple vista que hay 9

franjas distribuidas a lo largo de una longitud de aproximadamente $d = 195 \mu m$. Por lo tanto, la distancia entre estas franjas puede aproximarse satisfactoriamente como $\lambda = d/(N_{fr} - 1) = 24.37 \mu m$.

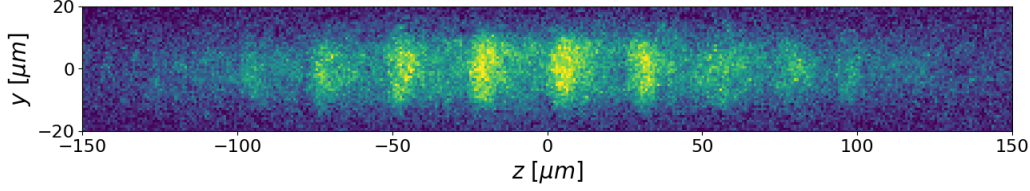


Figura 4.1: Patrón de ondas de Faraday con 9 franjas generado con $B = 690 G$.

Utilizando la relación $k = 2\pi/\lambda$, podemos determinar el valor del vector de onda de Faraday k_{FW} de la siguiente manera: $k_{FW} = 2\pi/25 \mu m$. Con este cálculo, obtenemos $k_{FW} = 0.2513 \mu m^{-1}$. Generalizando el concepto anterior se puede acceder al vector de Faraday para las diferentes n excitaciones de Faraday. Los valores de $K_{FW}^{(n)}$ para $n \geq 1$ son múltiplos k_{FW} . Estos valores guardan la siguiente relación $K_{FW}^{(n)} = \pm n k_{FW}$.

A través de *Blobs 1.1*, se pueden obtener las coordenadas de las franjas, lo que nos permite realizar un cálculo más preciso de λ . Se tiene que $\lambda = [(x_f - x_i) \times P / (N_{fr} - 1)]$. Donde x_f y x_i representan la primera componente de las coordenadas de la última y primera franja, respectivamente, en píxeles. P es el tamaño de cada píxel, y N_{fr} es el número de franjas en ese intervalo.

Según *Blobs 1.1* al analizar la Figura 4.2, se obtiene que $x_f = 354$ y $x_i = 111$. En el caso de esta imagen, los valores son $P = 0.8 \mu m/pixel$ y $N_{fr} = 9$. Con estos datos, se calcula que $\lambda = 24.3 \mu m$ y $k_{FW} = 0.2585 \mu m^{-1}$, valor similar al obtenido previamente.

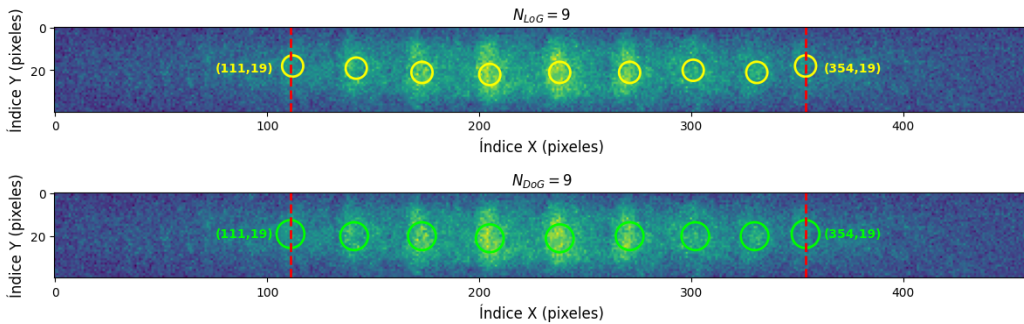


Figura 4.2: Posiciones de la primera y última franja obtenidas mediante *Blobs 1.1*.

Ahora, exploraremos un método adicional utilizando la Transformada de Fourier (TF) de la distribución espacial del patrón de ondas de Faraday. La transformada nos

proporcionará la frecuencia espacial, que representa el vector de onda de Faraday k_{FW} . Para llevar a cabo este proceso, utilizaremos `fft.fft2` de `NumPy`. Esta función calcula la TF discreta bidimensional de la imagen de interés.

En la Figura 4.3 se presenta la TF del patrón de ondas de la Figura 4.1. A partir de esto, es posible determinar el vector de Faraday para las diferentes excitaciones n . Se observa que $k_{FW}^{(1)} = \pm 0.25 \mu m^{-1}$, $k_{FW}^{(2)} = \pm 0.50 \mu m^{-1}$, y aunque no es visible, se infiere que $k_{FW}^{(3)} = \pm 0.75 \mu m^{-1}$. Estos valores concuerdan con la relación previamente obtenida $k_{FW}^{(n)} = \pm n k_{FW}$, donde en este caso $k_{FW} = 0.25 \mu m^{-1}$, una aproximación cercana a los valores antes obtenidos.

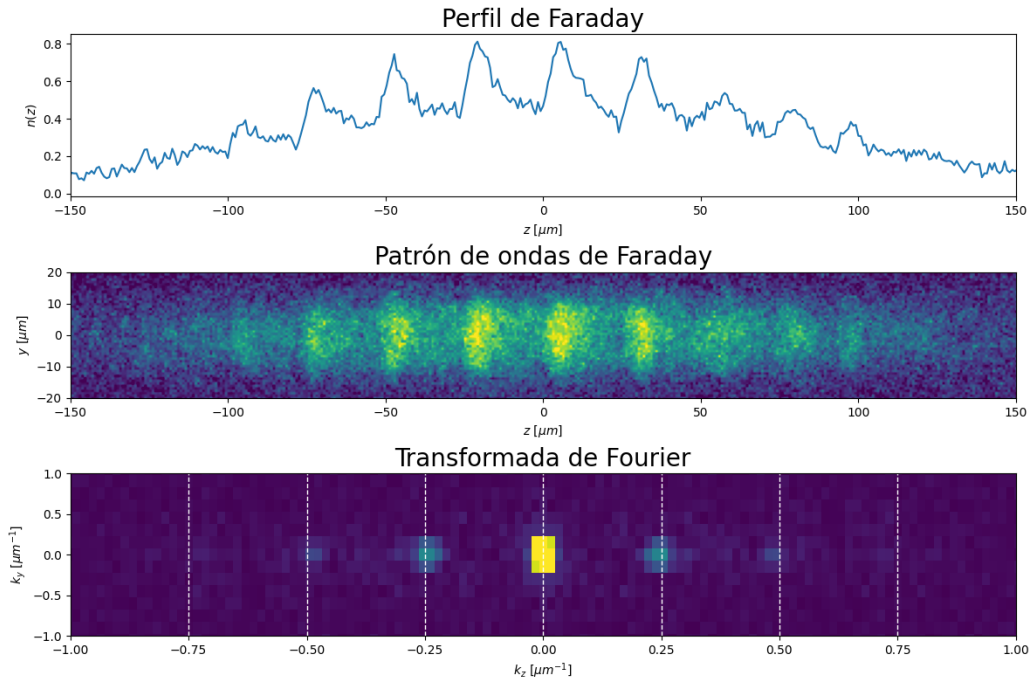


Figura 4.3: Transformada de Fourier de patrón de ondas de Faraday con 9 franjas.

Se destaca otra relación significativa, la ecuación (1.7), desarrollada por investigadores del LMU. Esta ecuación establece una conexión entre el vector de onda de Faraday $k_{FW}^{(n)}$ para cada uno de los modos de excitación (n), la frecuencia de excitación Ω y la energía de Floquet (E_{Floq}).

$$k_{FW}^{(n)} = \pm \sqrt{\frac{ME_{Floq}}{\hbar^2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{n\hbar\Omega}{E_{Floq}}\right)^2}}$$

Para obtener la ecuación (1.7) se asumió $V(\vec{r}, t) + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = E_{Floq}$ al resolver la

GPE. Donde $g = \frac{4\pi^2 a_M}{M}$ es el parámetro de interacción y la energía potencial está dada por $V(\vec{r}, t) = \frac{M}{2} [\omega_r(t)r^2 + \omega_z^2 z^2]$, con $\omega_r(t) = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha \sin(\Omega t)}$.

Nótese que a partir de tal condición podemos obtener E_{Floq} de diferentes maneras. Al evaluar la ecuación de balance en $z = 0$, $r = R$, y $t = 0$, obtenemos

$$E_{Floq} = \frac{M\omega^2 R^2}{2} \quad (4.3)$$

Asimismo, al evaluar la condición de balance en el centro de la trampa ($z = 0$) en el instante $t = 0$, se deduce que $E_{Floq} = gn$. En esta expresión, $n = |\Psi_{Floq}(0)|^2$ representa la densidad del condensado en el centro de la trampa.

Los parámetros Ω y ω_r son conocidos. Por lo tanto, al tener información sobre $k_{FW}^{(n)}$ podemos determinar E_{Floq} y, por ende, el radio de Fermi R . Además, g se puede calcular con los parámetros del experimento lo cual permite obtener la densidad n .

Inversamente, si tenemos información sobre n o R , podemos calcular E_{Floq} y, por consiguiente, $k_{FW}^{(n)}$ para los distintos modos de excitación. Sin embargo, obtener valores precisos de n o R no es tarea sencilla.

Procedamos a los cálculos. Se tiene que para un par molecular de átomos de ${}^6\text{Li}$ $M = 1.9939 \times 10^{-26} \text{ kg}$. Los parámetros de la trampa son: $\omega_r = 2\pi \times 163 \text{ s}^{-1}$ y $\Omega = 2\pi \times 326 \text{ s}^{-1}$. La constante de Planck $\hbar = 1.0545718 \times 10^{-34} \text{ Js}$.

Para el modo de excitación $n = 1$, al resolver la ecuación (1.7) con $k_{FW}^{(1)} = 0.25 \mu\text{m}^{-1}$, se obtiene $E_{Floq} = 6.52 \times 10^{-31} \text{ J}$. Despejando la ecuación (4.3), se determina que el radio de Fermi es $R = 7.9 \mu\text{m}$.

Otra estrategia rápida para determinar el radio de Fermi implica calcular el espesor en el centro de la nube condensada a lo largo del eje y antes de la excitación, como se ilustra en la Figura 4.4. El radio de Fermi es simplemente la mitad de este espesor. A primera vista, se estima que el espesor de la nube es aproximadamente $20 \mu\text{m}$, lo que implicaría que $R = 10 \mu\text{m}$. Este valor se sitúa en el mismo orden de magnitud que el resultado obtenido con la ecuación (1.7), que es $R = 7.9 \mu\text{m}$. ¿Por qué obtenemos un valor mayor con este último método? ¿Es simplemente un error visual? A continuación, exploraremos estas incógnitas.

La Figura 4.5 ilustra la variación de la densidad de la nube condensada en función de la coordenada Y . La curva azul en la figura se generó a partir de la densidad óptica de la imagen y muestra la tendencia de una parábola invertida con prolongaciones en

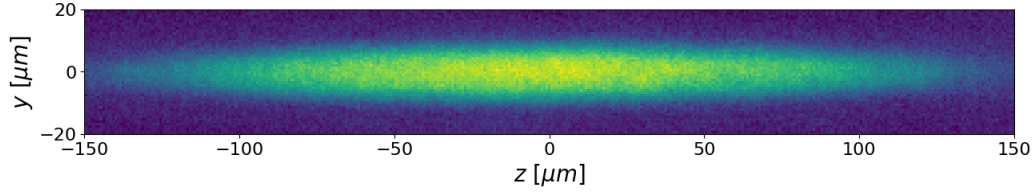


Figura 4.4: Nube condensada sin excitar para un campo magnético de 690 G.

los extremos. En contraste, la curva naranja se basa en la ecuación de balance que modela la densidad como $n(y) = \frac{E_{F10q}}{g} - \frac{M\omega_z^2 y^2}{2g}$, una función que adopta la forma de una parábola invertida ideal.

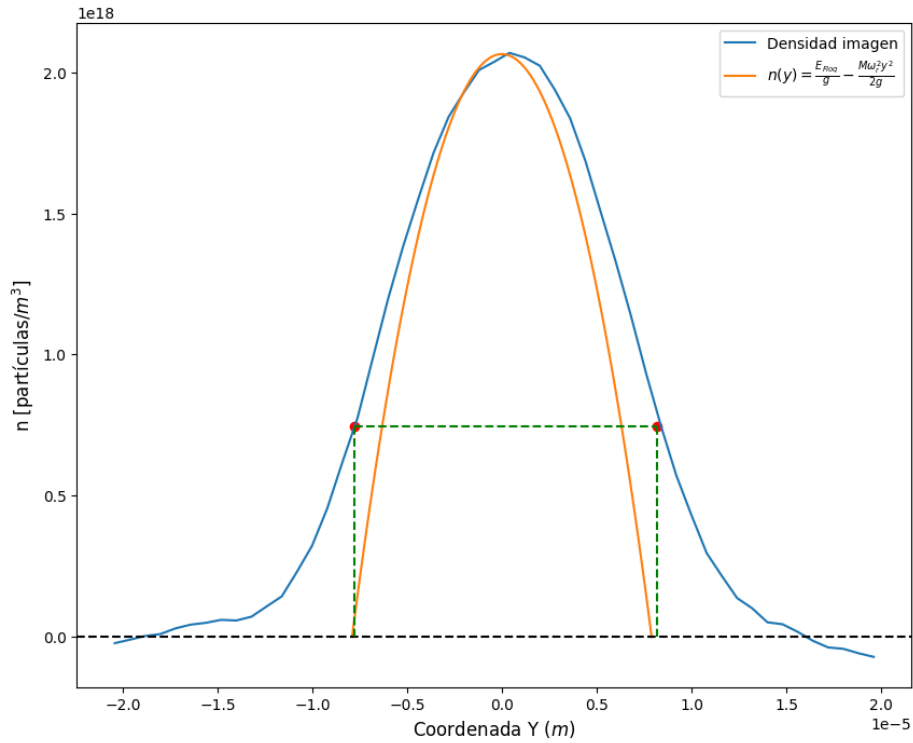


Figura 4.5: Densidades de la nube condensada obtenidas a partir de la densidad óptica y de la condición de balance.

La parábola corta el eje Y cuando la densidad n alcanza cero; esto sucede en los puntos $y_{\pm} \approx \pm 8 \mu m$. Estos puntos corresponden al valor del radio de Fermi, que tiene sentido físico cuando es positivo. Por lo tanto, la aproximación $R \approx 8 \mu m$ concuerda notablemente con el valor previamente obtenido. Esta aproximación gráfica mejora la comprensión del significado del radio de Fermi.

La discrepancia entre el radio de Fermi calculado a partir del espesor de la nube condensada en el centro y el obtenido mediante la condición de equilibrio ahora se

comprende mejor. Esta diferencia se atribuye al hecho de que la densidad óptica en la imagen, representada por la línea azul en la Figura 4.5, tiene una base más ancha que la función parabólica de nuestro modelo, conocida como aproximación de Thomas-Fermi, que describe de manera equivalente la densidad. Las extremos observados en el perfil de densidad probablemente se deben a moléculas no condensadas del gas ultrafrío. Esto ocurre porque la aproximación de Thomas-Fermi asume una temperatura ideal de $T = 0$ K, que es imposible de lograr en condiciones de laboratorio.

Como se mencionó anteriormente, a través de la energía de Floquet también podemos obtener información sobre la densidad de la nube en el centro de la trampa. En primer lugar, es necesario calcular el valor de g . Los parámetros del experimento incluyen la longitud de dispersión $a_0 = (1.42 \times 10^3)r_0$ (m), la longitud de dispersión molecular $a_M = 0.6a_0$, donde $r_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m es el radio de Bohr. Utilizando estos valores, se obtiene $g = 3.16 \times 10^{-49}$ m/kg . Con este resultado, la densidad en el centro de la trampa, $n(z = 0)$, se calcula como E_{Floq}/g , dando como resultado 2.06×10^{18} partículas/ m^3 y está acorde a las gráficas de la Figura 4.5. Este valor es equivalente a 2.06×10^{12} partículas/ cm^3 , lo cual resulta razonable en el contexto del experimento.

Dado que conocemos la densidad en el centro de la nube condensada (n), podemos calcular su *healing length* (ξ) mediante la expresión $\xi = \left(\frac{1}{8\pi n a_M}\right)^{1/2}$. Sustituyendo valores, obtenemos $\xi = 0.65$ μm , lo cual concuerda con las características típicas un BEC, donde ξ_{BEC} se encuentra en el orden de 1 μm .

Además, sabemos que la distancia interatómica se define como $l = n^{-1/3}$, lo que da como resultado $l = 0.77$ μm . Es notable observar que ξ y l son del mismo orden de magnitud. Esta coincidencia puede tener implicaciones significativas para las propiedades del sistema.

Como hemos examinado previamente en esta sección, comprender el número de franjas y su distribución nos brinda acceso a una amplia variedad de magnitudes físicas asociadas a las excitaciones fonónicas, específicamente las ondas de Faraday. Resulta asombroso cómo estas magnitudes están interrelacionadas. Aunque existen otras variables, como la velocidad de fase y la energía por partícula, a las que podríamos tener acceso, al explorar las magnitudes mencionadas, podemos apreciar la relevancia del desarrollo de algoritmos en el ámbito de los gases ultrafríos para el análisis de imágenes de este tipo.

4.2. Vórtices cuantizados y su distribución espacial

Teniendo conocimiento de la ubicación y la cantidad de vórtices presentes en cada una de las imágenes proporcionadas por *Lithium Lab* es posible realizar un análisis estadístico y probabilístico de su distribución espacial. Esto se puede hacer para los casos de 6, 10 y 18 vórtices a partir de un total de 65, 99 y 56 imágenes, respectivamente. Es decir, podemos determinar cantidades como la media, desviación estándar y mediana en función del número de vórtices cuantizados identificados en cada caso. Además, también es factible evaluar la probabilidad de que los vórtices aparezcan en regiones específicas de la imagen.

En primer lugar exploraremos algunas estadísticas. Calculamos la media de vórtices para conocer la tendencia central de cada conjunto de imágenes, la desviación estándar para medir en que medida el número de vórtices se desvía de la media y la mediana para conocer el valor medio. Para la obtención del número de vórtices empleamos nuestro algoritmo *Blobs 1.1*.

	Media	Desv. Est.	Mediana
6 vórtices	7.20	1.23	7.00
10 vórtices	11.04	1.35	11.00
18 vórtices	11.96	1.70	12.00

Tabla 4.2: Estadísticas del número de vórtices cuantizados en un conjunto de 65, 99 y 56 imágenes, con etiquetas de 6, 10 y 18 vórtices, respectivamente.

Como podemos notar en la Tabla 4.2 la media de vórtices para cada caso no corresponde con la cantidad de vórtices que se indican. Redondeando al entero positivo más cercano, se tiene que la media de vórtices es 7, 11 y 12 vórtices para las imágenes que se indican que tienen 6, 10 y 18 vórtices. Para 6 y 10 vórtices se tiene una diferencia mínima de un vórtice, sin embargo, para 18 vórtices la diferencia es de 6 vórtices.

Es evidente que la desviación estándar aumenta a medida que se incrementa el número de vórtices. En otras palabras, a medida que se analizan imágenes con más vórtices, la cantidad de estos se dispersa más respecto al valor central, que es la media. Esto nos proporciona información en diversos aspectos. En cuanto a la precisión del algoritmo, podría sugerir que a medida que el número de vórtices aumenta, la precisión de *Blobs 1.1* disminuye. Otra interpretación plausible es que este dato refleja el grado de control en el experimento. De esto se podría deducir que el incremento en el número de vórtices en un sistema superfluido lo torna más inestable, lo que complica mantener

una cantidad constante de vórtices. Además, este valor proporciona información sobre el rango donde es más probable encontrar el valor real del número de vórtices.

Respecto a estas cantidades estadísticas es todo lo que podemos inferir. A partir de este punto, y confiando en la predicción de nuestro algoritmo para determinar el número de vórtices individuales, denominaremos a las imágenes con 6, 10 y 18 vórtices utilizando el valor de la media, como imágenes con 7, 11 y 12 vórtices, respectivamente. Con esto, se busca realizar un análisis de probabilidad basado en la cantidad de vórtices que podemos contar. Sin embargo, es crucial tener en cuenta que el algoritmo enfrenta dificultades al detectar de manera precisa la presencia de dos o más vórtices cuando están muy cercanos entre sí.

Ahora vamos a explorar la distribución espacial de los vórtices calculando la probabilidad de encontrarlos en diferentes regiones. Para ello, dividimos la corona circular del superfluido, en la que se generan los vórtices, en tres regiones del mismo espesor como se observa en la Figura 4.6.

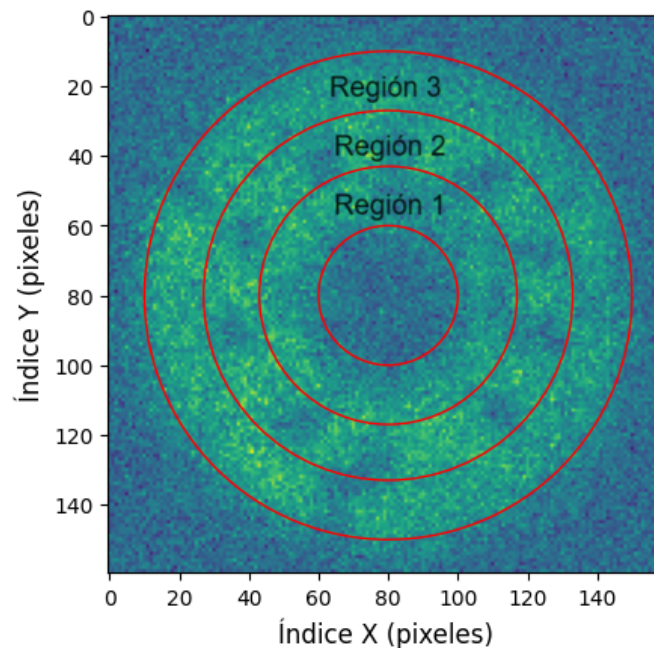


Figura 4.6: La trampa circular se divide en tres regiones del mismo espesor radial.

Se desea calcular la probabilidad de localizar un vórtice en cada una de las regiones mencionadas. Se cuenta con 65, 99 y 56 imágenes con una media de 7, 11 y 12 vórtices, respectivamente. Con esta información, se realiza el proceso de identificación y recuento de vórtices en las regiones de cada imagen. Posteriormente, se estiman las probabilidades. Los resultados se muestran en la Tabla 4.3.

	Región 1	Región 2	Región 3
7 vórtices	0.06	0.88	0.06
11 vórtices	0.06	0.86	0.08
12 vórtices	0.15	0.76	0.09

Tabla 4.3: Probabilidades de encontrar vórtices cuantizados en las diferentes regiones.

Se observa que las imágenes con 7, 11 y 12 vórtices tienen una mayor probabilidad de que estos se generen en la región 2. Incluso en el caso con la probabilidad más baja, que corresponde a las imágenes con 12 vórtices, tres de cada cuatro vórtices caen en la región 2. En las imágenes con 7 y 11 vórtices, aproximadamente 9 de cada 10 vórtices se generan en la región 2. Esto se debe a que la región 2 se encuentra en el punto central de la frontera original entre los dos anillos contra-rotantes, donde se manifiesta la inestabilidad Kelvin-Helmholtz y se generan los vórtices.

Las posibilidades de que se formen vórtices en las regiones 1 y 3 son bastante reducidas. No obstante, resulta intrigante observar que, en las imágenes con 12 vórtices, se percibe una ligera inclinación hacia la generación de vórtices en la región 1 en lugar de la región 3. ¿Cuál es la razón detrás de este fenómeno? ¿Se debe a una mayor interacción entre los vórtices, especialmente en el caso de 12 vórtices? ¿Tendrá que ver con los 6 vórtices que no estamos contando?

Blobs 1.1 localiza una media de 12 vórtices individuales, a pesar de que debería encontrar 18 de ellos. Esto se debe a que el algoritmo se diseñó para identificar vórtices individuales y regulares, no vórtices que interactúan o con formas variables. Los vórtices no detectados podrían haberse aniquilado o recombinado en sus interacciones.

Esto sugiere que en imágenes con un mayor número de vórtices, la interacción entre ellos es más significativa, planteando preguntas sobre posibles procesos de disipación de energía y su impacto en la cantidad y disposición de los vórtices. ¿Se conserva el momento angular del sistema en medio de estas interacciones? Además, ¿podría la ligera inclinación hacia una región particular en imágenes con 12 vórtices indicar una reducción del momento angular?

Basándonos en la información disponible, solo podemos hacer conjeturas y plantear preguntas, las cuales permanecen sin respuesta en este estudio. Esto ilustra cómo *Blobs 1.1* nos brinda la oportunidad de investigar la física de los vórtices cuantizados y cómo, en el futuro, podría utilizarse potencialmente para explorar la dinámica de estos fascinantes sistemas.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En este último capítulo, se resumen los resultados clave de esta tesis y se enfatiza la relevancia del desarrollo de algoritmos para el análisis de imágenes en experimentos de gases ultrafríos, especialmente en la investigación de excitaciones colectivas. También se plantean posibles direcciones para futuras investigaciones en este campo.

¿Por qué es importante desarrollar algoritmos que localicen y cuenten franjas y vórtices cuantizados en superfluidos?

A través del meticuloso análisis del número de franjas presentes en un patrón de Faraday, hemos adquirido un acceso invaluable al parámetro $\gamma = 1.1$. Este parámetro, de gran relevancia, rige la variación del potencial químico en función de la densidad de partículas en el sistema superfluido. En resumen, el simple conteo de franjas nos ha brindado la llave maestra para desentrañar la ecuación de estado intrínseca del sistema. Pero eso no es todo; hemos conseguido un resultado adicional de gran relevancia: el cálculo del vector de Faraday, $k_{FW}^{(1)} = 0.25 \mu m$, basado únicamente en la distribución y número de franjas.

Este resultado ha sido validado por dos métodos: uno mediante la utilización de la ecuación $k_{FW} = \lambda/2\pi$, y el otro mediante la aplicación de la transformada de Fourier a la imagen del patrón de ondas de Faraday en coordenadas espaciales. Estos hallazgos respaldan de manera sólida y convincente nuestros resultados. Con el vector de Faraday se han calculado importantes cantidades físicas como la energía de Floquet, el radio de Fermi y la densidad del fluido en el centro de la trampa.

En el contexto de los vórtices, nuestros hallazgos han sido reveladores y estimulantes. Al analizar las imágenes proporcionadas, hemos notado un fenómeno intrigante: en

promedio, se observaron 7, 11 y 12 vórtices individuales, en contraposición a las cifras de 6, 10 y 18 vórtices que se mencionaban previamente. Este desajuste entre las observaciones y las expectativas previas agrega un nivel adicional de interés y complejidad a nuestro estudio.

Además, hemos llegado a un resultado interesante: los vórtices se generan con una probabilidad notoriamente alta en la corona circular central, específicamente en la región 2. En todos los casos, esta probabilidad supera el umbral del 0.75, lo que indica un fenómeno muy robusto y coherente. Por el contrario, la probabilidad de generación en las dos regiones restantes es mínima en comparación. Estos resultados no solo son significativos, sino que también plantean preguntas interesantes sobre la formación y distribución de vórtices en este contexto.

Estos hallazgos son muy importantes para los laboratorios dedicados al estudio de excitaciones en gases ultrafríos. En primer lugar, la precisión en la localización y el conteo de franjas y vórtices promete simplificar y potenciar significativamente las investigaciones realizadas por el LMU y el *Lithium Lab*. Esto se traducirá en una ejecución más efectiva y eficiente de tareas, al tiempo que permitirá un análisis aún más detallado de estos patrones de excitación colectiva. Este enfoque analítico meticuloso abre las puertas a la obtención de cantidades físicas de gran relevancia, lo que amplía nuestra comprensión de estos sistemas. Además, contribuye a la toma de decisiones fundamentadas en la configuración de los parámetros experimentales, lo que, a su vez, elevará la calidad y el impacto de las investigaciones en curso.

Aun con todo el progreso realizado en este trabajo, es importante reconocer que los algoritmos desarrollados presentan ciertas limitaciones. Respecto a *Faraday 1.2*, su eficacia en la localización y conteo de franjas en las imágenes proporcionadas por el LMU es limitada, no logra detectar las franjas de menor intensidad en los extremos del perfil de ondas. En cambio, *Blobs 1.1* sólo se especializa en la detección y conteo de estructuras regulares e individuales, franjas o vórtices, pero no es capaz de identificar vórtices irregulares y de tamaño variable. También, no tiene la capacidad de captar la interacción entre dos o más vórtices, que dan lugar a formaciones geométricas irregulares que dificultan su localización y conteo. Estas limitaciones destacan la necesidad de realizar mejoras en los algoritmos y facilitar un análisis más completo y preciso de estas excitaciones colectivas.

El proceso de investigación para este proyecto ha experimentado ajustes en respuesta a las necesidades de los trabajos en el LMU. Inicialmente, el enfoque se centraba

en realizar un conteo de franjas en patrones de Faraday mediante el análisis de sus perfiles. Por lo tanto, se optó por un método analítico de comparación de primeros vecinos en una dimensión, dando lugar a la creación de *Faraday 1.2*. Sin embargo, al surgir el interés en el estudio de vórtices cuantizados, donde simplificar el análisis a una dimensión resultaba difícil, se hizo necesario cambiar a métodos más efectivos y eficientes para el análisis de imágenes en dos dimensiones. Fue así como se desarrolló *Seg 1.0*, un algoritmo de segmentación global que representó el primer intento de contar vórtices en dos dimensiones, aunque no logró los resultados deseados. Posteriormente, se optó por utilizar métodos de detección de *Blobs* mediante el uso de filtros gaussianos *LoG* y *DoG*. Esta elección condujo al desarrollo de *Blobs 1.1*, un algoritmo que localiza y cuenta franjas y vórtices de manera aceptable. Aunque, al final, *Blobs 1.1* es el algoritmo que se implementará en el LMU, se tomó la decisión de presentar los otros enfoques desarrollados, ya que representan fielmente la evolución y progreso de este trabajo.

A través de la implementación de estos algoritmos, el LMU se posiciona para realizar un análisis de sus imágenes de manera más efectiva y eficiente, impulsando el aprovechamiento al máximo la física subyacente en estas excitaciones colectivas. Este trabajo establece un precedente significativo para el desarrollo futuro de algoritmos más avanzados en este campo.

En futuros trabajos, se podrían implementar mejoras significativas en *Faraday 1.2* con el objetivo de realizar un conteo de franjas de manera más efectiva y eficiente. Por ejemplo, podría lograrse mediante la introducción de procesos de filtrado menos destructivos, que no afecten la identificación de las franjas en los extremos. Alternativamente, el LMU podría considerar mejorar la resolución de las imágenes del patrón de ondas de Faraday, ya que una mayor resolución proporcionaría perfiles más robustos frente a métodos de filtrado.

En cuanto a *Blobs 1.1*, se hace imperativo implementar modificaciones que permitan la localización y conteo de vórtices cuantizados durante procesos de aniquilación o reconexión entre dos o más vórtices. Es necesario abordar situaciones en las que los vórtices adoptan formas irregulares y poco homogéneas, que actualmente el algoritmo no logra identificar. Esta mejora posibilitaría el estudio de vórtices inestables en proceso de creación o aniquilación. Una opción prometedora sería desarrollar algoritmos de aprendizaje automático basados en redes neuronales [5], los cuales podrían facilitar la ubicación y el conteo de estos vórtices.

Además, persisten preguntas abiertas que podrían abordarse con un estudio más detallado de la dinámica de los vórtices. Por ejemplo, se podría explorar por qué los vórtices cuantizados tienden a generarse con mayor probabilidad en la región 1, más cercana al centro de la corona circular, en comparación con la región 3. También, investigar si los procesos de creación y aniquilación de vórtices son disipativos, y si el momento angular se conserva cuando estos vórtices se fusionan.

Explorar la dinámica de vórtices representa la clave para comprender los sistemas superfluidos. Desarrollar algoritmos destinados al análisis de estos sistemas emerge como una tarea de vital importancia y, al mismo tiempo, una emocionante área de oportunidad para el LMU. Indudablemente, esta es una dirección que los trabajos futuros deberán abordar para mantenerse a la vanguardia en este campo.

La elaboración de este trabajo ha representado una enriquecedora experiencia de aprendizaje en múltiples direcciones. Ha posibilitado una inmersión profunda en el fascinante ámbito de los gases ultrafríos y su física subyacente. A lo largo de este proceso, he mejorado significativamente mis habilidades computacionales, reconociendo simultáneamente la importancia crucial de este campo en la investigación de la física contemporánea.

Asimismo, la investigación llevada a cabo en este proyecto me ha brindado una visión inicial de la maravillosa tarea que implica la investigación científica. Este ámbito no solo incentiva la resolución de problemas, sino que también estimula la innovación y cultiva el pensamiento crítico. Este trabajo ha sido una ventana hacia el apasionante mundo de la investigación, donde la curiosidad y el rigor se entrelazan para generar avances significativos en el conocimiento.

Este trabajo desentraña aspectos fundamentales de la física de gases ultrafríos, proporcionando acceso a parámetros de interés y revelando fenómenos intrigantes en la formación de vórtices. Los algoritmos desarrollados permiten un análisis preciso, potenciando la eficiencia en la investigación del LMU y el *Lithium Lab*. Aunque enfrenta limitaciones, los resultados abren puertas a mejoras futuras. En resumen, esta investigación no solo da claridad a algunas interrogantes de las ondas de Faraday y los vórtices cuantizados en superfluidos, sino que también establece bases sólidas para avances continuos en la comprensión de estos sistemas.

Próximamente, se esperan obtener imágenes de ondas de Faraday con mayor resolución en el LMU, lo que mejorará la calidad de los perfiles derivados de estos patrones. Este avance podría aportar a que *Faraday 1.2* realice una detección más precisa de

las franjas. Además, se dedicará esfuerzo a la mejora continua de este algoritmo, centrándose principalmente en perfeccionar el proceso de filtrado que realiza.

Por otro lado, se proyecta la generación de vórtices cuantizados por parte del LMU, lo que permitirá la aplicación de *Blobs 1.1* en el análisis de sus imágenes. La exploración de nuestras propias imágenes, en las cuales poseemos información detallada, contribuirá a una comprensión más profunda de estos sistemas. También se tendrá la posibilidad de analizar un mayor número de imágenes de vórtices, lo que resultará en cantidades estadísticas y probabilidades calculadas más significativas. Así, este análisis respaldará la toma de decisiones respecto a los parámetros experimentales en los experimentos del LMU.

Se espera, en algún momento, disponer de imágenes de vórtices cuantizados con una secuencia temporal que posibilite determinar su ubicación y número en todo momento, facilitando así el estudio de la dinámica de estos sistemas. Para lograrlo, se requerirán ajustes mínimos en los algoritmos desarrollados.

Además, se contempla la posibilidad de explorar el desarrollo de algoritmos detectores de vórtices basados en aprendizaje automático. Se anticipa que estos modelos serán más robustos y capaces de analizar imágenes con fuentes de ruido relevantes y vórtices en estados fuera de equilibrio [5]. También podrían identificar la dirección de circulación de cada vórtice.

Este trabajo representa nuestra primera aproximación al análisis de imágenes de excitaciones colectivas en gases ultrafríos en el LMU. Esperamos que sirva como punto de partida y referencia para futuros trabajos en este campo.

Bibliografía

- [1] Westra, M., Binks, D. & Van De Water, W. Patterns of Faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics* **496**, 1–32 (2003).
- [2] Wu, J.-Z. *Vorticity and Vortex Dynamics* (Springer, Berlin, 2010).
- [3] Van der Walt, S. *et al.* scikit-image: image processing in Python. *PeerJ* **2**, e453 (2014). URL <https://doi.org/10.7717/peerj.453>.
- [4] Rakonjac, A. *et al.* Measuring the disorder of vortex lattices in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A* **93**, 013607 (2016). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.013607>.
- [5] Metz, F., Polo, J., Weber, N. & Busch, T. Deep-learning-based quantum vortex detection in atomic Bose–Einstein condensates. *Machine Learning: Science and Technology* **2**, 035019 (2021). URL <https://dx.doi.org/10.1088/2632-2153/abea6a>.
- [6] Pethick, C. J. & Smith, H. *Bose-Einstein condensation in dilute gases* (Cambridge University Press, 2008).
- [7] Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E. & Cornell, E. A. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science* **269**, 198–201 (1995). URL <https://science.sciencemag.org/content/269/5221/198>.
- [8] Davis, K. B. *et al.* Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.3969>.
- [9] Bradley, C. C., Sackett, C. A., Tollett, J. J. & Hulet, R. G. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys.*

- Rev. Lett.* **75**, 1687–1690 (1995). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1687>.
- [10] Bloch, I., Dalibard, J. & Zwerger, W. Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885–964 (2008). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.885>.
- [11] Bose, S. N. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik* **26**, 178–181 (1924). URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01327326>.
- [12] Einstein, A. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Königliche Preussische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte* 261–267 (1924).
- [13] Matthews, M. Finding the bose-einstein condensate. https://www.nsf.gov/news/mmg/media/images/boseinstein_h.jpg (1995).
- [14] DeMarco, B. & Jin, D. Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas. *Science* **285**, 1703–1706 (1999). URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.285.5434.1703>.
- [15] O’Hara, K., Hemmer, S., Gehm, M., Granade, S. & Thomas, J. Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms. *Science* **298**, 2179–2182 (2002). URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.1079107>.
- [16] Zwierlein, M. W. *et al.* Observation of Bose-Einstein condensation of molecules. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.250401>.
- [17] Greiner, M., Regal, C. A. & Jin, D. S. Emergence of a molecular Bose–Einstein condensate from a Fermi gas. *Nature* **426**, 537–540 (2003). URL <https://www.nature.com/articles/nature02199>.
- [18] Bardeen, J., Cooper, L. N. & Schrieffer, J. R. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.* **108**, 1175–1204 (1957). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1175>.
- [19] Chin, C., Grimm, R., Julienne, P. & Tiesinga, E. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225–1286 (2010). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.1225>.

- [20] Zwerger, W. *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas* (Springer Berlin Heidelberg, 2011), 1st edn. URL <https://www.springer.com/gp/book/9783642219788>.
- [21] Gross, E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento (New Series)* **20**, 454–477 (1961). URL <https://doi.org/10.1007/BF02731494>.
- [22] Pitaevskii, L. Vortex lines in an imperfect bose gas. *Soviet Physics JETP* **13**, 451–454 (1961). URL http://www.jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_013_02_0451.pdf.
- [23] Pauli, W. Über den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. *Zeitschrift für Physik* **31**, 765–783 (1925). URL <https://doi.org/10.1007/BF02980631>.
- [24] Will, S. *From Atom Optics to Quantum Simulation*. Springer Theses (Springer Berlin, Heidelberg, 2013), 1st edn.
- [25] Huang, K. *Introduction to Statistical Physics* (Chapman and Hall/CRC, 2009), 2nd edn. URL <https://doi.org/10.1201/9781439878132>.
- [26] Ketterle, W. & Zwierlein, M. W. Making, probing and understanding ultracold Fermi gases. *La Rivista del Nuovo Cimento* **31**, 247–422 (2008). URL <https://doi.org/10.1393/ncr/i2008-10033-1>.
- [27] Gertjerenken, B. & Holthaus, M. Emergence and destruction of macroscopic wave functions. *Europhysics Letters* **111**, 30006 (2015). URL <https://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/111/30006>.
- [28] Allen, J. & Misener, A. Flow phenomena in liquid helium II. *Nature* **142**, 643–644 (1938). URL <https://doi.org/10.1038/142643a0>.
- [29] London, F. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. *Nature* **141**, 643–644 (1938). URL <https://doi.org/10.1038/141643a0>.
- [30] Fried, D. G. *et al.* Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3811–3814 (1998). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.3811>.
- [31] Modugno, G. *et al.* Bose-Einstein Condensation of Potassium Atoms by Sympathetic Cooling. *Science* **294**, 1320–1322 (2001). URL <https://www.science>.

- org/doi/abs/10.1126/science.1066687. <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1066687>.
- [32] Weber, T., Herbig, J., Mark, M., Nägerl, H.-C. & Grimm, R. Bose-Einstein Condensation of Cesium. *Science* **299**, 232–235 (2003). URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1079699>. <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1079699>.
- [33] Griesmaier, A., Werner, J., Hensler, S., Stuhler, J. & Pfau, T. Bose-Einstein Condensation of Chromium. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 160401 (2005). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.160401>.
- [34] Takasu, Y. *et al.* Spin-Singlet Bose-Einstein Condensation of Two-Electron Atoms. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040404 (2003). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.040404>.
- [35] Robert, A. *et al.* A Bose-Einstein Condensate of Metastable Atoms. *Science* **292**, 461–464 (2001). URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1060622>. <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1060622>.
- [36] Pereira Dos Santos, F. *et al.* Bose-Einstein Condensation of Metastable Helium. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3459–3462 (2001). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.3459>.
- [37] Kraft, S., Vogt, F., Appel, O., Riehle, F. & Sterr, U. Bose-Einstein condensation of alkaline earth atoms: ^{40}Ca . *Phys. Rev. Lett.* **103**, 130401 (2009). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.130401>.
- [38] Aikawa, K. *et al.* Bose-Einstein condensation of erbium. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 210401 (2012). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.210401>.
- [39] Randeria, M. & Taylor, E. Crossover from Bardeen-Cooper-Schrieffer to Bose-Einstein condensation and the unitary Fermi gas. *Annual Review of Condensed Matter Physics* **5**, 209–232 (2014). URL <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031113-133829>.
- [40] Kirzhnits, D. A. *Field Theoretical Methods in Many-Body Systems* (Pergamon Press, 1972).

- [41] Manini, N. & Salasnich, L. Bulk and collective properties of a dilute Fermi gas in the BCS-BEC crossover. *Phys. Rev. A* **71**, 033625 (2005). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.033625>.
- [42] Salasnich, L., Manini, N. & Toigo, F. Macroscopic periodic tunneling of Fermi atoms in the BCS-BEC crossover. *Phys. Rev. A* **77**, 043609 (2008). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.043609>.
- [43] Forbes, M. M. & Sharma, R. Validating simple dynamical simulations of the unitary Fermi gas. *Phys. Rev. A* **90**, 043638 (2014). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.043638>.
- [44] Stringari, S. Collective excitations of a trapped Bose-Condensed gas. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360–2363 (1996). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.2360>.
- [45] Hernández-Rajkov, D. *et al.* Faraday waves in strongly interacting superfluids. *New Journal of Physics* **23**, 103038 (2021). URL <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ac2d70>.
- [46] Hernandez-Rajkov, D. *et al.* Universality of the superfluid Kelvin-Helmholtz instability by single-vortex tracking (2023). URL <https://arxiv.org/abs/2303.12631>.
- [47] Leggett, A. J. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307–356 (2001). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.307>.
- [48] Rajkov, D. H. *Non-destructive and high-resolution imaging techniques for studying ultracold quantum gases*. B.sc. thesis, UNAM (2021). URL <https://lanmac.org.mx/es/labs/lmu/TesisMaster-HernandezDiego-Biblioteca.pdf>.
- [49] Andrade-Sánchez, G. & Romero-Rochín, V. Potential and Feshbach s-wave resonances in coupled atomic collision channels. *European Journal of Physics* **44**, 065401 (2023). URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/acf799>.
- [50] Moerdijk, A. J., Verhaar, B. J. & Axelsson, A. Resonances in ultracold collisions of ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$, and ${}^{23}\text{Na}$. *Phys. Rev. A* **51**, 4852–4861 (1995). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.4852>.

- [51] Baldini, E. *Nonequilibrium Dynamics of Collective Excitations in Quantum Materials*. Springer Theses (Springer Cham, 2018), 1 edn.
- [52] Cornell, E. A. & Wieman, C. E. Nobel lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875–893 (2002). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.74.875>.
- [53] Edwards, M., Dodd, R. J., Clark, C. W., Ruprecht, P. A. & Burnett, K. Properties of a Bose-Einstein condensate in an anisotropic harmonic potential. *Phys. Rev. A* **53**, R1950–R1953 (1996). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.R1950>.
- [54] Mewes, M.-O. *et al.* Collective excitations of a bose-einstein condensate in a magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988–991 (1996). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.988>.
- [55] Jin, D. S., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wieman, C. E. & Cornell, E. A. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420–423 (1996). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.420>.
- [56] Faraday, M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **121**, 299–340 (1831). URL <http://www.jstor.org/stable/107936>.
- [57] Mekhonoshin, V. V. & Lange, A. Faraday instability on viscous ferrofluids in a horizontal magnetic field: Oblique rolls of arbitrary orientation. *Phys. Rev. E* **65**, 061509 (2002). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.65.061509>.
- [58] Bevilacqua, G., Shao, X., Saylor, J. R., Bostwick, J. B. & Ciarletta, P. Faraday waves in soft elastic solids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **476**, 20200129 (2020). URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.2020.0129>. <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.2020.0129>.
- [59] Noskov, R. E., Smirnova, D. A. & Kivshar, Y. S. Subwavelength solitons and Faraday waves in two-dimensional lattices of metal nanoparticles. *Opt. Lett.*

- 38**, 2554–2556 (2013). URL <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-38-14-2554>.
- [60] Cross, M. C. & Hohenberg, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851–1112 (1993). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.65.851>.
- [61] Engels, P., Atherton, C. & Hofer, M. A. Observation of Faraday waves in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 095301 (2007). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.095301>.
- [62] Smits, J., Liao, L., Stoof, H. T. C. & van der Straten, P. Observation of a space-time crystal in a superfluid quantum gas. *Physical Review Letters* **121**, 185301 (2018). URL <https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.185301>.
- [63] Kwon, K. *et al.* Spontaneous formation of star-shaped surface patterns in a driven Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters* **127**, 113001 (2021). URL <https://doi.org/10.1103/physrevlett.127.113001>.
- [64] Staliunas, K., Longhi, S. & de Valcárcel, G. J. Faraday Patterns in Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 210406 (2002). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.210406>.
- [65] Nicolin, A. I., Carretero-González, R. & Kevrekidis, P. G. Faraday waves in bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A* **76**, 063609 (2007). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.063609>.
- [66] Capuzzi, P. & Vignolo, P. Faraday waves in elongated superfluid fermionic clouds. *Phys. Rev. A* **78**, 043613 (2008). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.043613>.
- [67] Hu, H., Minguzzi, A., Liu, X.-J. & Tosi, M. P. Collective modes and ballistic expansion of a fermi gas in the bcs-bec crossover. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 190403 (2004). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.190403>.
- [68] Heiselberg, H. Collective modes of trapped gases at the bec-bcs crossover. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 040402 (2004). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.040402>.
- [69] Nguyen, J. H. V. *et al.* Parametric excitation of a bose-einstein condensate: From faraday waves to granulation. *Phys. Rev. X* **9**, 011052 (2019). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.011052>.

- [70] Turmanov, B. K., Baizakov, B. B. & Abdullaev, F. K. Generation of density waves in dipolar quantum gases by time-periodic modulation of atomic interactions. *Phys. Rev. A* **101**, 053616 (2020). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.053616>.
- [71] Wagner, C., Müller, H. W. & Knorr, K. Crossover from a square to a hexagonal pattern in faraday surface waves. *Phys. Rev. E* **62**, R33–R36 (2000). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.R33>.
- [72] Maksymov, I. S., Nguyen, B. Q. H., Pototsky, A. & Suslov, S. Acoustic, phononic, Brillouin light scattering and Faraday wave-based frequency combs: Physical foundations and applications. *Sensors* **22** (2022). URL <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/10/3921>.
- [73] Matthews, M. R. *et al.* Vortices in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498–2501 (1999). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.2498>.
- [74] Onsager, L. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento (1943-1954)* **6**, 279–287 (1949). URL <https://doi.org/10.1007/BF02780991>.
- [75] Ramanathan, A. K. *A Ring with a Spin: Superfluidity in a Toroidal Bose-Einstein Condensate*. Doctoral dissertation, University of Maryland, College Park (2011).
- [76] Benfatto, L., Perali, A., Castellani, C. & Grilli, M. Kosterlitz-Thouless vs. Ginzburg-Landau description of 2D superconducting fluctuations. *Eur. Phys. J. B* **13**, 609–612 (2000). URL <https://doi.org/10.1007/s100510050076>.
- [77] Vinen, W. F. The detection of single quanta of circulation in liquid helium II. *Proc. R. Soc. Lond.* **260**, 218–236 (1961). URL <https://doi.org/10.1098/rspa.1961.0029>.
- [78] Schweikhard, V., Tung, S. & Cornell, E. A. Vortex proliferation in the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless regime on a two-dimensional lattice of Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 030401 (2007). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.030401>.
- [79] Lagoudakis, K. G. *et al.* Quantized vortices in an exciton-polariton condensate. *Nature Physics* **4**, 706–710 (2008). URL <https://doi.org/10.1038/nphys1051>.

- [80] Tsubota, M., Kobayashi, M. & Takeuchi, H. Quantum hydrodynamics. *Physics Reports* **522**, 191–238 (2013). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312002773>. Quantum hydrodynamics.
- [81] Fetter, A. L. Rotating trapped bose-einstein condensates. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647–691 (2009). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.647>.
- [82] Zwierlein, M. W., Abo-Shaeer, J. R., Schirotzek, A., Schunck, C. H. & Ketterle, W. Vortices and superfluidity in a strongly interacting fermi gas. *Nature* **435**, 1047–1051 (2005). URL <https://doi.org/10.1038/nature03858>.
- [83] Del Pace, G. *et al.* Imprinting persistent currents in tunable fermionic rings. *Phys. Rev. X* **12**, 041037 (2022). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.12.041037>.
- [84] Kundu, P. K. & Cohen, I. M. *Fluid Mechanics* (Academic Press, 2010), 4th edn.
- [85] Henn, E. A. L., Seman, J. A., Roati, G., Magalhães, K. M. F. & Bagnato, V. S. Emergence of turbulence in an oscillating bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 045301 (2009). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.045301>.
- [86] Tsatsos, M. C. *et al.* Quantum turbulence in trapped atomic bose-einstein condensates. *Physics Reports* **622**, 1–52 (2016). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731600065X>. Quantum turbulence in trapped atomic Bose–Einstein condensates.
- [87] Vinen, W. F. & Niemela, J. J. Quantum turbulence. *Journal of Low Temperature Physics* **128**, 167–231 (2002). URL <https://doi.org/10.1023/A:1019695418590>.
- [88] Ketterle, W. Experimental Studies of Bose–Einstein Condensation. *Physics Today* **52**, 30–35 (1999). URL <https://doi.org/10.1063/1.882898>. https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/52/12/30/8313814/30_1_online.pdf.
- [89] Cao, S. *et al.* Extraction and identification of noise patterns for ultracold atoms in an optical lattice. *Opt. Express* **27**, 12710–12722 (2019). URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-27-9-12710>.

- [90] Takei, N. *et al.* Direct observation of ultrafast many-body electron dynamics in an ultracold rydberg gas. *Nature Communications* **7**, 13449 (2016). URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13449>.
- [91] Shapiro, L. & Stockman, G. *Computer Vision* (University of Washington, 2000).
- [92] Xu, T. & Gondra, I. A simple and effective texture characterization for image segmentation. *Signal, Image and Video Processing* **6**, 231–245 (2012). URL <https://doi.org/10.1007/s11760-010-0182-8>.
- [93] Sauvola, J. & Pietikäinen, M. Adaptive document image binarization. *Pattern Recognition* **33**, 225–236 (2000). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320399000552>.
- [94] Singh, T. R., Roy, S., Singh, O. I., Sinam, T. & Singh, K. M. A new local adaptive thresholding technique in binarization (2012). URL <https://arxiv.org/abs/1201.5227>. 1201.5227.
- [95] Haak, M. T. *Machine learning for blob detection in high-resolution 3D microscopy images*. Degree project in computer science and engineering, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden (2018).
- [96] Lindeberg, T. & Eklundh, J. O. Scale detection and region extraction from a scale-space primal sketch. In *[1990] Proceedings Third International Conference on Computer Vision*, 416–426 (Osaka, Japan, 1990).
- [97] Lindeberg, T. Scale selection properties of generalized scale-space interest point detectors. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **177**, 177–210 (2013). URL <https://doi.org/10.1007/s10851-012-0378-3>.
- [98] Lindeberg, T. Image matching using generalized scale-space interest points. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **52**, 3–36 (2015). URL <https://doi.org/10.1007/s10851-014-0541-0>.
- [99] Apple Inc. Blurring an image. macOS Developer Documentation (2023). URL https://developer.apple.com/documentation/accelerate/blurring_an_image.
- [100] Chevy, F. & Salomon, C. Strongly correlated bose gases. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **49**, 192001 (2016). URL <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/49/19/192001>.