



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCIÓN DE SISTEMA DE  
LÁSERES PARA LA GENERACIÓN  
DE ÁTOMOS DE RYDBERG

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

EDUARDO ESQUIVEL RAMÍREZ

TUTOR:

DR. ASAF PARIS MANDOKI



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

OCTUBRE, 2020

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Esquivel  
Ramírez  
Eduardo  
55 59 69 79 21  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
312069216

2. Datos del tutor

Dr.  
Asaf  
Paris  
Mandoki

3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Fernando  
Ramírez  
Martínez

4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Pablo  
Barberis  
Blostein

5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Jesús  
Flores  
Mijangos

6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Víctor Manuel  
Velázquez  
Aguilar

7. Datos del trabajo escrito

Construcción de sistema de láseres para la generación de átomos de Rydberg  
100 p  
2020



---

---

# Agradecimientos

---

---

A mis padres y hermano por su incommensurable apoyo y enseñanzas, esta tesis también es suya.

A mis hermanos Brian y Gustavo, ustedes han sido una bocanada de aire fresco en los momentos más difíciles. La comedia nunca muere.

A Nina, por todo tu apoyo y cariño.

A Alis, Liz y Kenny, por su invaluable amistad a lo largo de tantos años.

A mi asesor, el Dr. Asaf Paris Mandoki, por ser un gran líder, tener la visión para realizar este proyecto y brindarme el tiempo y la disposición para discutir a profundidad cada una de las ideas de esta tesis.

A mis amigos y compañeros de laboratorio Edgar Giovanni Alonso Torres y Leonardo Uthoff Rodríguez por todas esas horas de discusión y trabajo que han impactado positivamente a este trabajo.

A mi gran amigo y compañero de licenciatura Jesús Eduardo Anaya Galeana, tu ayuda a lo largo de la carrera fue determinante para llegar a este punto.

A los ultrafríos por permitirme husmear en su lado del laboratorio de vez en vez y siempre tener la disposición para discutir los detalles de su experimento permitiéndome aprender de su experiencia.

A los electrónicos por su disposición y entusiasmo para trabajar.

A todos los profesores que he tenido en la vida. A los buenos por ayudarme a formar disciplina, sensibilidad y una visión del mundo que alimentó mi interés por el estudio. A los malos profesores por mostrarme exactamente cómo no hay que conducirse por la vida.

Al proyecto PAPIIT con clave IA101718 “Óptica no lineal cuántica basada en átomos de Rydberg”.

Al proyecto de investigación científica básica de CONACyT A1-S-29630 “Óptica cuántica de Rydberg”.

Al proyecto del Instituto de Física UNAM PIIF-008 “Correlaciones Cuánticas: Teoría y Experimento”.



---

---

# Índice general

---

---

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Interacción Luz-Materia</b>	<b>5</b>
1.1 Átomo de dos niveles . . . . .	6
1.1.1 Interacción átomo-campo . . . . .	6
1.1.2 Aproximación de onda rotante . . . . .	8
1.1.3 Frecuencia de Rabi . . . . .	9
1.1.4 Ecuaciones de evolución . . . . .	10
1.1.5 Marco rotante . . . . .	10
1.1.6 Tratamiento con matriz de densidad . . . . .	11
1.2 Átomo de tres niveles . . . . .	12
1.2.1 Hamiltoniano en el marco rotante . . . . .	12
1.2.2 Ecuación maestra . . . . .	14
1.2.3 Propiedades macroscópicas . . . . .	15
<b>2 Láseres</b>	<b>19</b>
2.1 Conceptos generales . . . . .	20
2.1.1 Configuración cat-eye . . . . .	21
2.1.2 Configuración Littrow . . . . .	22
2.2 Propiedades de la luz aleatoria . . . . .	22
2.2.1 Intensidad . . . . .	23
2.2.2 Coherencia temporal . . . . .	24
2.2.3 Espectro . . . . .	27
2.3 Forma de línea láser . . . . .	28
<b>3 Átomos de Rydberg</b>	<b>33</b>
3.1 Propiedades . . . . .	34

3.1.1	Ecuación radial hidrogenoide . . . . .	34
3.1.2	Escalamiento de las propiedades con $n$ . . . . .	35
3.2	Rubidio . . . . .	37
3.2.1	Estructura de niveles energéticos . . . . .	38
3.2.2	Estados de Rydberg . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Estabilización de frecuencia</b>	<b>43</b>
4.1	Teoría de control . . . . .	44
4.1.1	Sistemas dinámicos . . . . .	44
4.1.2	Retroalimentación . . . . .	48
4.2	Resonadores ópticos . . . . .	51
4.2.1	Condiciones de resonancia . . . . .	51
4.2.2	Cavidad con pérdidas . . . . .	54
4.2.3	Tiempo de vida del fotón . . . . .	59
4.2.4	Modos Gaussianos . . . . .	60
4.3	Estabilización de frecuencia Pound-Drever-Hall . . . . .	64
4.3.1	Señal de error . . . . .	66
4.3.2	Reducción del ancho de línea . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Esquema experimental</b>	<b>73</b>
5.1	Cavidad de referencia . . . . .	74
5.1.1	Acoplamiento de modo . . . . .	75
5.1.2	Rango espectral libre . . . . .	76
5.1.3	Fineza . . . . .	76
5.2	Láser de 780 nm . . . . .	77
5.2.1	Óptica . . . . .	77
5.2.2	Electrónica . . . . .	79
5.3	Láser de 960 nm . . . . .	80
5.3.1	Óptica . . . . .	81
5.3.2	Electrónica . . . . .	83
5.4	Caracterización . . . . .	84
5.4.1	Acoplamiento de modo . . . . .	84
5.4.2	Rango espectral libre . . . . .	86
5.4.3	Fineza . . . . .	88
5.4.4	Control de temperatura . . . . .	91
5.4.5	Estabilidad de la cavidad . . . . .	91
5.4.6	Optimización del anclaje . . . . .	95

---

<b>6 Conclusiones y perspectivas</b>	<b>97</b>
6.1 Conclusiones . . . . .	97
6.2 Detección de átomos de Rydberg . . . . .	98
6.3 Medición del ancho de línea . . . . .	100
<b>A Transformación del Hamiltoniano al marco rotante</b>	<b>101</b>
<b>B Dinámica en el átomo de dos niveles</b>	<b>103</b>
B.1 Oscilaciones de Rabi . . . . .	103
B.1.1 Interacción resonante . . . . .	103
B.1.2 Interacción cerca de resonancia . . . . .	105
B.2 Estados vestidos . . . . .	107



---

---

# Índice de tablas

---

---

3.1	Escalamiento de las propiedades más importantes de los estados de Rydberg con el número principal cuántico $n$ para átomos alcalinos. . . . .	36
3.2	Características principales de los isótopos $^{85}\text{Rb}$ y $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	38
5.1	Elementos ópticos utilizados para acoplar el modo fundamental a la cavidad de alta fineza para un haz con longitud de onda de 780 nm. . . . .	78
5.2	Elementos ópticos utilizados para acoplar el modo fundamental a la cavidad de alta fineza para un haz con longitud de onda de 960 nm. . . . .	82



---



---

# Índice de figuras

---



---

1.1	Diagrama de los estados y frecuencias de resonancia y desintonamiento en el átomo de dos niveles. . . . .	7
1.2	Diagrama de los estados y frecuencias de resonancia y desintonamiento en el átomo de tres niveles. . . . .	13
1.3	Diagrama de los estados y decaimientos para el átomo de tres niveles. . . . .	15
1.4	Suceptibilidad del medio atómico en función del desintonamiento $\delta_1 = \omega_p - \omega_1$ para un átomo de tres niveles, cuando $\delta_2 = 0$ se tiene EIT. La parte imaginaria de la suceptibilidad caracteriza la absorción mientras que la parte real determina las propiedades del índice de refracción del medio. . . . .	17
1.5	Absorción del medio atómico en función del desintonamiento $\delta_1 = \omega_p - \omega_1$ para un átomo de tres niveles cuando $\delta_2 \gg \Gamma_1$ . Además de observar el pico central correspondiente a la transición $ g\rangle \rightarrow  e\rangle$ se observa un pico adicional correspondiente a la transición $ g\rangle \rightarrow  e\rangle \rightarrow  r\rangle$ . . . . .	18
2.1	Diagrama esquemático de un láser de diodo de cavidad externa cat-eye. . . . .	21
2.2	Diagrama esquemático de un láser de diodo de cavidad externa en la configuración Littrow. . . . .	22
2.3	Cambio del fasor $E(t)$ respecto al tiempo cuando su argumento está distribuido uniformemente entre 0 y $2\pi$ . El promedio de sus partes real e imaginaria es cero, por lo que $\langle E(t) \rangle = 0$ . . . . .	25
2.4	Gráfica del grado complejo de coherencia temporal Gaussiano y su tiempo de coherencia $\tau_c$ definido como el ancho completo a media altura. . . . .	26
2.5	Cálculo numérico de la forma de línea $S_E(\delta\nu)$ del láser para distintas frecuencias de corte $f_c$ con un nivel de ruido fijo $h_0 = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$ . Las formas de línea estan normalizadas para facilitar la comparación. La forma de línea es Gaussiana cuando $f_c \ll h_0$ y pasa a ser Lorentziana cuando $f_c \gg h_0$ . . . . .	30

2.6	Gráfica del ancho de línea en función de la frecuencia de corte $f_c$ (ver ecuación 2.24). Ambos ejes se normalizaron con el nivel del ruido $h_0$ . Se observan comportamientos diferentes para bajas y altas frecuencias. . . . .	31
2.7	Modelo de ruido blanco filtrado (ver ecuación 2.20) con un nivel de ruido fijo $h_0 = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$ para distintas frecuencias de corte $f_c$ . La línea roja punteada se muestra la línea $\beta$ de separación dada por $S_{\delta\nu}(f) = 8\ln(2)f/\pi^2$ que divide al espectro en dos regiones. En la región I (morado) se tiene un índice de modulación alto por lo que el ruido provoca el ensanchamiento de la forma de línea. En la región II (azul) el índice de modulación es bajo, de tal forma que el ruido hace más grandes las colas del espectro. . . . .	32
3.1	Espectroscopía medida de la línea D2 de 780 nm de $^{85}\text{Rb}$ y $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	39
3.2	Diagrama de niveles energéticos para las transiciones a estados de Rydberg en rubidio. Las frecuencias de Rabi $\Omega_p$ y $\Omega_c$ caracterizan la fuerza de interacción entre los campos de prueba y de control con el átomo (ver ecuación 1.35), $\Omega_R$ es la frecuencia de Rabi en el esquema de generación de la excitación con un solo fotón. Aquí $\delta_1$ y $\Delta$ caracterizan el desentonamiento entre la frecuencia de los campos y la frecuencia de resonancia de los átomos (ver sección 1.2). . . . .	41
4.1	Circuito esquemático de un filtro pasa bajos. . . . .	45
4.2	Función de transferencia de un filtro pasa bajos. a) Gráfica de Bode de la magnitud $  G(i\omega)  $ . b) Gráfica de Bode la fase $[\arg G(i\omega)]$ . . . . .	47
4.3	Diagrama de bloques que ilustra a un sistema compuesto en serie. . . . .	47
4.4	Diagrama de bloques que ilustra un sistema de retroalimentación cerrado. La dinámica del sistema $G(s)$ es controlada por $K(s)$ . . . . .	48
4.5	Diagrama de bloques que ilustra un sistema de retroalimentación cerrado con una perturbación $p(s)$ y ruido en la medición $n(s)$ . . . . .	49
4.6	Gráficas de Bode de magnitud y fase de las leyes de control individuales que componen a un controlador PID para diferentes valores arbitrarios. a) Control proporcional. b) Control integral. c) Control diferencial. d) Control PID. . . . .	50
4.7	Cavidad de Fabry-Perot también conocida como etalon consiste en dos espejos planos paralelos de alta reflectividad y sin pérdidas separados por una distancia $d$ . . . . .	51
4.8	Espectro de frecuencias permitidas en una cavidad de Fabry-Perot sin pérdidas. Los picos de resonancia son arbitrariamente delgados. . . . .	53
4.9	Intensidad de la luz que circula dentro de una cavidad con pérdidas. Se aprecia cómo el ancho de línea de las resonancias cambia dependiendo la fineza para tres valores arbitrarios: $\mathcal{F} = 5, 10$ y $100$ . . . . .	56

4.10	Espectro de frecuencias permitidas en una cavidad de Fabry-Perot con pérdidas. Se muestra el ancho completo a media altura $\nu_{\text{FWHM}}$ . . . . .	57
4.11	Diagrama esquemático de la transmisión y reflexión del campo electromagnético en una cavidad. . . . .	58
4.12	Diagrama esquemático que muestra las modificaciones que sufre el campo eléctrico al resonar dentro de una cavidad de longitud $d$ con pérdidas. . . . .	59
4.13	Esquema del corte longitudinal de un haz Gaussiano. En línea sólida se muestran los frentes de onda del haz, con línea punteada se muestra el contorno. . . . .	62
4.14	Modos transversales del campo electromagnético. Se muestran los primeros modos del tipo Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss. . . . .	63
4.15	Espectro de frecuencias reflejadas de una cavidad de Fabry-Perot con pérdidas. . . . .	64
4.16	Señal de error generada con el método de Pound-Drever-Hall para frecuencias de modulación $\Omega$ altas (ver 4.71). . . . .	67
4.17	Esquema del montaje experimental para la generación de la señal de error usando la técnica Pound-Drever-Hall. . . . .	68
4.18	Evolución de la forma de línea para un láser sometido a un sistema de retroalimentación con distintos anchos de banda $f_b$ . . . . .	69
4.19	Modelo de ruido en frecuencia usado para estudiar la reducción del ancho de línea implementando un sistema de retroalimentación (ver ecuación 4.74). Se asume que el nivel de ruido $h_b = 1 \text{ MHz}^2/\text{MHz}$ fijo se reduce a $h_a = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$ por medio de un sistema de retroalimentación con ancho de banda $f_b$ . El ancho de banda mínimo para reducir eficientemente el ancho de línea es $f_b^{\text{min}} = \pi^2 h_b / (8 \ln(2))$ . . . . .	70
4.20	Derivada en función de la frecuencia de la señal de error generada con el método de Pound-Drever-Hall para frecuencias de modulación $\Omega$ altas (ver 4.71). Al incrementar la fineza de la cavidad óptica el valor de la derivada cerca de la frecuencia de resonancia aumenta y pequeños cambios en la frecuencia del láser se transforman en grandes cambios en la señal de error. . . . .	71
5.1	Se muestra el montaje de la cavidad de alta fineza utilizada para estabilizar la frecuencia de los láseres de 780 nm y 960 nm. (a) Espaciador de ULE montado sobre el bloque de Zerodur y la cámara de vacío. (b) Cavidad montada en espaciador de ULE. . . . .	74
5.2	Esquema de la cavidad óptica de referencia montada en el experimento. . . . .	75
5.3	Esquema del montaje óptico para el láser de 780 nm. . . . .	77

5.4	Esquema del montaje óptico para acoplar el modo fundamental de los láseres de 780 nm y 960 nm a la cavidad de alta fineza. Mezclar los haces con un PBS asegura que sus polarizaciones serán diferentes. La luz reflejada de la cavidad se separa usando divisores de haz y se enfoca en el fotodiodo 1 para 780 nm y fotodiodo 2 para 960 nm. El fotodiodo 3 captura la luz transmitida de la cavidad para monitorear la alineación. . . . .	78
5.5	Esquema del montaje electrónico para el láser de 780 nm. . . . .	80
5.6	Esquema de la generación de señales de modulación que permite anclar el láser de 780 nm a una frecuencia arbitraria. La técnica depende de que RF2 se filtre a través del mezclador 2 por lo que RF2 necesita tener una potencia mayor que RF1. En azul se muestran las potencias de las señales y en rojo se especifican los componentes electrónicos usados. . . . .	81
5.7	Esquema del montaje óptico para el láser de 960 nm. . . . .	82
5.8	Esquema del montaje electrónico para el láser de 960 nm. . . . .	84
5.9	Esquema de la generación de la señal de modulación RF2 a una frecuencia $f_{\text{dif}}$ para el láser de 960 nm. . . . .	84
5.10	Fotografías del proceso de alineación usando una cámara CMOS. a) Inicio de la alineación. El objetivo es reducir el tamaño de los modos de Hermite-Gauss más grandes. b) Se observa el modo fundamental cuando la alineación es óptima. . . .	85
5.11	Señal de transmisión de la cavidad para el haz de 780 nm. a) Se observan dos modos fundamentales contiguos y modos de mayor orden debido a desalineaciones. b) Cuando la alineación es óptima sólo el modo fundamental es observado. . . .	85
5.12	Señal de transmisión de la cavidad para el haz de 960 nm. a) Se observan dos modos fundamentales contiguos y modos de mayor orden debido a desalineaciones. b) Después de alinear el haz se continúa observando una excitación del 2.75 % respecto al modo fundamental. . . . .	86
5.13	Señal de transmisión medida utilizada para medir el rango espectral libre usando bandas laterales generadas con una frecuencia $f_{\text{dif}} = 200$ MHz para escalar el eje horizontal. . . . .	87
5.14	Señal de transmisión medida utilizada para medir el rango espectral libre por medio de caminar las bandas laterales. . . . .	88
5.15	Señal de transmisión medida para determinar la fineza de la cavidad utilizando bandas laterales como referencia de frecuencia para escalar el eje horizontal. a) El haz de 780 nm es modulado con una frecuencia $f_{\text{dif}} = 5$ MHz. b) El haz de 960 nm es modulado con una frecuencia $f_{\text{dif}} = 1$ MHz. . . . .	89

5.16	Señal de transmisión medida para determinar la fineza de la cavidad a través de determinar el tiempo de vida de los fotones dentro de la cavidad. a) Láser de 780 nm. b) Láser de 960 nm. . . . .	90
5.17	Temperatura de la cavidad de referencia. El controlador comercial estabiliza la temperatura alrededor de 30.5 °C. . . . .	92
5.18	Batido de frecuencias medido con un analizador de espectros. . . . .	93
5.19	Medición de la estabilidad de la cavidad. Se compara la desviación del batido de frecuencias con la desviación estimada por el cambio en la distancia entre los espejos de acuerdo con el cambio en temperatura medida de la cavidad. . . . .	94
5.20	Medición de la estabilidad de la cavidad. Se compara la desviación del batido de frecuencias con la temperatura medida de la celda de espectroscopía. . . . .	94
5.21	Espectrograma de la señal de transmisión de la cavidad. Se observa cómo disminuye la amplitud de las componentes de ruido de baja frecuencia al aumentar la ganancia del integrador del sistema de retroalimentación rápido para el láser de 780 nm. . . . .	95
6.1	Esquema del montaje óptico para la generación y detección de átomos de Rydberg usando una celda con $^{85}\text{Rb}$ y $^{87}\text{Rb}$ en estado gaseoso a temperatura ambiente. . . . .	98
6.2	a) Señal de transmisión del haz de prueba como función de su desentonamiento respecto a la resonancia $5S_{1/2}(F = 3) \rightarrow 5P_{3/2}(F')$ , la señal roja es con el haz de control fuera de resonancia y en azul cuando es resonante con la transición $5P_{3/2}(F') \rightarrow 44D_{5/2}/44D_{3/2}$ . b) El cambio en la transmisión dado por la diferencia entre las dos curvas de a). Se observan seis resonancias. . . . .	99
B.1	Dinámica de la población de los estados base y excitado en una interacción resonante para el átomo de dos niveles comenzando con un átomo en el estado base. Se observan las oscilaciones de Rabi. . . . .	105
B.2	Dinámica de la población del estado excitado en una interacción cerca de resonancia para el átomo de dos niveles comenzando con un átomo en el estado base. . . . .	106
B.3	Estructura de los niveles energéticos en función del desentonamiento para un átomo de dos niveles. Se aprecia el cruce evitado de los niveles base y excitado debido al acoplamiento con el campo. . . . .	107



---

---

# Resumen

---

---

En esta tesis se exponen los detalles teóricos y experimentales acerca de la construcción de un sistema de láseres para la generación de átomos de Rydberg. El sistema permite llevar átomos de  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$  del estado base a estados de Rydberg con  $n = 40, \dots, 120$  a través de una excitación de dos fotones en el esquema de escalera siguiendo la ruta de niveles energéticos:

$$5S \xrightarrow{780 \text{ nm}} 5P \xrightarrow{480 \text{ nm}} nS/nD.$$

Se utiliza una cavidad óptica ultra estable y de alta fineza como referencia de frecuencia a la cual se anclan los láseres por medio de la técnica Pound-Drever-Hall. A lo largo del trabajo se discuten los conceptos básicos que permiten entender cómo funciona este anclaje y de qué forma modifica las propiedades de los láseres utilizados de tal manera que las excitaciones de Rydberg puedan tener lugar de manera eficiente.



---

---

# Introducción

---

---

La realización de un experimento en el que se consigan efectos ópticos no lineales al nivel de unos cuantos fotones sirve tanto para el estudio de procesos fundamentales como aplicaciones tecnológicas. La interacción entre fotones permite crear estados no clásicos de luz, estudiar la dinámica de sistemas cuánticos de muchos fotones [1] y el desarrollo de tecnologías para el procesamiento de información cuántica [2, 3, 4].

Al nivel de unos cuantos fotones, las no linealidades ópticas surgen cuando la respuesta del medio a un segundo fotón es diferente al primero [5]. En la óptica clásica se dificulta alcanzar el régimen no lineal pues es necesario que los dos fotones interactúen con el mismo emisor/receptor como son átomos o moléculas. Para acrecentar la probabilidad de que esto ocurra se puede incrementar el número de fotones o aumentar la sección eficaz de interacción entre los fotones y el receptor; sin embargo, la sección eficaz no puede ser controlada en materiales convencionales y la alternativa para generar efectos no lineales en óptica clásica es incrementar la potencia de la luz.

Existen varias opciones para obtener una respuesta óptica no lineal usando pocos fotones. Por ejemplo, las cavidades ópticas de alta fineza donde se coloca un átomo individual en su interior [6] o el uso de nano-fibras ópticas con átomos atrapados alrededor de las mismas [7]. Otra alternativa, que será el foco de interés en este trabajo, es la fuerte interacción entre átomos de Rydberg, estos son átomos altamente excitados con un número cuántico principal  $n \geq 20$ . Las propiedades de este tipo de átomos, como el tiempo de vida o polarizabilidad, escalan con potencias de  $n$  y se ven dramáticamente aumentados respecto a átomos en estados de menor energía. Debido a esto, los átomos de Rydberg presentan una interacción de tipo van de Waals que se puede escribir como  $U(R) = C_6/R^6$  donde  $R$  es la distancia interatómica y  $C_6 \propto n^{11}$ . Este potencial provoca que al crearse un primer átomo de Rydberg se desplace la energía de excitación de los átomos vecinos, si el desplazamiento es más grande que el ancho de línea de la luz de excitación entonces un segundo estado de Rydberg se vuelve imposible, este fenómeno no lineal es conocido como bloqueo de Rydberg.

En el año 2001 Lukin *et al* plantearon por primera vez la idea de utilizar el bloqueo de Rydberg para generar estados cuánticos de luz [8]. Sin embargo, aún no existían las técnicas

para realizar los experimentos ya que casi todos implementaban métodos de detección destructivos, como lo es la ionización, y las interacciones coherentes de átomos y luz no habían sido observadas experimentalmente aún. La clave resultó ser la transparencia electromagnéticamente inducida, EIT por sus siglas en inglés, donde un campo de control provoca que el medio se vuelva transparente a la luz resonante con los átomos obteniendo un método de detección no destructivo [9]. Los primeros experimentos que utilizaron EIT para detectar átomos de Rydberg con números cuánticos principales de hasta  $n = 124$  fueron reportados por Mohapatra *et al* en 2007 [10], posteriormente Dudin y Kuzmich [11], Peyronel *et al* [12] y Maxwell [13] realizaron los primeros experimentos mostrando la manipulación de la luz al nivel de unos cuantos fotones.

En el presente trabajo se resume de forma general el proceso de construcción de un sistema de láseres para la generación de átomos de Rydberg. Este sistema permitirá en un futuro cercano hacer experimentos de vanguardia dentro del marco de la óptica cuántica al grupo de investigación del Laboratorio de Óptica Cuántica de Rydberg de la UNAM.

En el primer capítulo se explican los modelos de interacción entre la luz y la materia que permiten entender cómo las excitaciones de Rydberg son generadas y se deduce una expresión matemática del fenómeno EIT. En el segundo capítulo se describen los tipos de láseres que se utilizan, planteando una explicación sencilla del origen de su espectro de emisión. En el tercer capítulo se describen las propiedades de los átomos de Rydberg y del rubidio, especie atómica seleccionada para este experimento. En el cuarto capítulo se desarrollan las herramientas teóricas que sustentan las técnicas experimentales utilizadas para la estabilización de láseres en este trabajo, aquí se estudia la técnica Pound-Drever-Hall para anclar un láser a una cavidad de alta fineza. En el quinto capítulo se expone la planeación, implementación y caracterización experimental del sistema de láseres. Finalmente, en el capítulo seis se presentan las conclusiones, perspectivas y experimentos que restan por hacer en el futuro cercano del Laboratorio de Óptica Cuántica de Rydberg.

# Capítulo 1

---

---

## Interacción Luz-Materia

---

---

1.1	Átomo de dos niveles . . . . .	6
1.1.1	Interacción átomo-campo . . . . .	6
1.1.2	Aproximación de onda rotante . . . . .	8
1.1.3	Frecuencia de Rabi . . . . .	9
1.1.4	Ecuaciones de evolución . . . . .	10
1.1.5	Marco rotante . . . . .	10
1.1.6	Tratamiento con matriz de densidad . . . . .	11
1.2	Átomo de tres niveles . . . . .	12
1.2.1	Hamiltoniano en el marco rotante . . . . .	12
1.2.2	Ecuación maestra . . . . .	14
1.2.3	Propiedades macroscópicas . . . . .	15

Para entender el proceso de excitación de los átomos a estados de Rydberg es necesario construir un modelo de interacción entre la luz y la materia. Se busca que a partir de dicho modelo se establezcan las condiciones que debe cumplir el sistema de láseres para generar las excitaciones de Rydberg además de predecir fenómenos interesantes derivados de la interacción entre los átomos y el campo electromagnético.

El estudio de la interacción entre la luz y la materia se ha planteado a diferentes niveles de análisis considerando distintos modelos de la estructura tanto de la luz como de la materia. En este texto se hace una descripción semiclásica de la interacción, se considera a la radiación como un campo eléctrico clásico pero se usa la mecánica cuántica para describir al átomo. Este es un enfoque que se ha adoptado extensamente en la literatura [14, 15, 16].

En este trabajo se plantean dos importantes modelos de la materia: los átomos de dos y tres niveles. El modelo del átomo de dos niveles se estudia en la primer sección de este capítulo y

es uno de los problemas canónicos en óptica cuántica. El átomo de tres niveles se aborda en la segunda sección y algunos efectos dramáticos surgirán debido a los múltiples caminos que puede tomar la energía entre los diferentes niveles. Este último servirá para explicar la transparencia electromagnéticamente inducida e introducir más adelante las excitaciones de Rydberg (ver capítulo 3).

## 1.1. Átomo de dos niveles

El modelo semiclásico más sencillo para estudiar la interacción entre la luz y la materia es el átomo de dos niveles. En esta sección se introducen los conceptos básicos y la notación que se usará a lo largo de todo el trabajo.

El estudio de este modelo comienza con una descripción general de la interacción entre el átomo y el campo electromagnético.

### 1.1.1. Interacción átomo-campo

Se considera que el átomo interactúa con un campo electromagnético monocromático clásico que oscila con frecuencia angular  $\omega$ :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \hat{\varepsilon} E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (1.1)$$

en este caso  $\hat{\varepsilon}$  es el vector de polarización del campo,  $\mathbf{r}$  es la coordenada relativa al centro de masa del átomo y  $\mathbf{k}$  es el vector de onda.

Las transiciones de interés para este trabajo se encuentran en el rango óptico donde las longitudes de onda son de cientos de nanómetros. Además, si se considera que el radio de los átomos es del tamaño del radio de Bohr  $a_0$ , se tiene que la longitud de onda del campo es mucho más grande que el tamaño del átomo:

$$\lambda \gg a_0 \implies ka_0 \ll 2\pi, \quad (1.2)$$

De esta forma, la variación de la fase  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  es pequeña alrededor del átomo y se puede aproximar el campo de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \approx \hat{\varepsilon} E_0 \cos(\omega t). \quad (1.3)$$

Esto es llamado aproximación dipolar y corresponde a la contribución de menor orden en la expansión multipolar de la interacción entre el átomo y la luz.

En esta sección se considera al átomo como uno de dos niveles, esto claramente es una aproximación a un átomo real que tiene una cantidad infinita de estados ligados. Este modelo es

válido ya que solo se consideran las interacciones cerca de resonancia, por lo que las transiciones a otros niveles son despreciables. Los estados base y excitado serán  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  respectivamente y  $\omega_0$  será la frecuencia de resonancia, es decir, la separación de energía entre los dos niveles es  $\hbar\omega_0$ . Se define la cantidad  $\Delta := \omega - \omega_0$  que corresponde al desentonamiento del láser respecto a la resonancia atómica como se muestra en la figura 1.1.

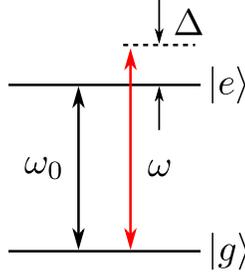


Figura 1.1: Diagrama de los estados y frecuencias de resonancia y desentonamiento en el átomo de dos niveles.

El Hamiltoniano total del sistema estará dado por la suma del Hamiltoniano atómico  $H_A$  y el Hamiltoniano de interacción entre el átomo y el campo  $H_{int}$ :

$$H = H_A + H_{int}. \quad (1.4)$$

Si se considera que la energía del estado base es cero, el Hamiltoniano atómico libre se expresa como:

$$H_A = \hbar\omega_0 |e\rangle \langle e|, \quad (1.5)$$

mientras que el Hamiltoniano de interacción en la aproximación dipolar se puede escribir de la siguiente manera:

$$H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

donde  $\mathbf{d}$  es el operador dipolar atómico. Dada la posición del electrón atómico  $\mathbf{r}_e$ ,  $\mathbf{d}$  adquiere la forma:

$$\mathbf{d} = -e\mathbf{r}_e, \quad (1.7)$$

aquí  $e$  es la carga fundamental y esta expresión es válida si se asume que el átomo tiene un único electrón que interactúa con el campo como es el caso de los átomos alcalinos. Este tipo de interacción es análoga a la interacción de un dipolo clásico con un campo eléctrico y a pesar de que los átomos no tienen un momento dipolar permanente un dipolo es inducido por el campo eléctrico oscilante. Para un desarrollo más riguroso consultar [17].

Ahora el propósito será expresar al operador dipolar en términos de  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$ . Si se aplica la identidad  $|e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| = \mathbf{1}$  de ambos lados del operador dipolar atómico y se analiza su paridad se encuentra que los elementos de la matriz  $\langle a|\mathbf{d}|b\rangle$  sólo serán distintos de cero si los

estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  tienen paridad opuesta. Después de hacer estas observaciones el operador se descompone de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \langle g|\mathbf{d}|e\rangle|g\rangle\langle e| + \langle e|\mathbf{d}|g\rangle|e\rangle\langle g| \\ &= \langle g|\mathbf{d}|e\rangle(\sigma + \sigma^\dagger),\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde  $\sigma := |g\rangle\langle e|$  es conocido como el operador de proyección atómico [9] y  $\langle g|\mathbf{d}|e\rangle$  es una constante que depende de las propiedades atómicas y se calcula a partir de las funciones de onda.

Finalmente, el Hamiltoniano completo adquiere la expresión:

$$H = \underbrace{\hbar\omega_0\sigma^\dagger\sigma}_{H_A} - \underbrace{\langle g|\mathbf{d}|e\rangle \cdot \mathbf{E}}_{H_{int}}(\sigma + \sigma^\dagger),\tag{1.9}$$

donde  $\sigma^\dagger\sigma = |e\rangle\langle e|$  resulta ser el operador de proyección del estado excitado.

### 1.1.2. Aproximación de onda rotante

Si se considera únicamente el hamiltoniano atómico  $H_A$  y se calcula el valor esperado de  $\sigma = |g\rangle\langle e|$ , se encuentra que tiene una dependencia temporal como  $e^{-i\omega_0 t}$ , esto corresponde a un término oscilatorio con frecuencia positiva. Debido a lo anterior, se puede descomponer el operador dipolar atómico en sus partes de frecuencia positiva y negativa:

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \langle g|\mathbf{d}|e\rangle(\sigma + \sigma^\dagger) \\ &= \mathbf{d}^{(+)} + \mathbf{d}^{(-)},\end{aligned}\tag{1.10}$$

además, siguiendo la misma idea, se descompone el campo eléctrico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= \hat{\varepsilon}\frac{E_0}{2}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \\ &=: \mathbf{E}_0^{(+)}e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^{(-)}e^{i\omega t} \\ &=: \mathbf{E}_0^{(+)}(t) + \mathbf{E}_0^{(-)}(t).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Al aplicar esta descomposición en la parte del Hamiltoniano de interacción  $H_{int}$  se encuentra la expresión:

$$\begin{aligned}H_{int} &= -(\mathbf{d}^{(+)} + \mathbf{d}^{(-)}) \cdot (\mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)}) \\ &= -\mathbf{d}^{(+)} \cdot \mathbf{E}^{(+)} - \mathbf{d}^{(-)} \cdot \mathbf{E}^{(-)} - \mathbf{d}^{(+)} \cdot \mathbf{E}^{(-)} - \mathbf{d}^{(-)} \cdot \mathbf{E}^{(+)}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Nótese que los primeros dos términos oscilan con una frecuencia  $\omega + \omega_0$  y los términos cruzados

oscilan con frecuencia  $\Delta = \omega - \omega_0$ . En los casos de interés para este trabajo el desentonamiento  $\Delta$  es pequeño y los términos cruzados oscilan lentamente mientras que los términos que oscilan como  $\omega + \omega_0$  lo hacen a varios cientos de THz por lo que no son detectables en el laboratorio. La aproximación de onda rotante consiste en solo contabilizar los dos términos cruzados que oscilan lentamente y de esta forma el Hamiltoniano de interacción se expresa de la siguiente forma:

$$H_{int} = -\mathbf{d}^{(+)} \cdot \mathbf{E}^{(-)} - \mathbf{d}^{(-)} \cdot \mathbf{E}^{(+)}. \quad (1.13)$$

Como una curiosidad de este Hamiltoniano, nótese que si el campo eléctrico fuera cuántico entonces el primer término en la expresión 1.13 correspondería a la emisión de un fotón y la desexcitación del átomo mientras que el segundo término correspondería a la absorción de un fotón y la excitación del átomo.

Algo que es importante tener en mente es que la aproximación de onda rotante y el modelo de dos niveles se encuentran en el mismo nivel de exactitud, es decir, el hecho de desprestigiar los términos que rotan velozmente y tirar el conjunto infinito de niveles para estudiar solo dos es resultado de considerar un campo eléctrico cerca de resonancia.

### 1.1.3. Frecuencia de Rabi

Se reescribe el Hamiltoniano de interacción exhibiendo la dependencia en frecuencia del operador dipolar y del campo utilizando las ecuaciones 1.10 y 1.11 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_{int} &= -\langle g | \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} | e \rangle \left( E_0^{(-)} \sigma e^{i\omega t} + E_0^{(+)} \sigma^\dagger e^{-i\omega t} \right) \\ &= \frac{\hbar \Omega}{2} \left( \sigma e^{i\omega t} + \sigma^\dagger e^{-i\omega t} \right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

sin pérdida de generalidad, se asume que  $E_0^{(+)}$  es real y se define la frecuencia de Rabi  $\Omega$  como:

$$\begin{aligned} \Omega &:= -\frac{2 \langle g | \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} | e \rangle E_0^{(+)}}{\hbar} \\ &= -\frac{\langle g | \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} | e \rangle E_0}{\hbar}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

La frecuencia de Rabi es de gran relevancia pues caracteriza la fuerza del acoplamiento del átomo y el campo. Al sustituir la expresión del operador dipolar como en la ecuación 1.7 la frecuencia de Rabi toma el valor:

$$\Omega = \frac{eE_0}{\hbar} \int \psi_g^*(r) \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}_e \psi_e(r) d^3\mathbf{r}. \quad (1.16)$$

Nótese que el campo  $E_0$  sale de la integral debido a la aproximación dipolar, es decir, el campo tiene un amplitud casi uniforme alrededor de la función de onda del átomo. Generalmente se

toma la fase del elemento de matriz para tener  $\Omega > 0$ .

#### 1.1.4. Ecuaciones de evolución

Para encontrar las ecuaciones de evolución temporal del sistema se escribe el estado atómico de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle, \quad (1.17)$$

en este caso la dependencia temporal se encuentra en  $c_g$  y  $c_e$ . Al sustituir el Hamiltoniano de la ecuación 1.9 en la ecuación de Shrödinger  $i\hbar\partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle$  se obtiene lo siguiente:

$$\partial_t c_g |g\rangle + \partial_t c_e |e\rangle = -i\omega_0 c_e |e\rangle - i\frac{\Omega}{2} e^{i\omega t} c_e |g\rangle - i\frac{\Omega}{2} e^{-i\omega t} c_g |e\rangle. \quad (1.18)$$

Se toman las proyecciones a los estados  $\langle g|$  y  $\langle e|$  para obtener dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \partial_t c_g &= -i\frac{\Omega}{2} c_e e^{i\omega t} \\ \partial_t c_e &= -i\omega_0 c_e - i\frac{\Omega}{2} c_g e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

al resolver estas ecuaciones se encontrará la evolución temporal del sistema atómico.

#### 1.1.5. Marco rotante

Hasta ahora se dedujeron dos ecuaciones diferenciales acopladas cuyos términos oscilan con frecuencias ópticas. Estos oscilan siempre con diferencias de fase constante cerca de resonancia implicando la existencia de un marco de referencia en el cual los términos no oscilan en el tiempo. Se hace una transformación al *marco rotante* definiendo la amplitud del estado excitado que varía lentamente:

$$\tilde{c}_e := c_e e^{i\omega t}, \quad (1.20)$$

de esta forma las ecuaciones de movimiento se expresan como:

$$\begin{aligned} \partial_t c_g &= -i\frac{\Omega}{2} \tilde{c}_e \\ \partial_t \tilde{c}_e &= i\Delta \tilde{c}_e - i\frac{\Omega}{2} c_g. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Esto equivale a tener un Hamiltoniano efectivo:

$$\tilde{H} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega/2 \\ \Omega/2 & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

En el apéndice A se revisa a detalle la transformación del Hamiltoniano al marco rotante. Así mismo, en el apéndice B se estudian algunos casos específicos de la dinámica de este sistema.

### 1.1.6. Tratamiento con matriz de densidad

Ahora se analiza el mismo problema utilizando la matriz de densidad para representar el estado del sistema. Este enfoque permite modelar procesos no unitarios como el efecto del decaimiento. En este caso se utiliza la ecuación de Liouville-von Neumann para encontrar la evolución temporal del sistema:

$$\partial_t \tilde{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}, \tilde{\rho}], \quad (1.23)$$

donde la matriz de densidad está dada por  $\tilde{\rho} = |\tilde{\psi}\rangle \langle \tilde{\psi}|$ , que en forma matricial se lee:

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} |c_g|^2 & c_g \tilde{c}_e^* \\ c_g^* \tilde{c}_e & |c_e|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \tilde{\rho}_{ge} \\ \tilde{\rho}_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Al desarrollar la ecuación de evolución 1.23 usando la matriz de densidad y el Hamiltoniano 1.22 se encuentran 4 ecuaciones diferenciales acopladas que determinan a los elementos de la matriz:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{gg} &= \frac{i\Omega}{2} (\tilde{\rho}_{ge} - \tilde{\rho}_{eg}) \\ \partial_t \tilde{\rho}_{ge} &= \frac{i\Omega}{2} (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - i\Delta \tilde{\rho}_{ge} \\ \partial_t \tilde{\rho}_{eg} &= \frac{i\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) + i\Delta \tilde{\rho}_{eg} \\ \partial_t \rho_{ee} &= \frac{i\Omega}{2} (\tilde{\rho}_{eg} - \tilde{\rho}_{ge}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

La forma típica de incluir los procesos no unitarios es con el método de la ecuación maestra, en este texto no se aborda la extensa teoría sobre este tema; sin embargo, en [18] se puede estudiar la construcción de estos conceptos. La ecuación maestra que se propone para estudiar el átomo de dos niveles con decaimientos es:

$$\partial_t \tilde{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}, \tilde{\rho}] + \Gamma \mathcal{D}[\sigma] \tilde{\rho} + \gamma_c \mathcal{D}[\sigma_z] \tilde{\rho}, \quad (1.26)$$

donde  $\sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$  es uno de los operadores de Pauli, la tasa de decaimiento  $\Gamma$  corresponde al decaimiento por emisión espontánea de la población del estado excitado al estado base,  $\gamma_c$  permite contabilizar las pérdidas de coherencia debido a colisiones entre los átomos y  $\mathcal{D}[c] \tilde{\rho}$  es conocido como el súper operador Lindbladiano. Este último es llamado un “súper operador” debido a que opera sobre  $\rho$  de ambos lados y toma la forma:

$$\mathcal{D}[c] \tilde{\rho} = c \tilde{\rho} c^\dagger - \frac{1}{2} (c^\dagger c \tilde{\rho} + \tilde{\rho} c^\dagger c). \quad (1.27)$$

Al desarrollar la ecuación 1.26 se obtiene un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_{gg} &= \frac{i\Omega}{2} (\tilde{\rho}_{ge} - \tilde{\rho}_{eg}) + \Gamma \rho_{ee} \\
\partial_t \tilde{\rho}_{ge} &= \frac{i\Omega}{2} (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - (\gamma_{\perp} + i\Delta) \tilde{\rho}_{ge} \\
\partial_t \tilde{\rho}_{eg} &= \frac{i\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) - (\gamma_{\perp} - i\Delta) \tilde{\rho}_{eg} \\
\partial_t \rho_{ee} &= \frac{i\Omega}{2} (\tilde{\rho}_{eg} - \tilde{\rho}_{ge}) - \Gamma \rho_{ee}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Donde  $\gamma_{\perp}$  es un término que surge a partir de la fenomenología de este tipo de sistemas [14]. Por ahora basta con saber que en general  $\gamma_{\perp} \geq \Gamma/2$  y se puede escribir:

$$\gamma_{\perp} = \frac{\Gamma}{2} + \gamma_c. \tag{1.29}$$

Al resolver el conjunto de ecuaciones 1.28 se encontrará la evolución temporal del sistema atómico.

## 1.2. Átomo de tres niveles

En la sección anterior se habló sobre la teoría del átomo de dos niveles y ahora se da paso al estudio del átomo de tres niveles. En esta sección se avanza más rápido pues muchos de los cálculos necesarios para deducir el Hamiltoniano del sistema son análogos a los que se expusieron en la sección anterior.

Este modelo es relevante para la generación de átomos de Rydberg debido a que la excitación directa del estado base a un estado de Rydberg es impráctica pues los fotones con longitud de onda necesaria no son fáciles de producir experimentalmente (ver subsección 3.2.2). Generar excitaciones de Rydberg a través de un esquema que utiliza dos fotones es más sencillo y además brinda una mayor versatilidad pues surgen fenómenos que serán utilizados para la detección de los átomos de Rydberg como la transparencia electromagnéticamente inducida (ver sección 6.2).

### 1.2.1. Hamiltoniano en el marco rotante

Considérese la estructura de niveles energéticos del átomo en la configuración de escalera como se muestra en la figura 1.2, el estado base  $|g\rangle$  se acopla a un primer estado excitado  $|e\rangle$  con una frecuencia de resonancia  $\omega_1$ , esto implica que hay una diferencia energética  $\hbar\omega_1$  entre los niveles. Además, se tiene un segundo estado excitado  $|r\rangle$  que a su vez tiene una diferencia energética con  $|e\rangle$  de  $\hbar\omega_2$ . En esta configuración se supondrá que los estados  $|g\rangle$  y  $|r\rangle$  tienen la misma paridad que a su vez es opuesta a la paridad del estado  $|e\rangle$ .

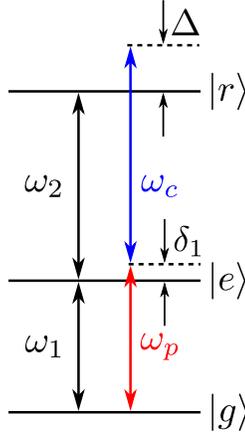


Figura 1.2: Diagrama de los estados y frecuencias de resonancia y desintonamiento en el átomo de tres niveles.

De nueva cuenta, se considera un modelo semiclásico pero ahora se incluye un segundo campo eléctrico buscando que la superposición de los dos interactúe con el átomo para llevarlo al segundo estado excitado. El campo se expresará como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\varepsilon}_p E_p \cos(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega_p t) + \hat{\varepsilon}_c E_c \cos(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega_c t), \quad (1.30)$$

se llamará *campo de prueba* al campo que oscila con frecuencia  $\omega_p$  y tiene un vector de polarización  $\hat{\varepsilon}_p$ , este es el haz que acopla al estado base con el primer estado excitado. De forma similar se nombra *campo de control* al que oscila con frecuencia  $\omega_c$  y tiene un vector de polarización  $\hat{\varepsilon}_c$ , este campo acopla al primer estado excitado con el segundo. Tomando la aproximación dipolar y descomponiendo al campo en sus partes de frecuencia positiva y negativa se obtiene:

$$\mathbf{E}(t) = \underbrace{\frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}_p E_p e^{-i\omega_p t} + \hat{\varepsilon}_c E_c e^{-i\omega_c t})}_{\mathbf{E}^{(+)}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} (\hat{\varepsilon}_p E_p e^{i\omega_p t} + \hat{\varepsilon}_c E_c e^{i\omega_c t})}_{\mathbf{E}^{(-)}(t)}. \quad (1.31)$$

Se definen las cantidades  $\delta_1 := \omega_p - \omega_1$  y  $\delta_2 := \omega_c - \omega_2$  que corresponden a los desintonamientos de cada láser respecto a las frecuencias de resonancia correspondientes y de esta forma se define  $\Delta = \delta_1 + \delta_2$ .

El Hamiltoniano atómico del átomo de tres niveles se expresa de la siguiente forma:

$$H_A = \hbar\omega_1 |e\rangle \langle e| + \hbar(\omega_1 + \omega_2) |r\rangle \langle r|. \quad (1.32)$$

Por otra parte, el Hamiltoniano de interacción entre la luz y los átomos se expresará de la misma forma que como en la ecuación 1.13; sin embargo, ahora es necesario descomponer al operador dipolar utilizando la matriz unidad completa que contiene a un estado más  $|g\rangle \langle g| +$

$|e\rangle\langle e| + |r\rangle\langle r| = \mathbb{1}$ , de tal forma que el operador dipolar ahora se expresa como:

$$\mathbf{d} = \underbrace{\langle g|\mathbf{d}|e\rangle\sigma_1 + \langle e|\mathbf{d}|r\rangle\sigma_2}_{\mathbf{d}^{(+)}} + \underbrace{\langle g|\mathbf{d}|e\rangle\sigma_1^\dagger + \langle e|\mathbf{d}|r\rangle\sigma_2^\dagger}_{\mathbf{d}^{(-)}}, \quad (1.33)$$

donde  $\sigma_1 = |g\rangle\langle e|$  y  $\sigma_2 = |e\rangle\langle r|$  son los operadores de proyección para este sistema. De nuevo, se toma la aproximación de onda rotante notando que si se considera únicamente el hamiltoniano atómico  $H_A$  y se calcula el valor esperado de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  estos tendrán una dependencia temporal como  $e^{-i\omega_1 t}$  y  $e^{-i\omega_2 t}$  respectivamente, tomando esto en cuenta y haciendo las aproximaciones  $\omega_2 \gg \omega_1$ ,  $\omega_1 \approx \omega_p$  y  $\omega_2 \approx \omega_c$ , el Hamiltoniano de interacción toma la forma:

$$H_{int} = \frac{\hbar\Omega_p}{2} \left( e^{i\omega_p t} \sigma_1 + e^{-i\omega_p t} \sigma_1^\dagger \right) + \frac{\hbar\Omega_c}{2} \left( e^{i\omega_c t} \sigma_2 + e^{-i\omega_c t} \sigma_2^\dagger \right), \quad (1.34)$$

donde:

$$\Omega_p = -\frac{\langle g|\hat{\varepsilon}_p \cdot \mathbf{d}|e\rangle E_p}{\hbar} \quad \text{y} \quad \Omega_c = -\frac{\langle e|\hat{\varepsilon}_c \cdot \mathbf{d}|r\rangle E_c}{\hbar} \quad (1.35)$$

son las frecuencias de Rabi para este sistema. El Hamiltoniano completo  $H = H_A + H_{int}$  en su forma matricial se escribe como:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_p}{2} e^{i\omega_p t} & 0 \\ \frac{\Omega_p}{2} e^{-i\omega_p t} & \omega_1 & \frac{\Omega_c}{2} e^{i\omega_c t} \\ 0 & \frac{\Omega_c}{2} e^{-i\omega_c t} & \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Finalmente para tirar por completo la dependencia temporal se hace la transformación al marco rotante. Para realizar esto se propone la matriz de transformación unitaria:

$$U = \exp(i\omega_p t |e\rangle\langle e| + i(\omega_p + \omega_c)t |r\rangle\langle r|). \quad (1.37)$$

El Hamiltoniano en el marco rotante se expresa como:

$$\tilde{H} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_p}{2} & 0 \\ \frac{\Omega_p}{2} & -\delta_1 & \frac{\Omega_c}{2} \\ 0 & \frac{\Omega_c}{2} & -\delta_1 - \delta_2 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

### 1.2.2. Ecuación maestra

Igual que en el átomo de dos niveles, ahora se lleva la discusión al contexto de la matriz de densidad pues allí se pueden incluir procesos no unitarios como los decaimientos.

La ecuación maestra que se estudiará en este caso es la siguiente:

$$\partial_t \tilde{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}, \tilde{\rho}] + \Gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_1] \tilde{\rho} + \Gamma_2 \mathcal{D}[\sigma_2] \tilde{\rho} + \gamma_g \mathcal{D}[\sigma_g] \tilde{\rho}, \quad (1.39)$$

donde  $\tilde{\rho}$  es la matriz de densidad en el marco rotante,  $\Gamma_1$  es la tasa de decaimiento del estado  $|e\rangle$  al estado base  $|g\rangle$  como se muestra en la figura 1.3,  $\Gamma_2$  es la tasa de decaimiento de  $|r\rangle$  a  $|e\rangle$ ,  $\gamma_g$  permite modelar procesos de pérdida de coherencia entre los estados y el súper operador Lindbladiano se define igual que en la sección anterior (ver ecuación 1.27). Aquí  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  están definidos igual que antes y  $\sigma_g = |g\rangle\langle g| - |r\rangle\langle r|$ .

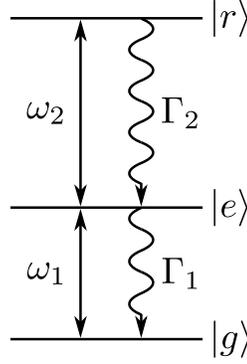


Figura 1.3: Diagrama de los estados y decaimientos para el átomo de tres niveles.

### 1.2.3. Propiedades macroscópicas

La ecuación 1.39 es muy útil pues permite analizar la respuesta óptica del medio al campo externo como se expone a continuación.

La polarización del medio esta dada por:

$$\mathbf{P}^{(+)} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}^{(+)}, \quad (1.40)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío y  $\chi$  es la susceptibilidad lineal del medio que puede tomar valores complejos, este último es de particular interés pues está relacionado con el índice de refracción y con las propiedades de absorción. Por otra parte, si se estudia la respuesta del medio cuando el estímulo es únicamente el láser de prueba se puede relacionar la polarización del ensamble atómico con el momento dipolar de la siguiente forma:

$$\mathbf{P}^{(+)} = N \langle \mathbf{d}^{(+)} \rangle = N \langle g | \mathbf{d} | e \rangle \tilde{\rho}_{eg}, \quad (1.41)$$

con  $N$  la densidad numérica de átomos. De las definiciones 1.40 y 1.41 se calcula el valor de la susceptibilidad para este caso específico. Tomando el producto punto con  $\hat{\epsilon}_p$  en las ecuaciones 1.40 y 1.41 y considerando que  $\hat{\epsilon}_p \cdot \hat{\epsilon}_c = 0$ , se despeja la susceptibilidad en función únicamente del campo de prueba:

$$\chi = \frac{2N \langle g | \hat{\epsilon}_p \cdot \mathbf{d} | e \rangle}{\epsilon_0 E_p} \tilde{\rho}_{eg} = - \frac{2N \langle g | \hat{\epsilon}_p \cdot \mathbf{d} | e \rangle^2}{\epsilon_0 \Omega_p \hbar} \tilde{\rho}_{eg}. \quad (1.42)$$

Para llegar a la tercer igualdad se utilizó la definición de la frecuencia de Rabi para el campo de prueba que se escribió anteriormente en la ecuación 1.35.

El valor de la susceptibilidad se establece a partir de la ecuación diferencial que cumple elemento de matriz  $\tilde{\rho}_{eg}$  (ver ecuación 1.39):

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{\rho}_{eg} &= \left[ -\frac{\Gamma_1}{2} + i\delta_1 - \frac{\gamma_g}{2} \right] \tilde{\rho}_{eg} + \frac{i\Omega_p}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) - \frac{i\Omega_c}{2} \tilde{\rho}_{rg} \\ &\approx \left[ -\frac{\Gamma_1}{2} + i\delta_1 - \frac{\gamma_g}{2} \right] \tilde{\rho}_{eg} - \frac{i\Omega_p}{2} - \frac{i\Omega_c}{2} \tilde{\rho}_{rg},\end{aligned}\quad (1.43)$$

aquí se hicieron las aproximaciones  $\rho_{gg} \approx 1$  y  $\rho_{ee} \approx 0$  para pasar del primer al segundo renglón, esto es equivalente a decir que el haz de prueba es débil y casi toda la población se encuentra en el estado base. Nótese que esta ecuación se encuentra acoplada al elemento de matriz  $\tilde{\rho}_{rg}$ . Se determina el valor de dicho elemento a partir de su ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{\rho}_{rg} &= \left[ -\frac{\Gamma_2}{2} + (\delta_1 + \delta_2) - 2\gamma_g \right] \tilde{\rho}_{rg} - \frac{i\Omega_c}{2} \tilde{\rho}_{eg} - i\frac{\Omega_p}{2} \tilde{\rho}_{re} \\ &\approx \left[ -\frac{\Gamma_2}{2} + (\delta_1 + \delta_2) - 2\gamma_g \right] \tilde{\rho}_{rg} - \frac{i\Omega_c}{2} \tilde{\rho}_{eg},\end{aligned}\quad (1.44)$$

de nueva cuenta, se ha hecho la aproximación del haz de prueba débil al tomar  $\Omega_p$  pequeño. Por otra parte, si se resuelven las ecuaciones para el elemento de matriz  $\tilde{\rho}_{re}$  se encuentra que su valor es muy pequeño por lo que se puede descartar el término que depende proporcionalmente de  $\Omega_p \tilde{\rho}_{re}$ .

Al resolver la ecuación 1.44 en el caso estacionario ( $\partial_t \tilde{\rho}_{rg} = 0$ ) y despejar el elemento de matriz  $\tilde{\rho}_{rg}$  en términos de  $\tilde{\rho}_{eg}$  se encuentra:

$$\tilde{\rho}_{rg} = \frac{\Omega_c \tilde{\rho}_{eg}}{2 [i\Gamma_2/2 + (\delta_1 + \delta_2) + 2i\gamma_g]},\quad (1.45)$$

se sustituye este valor para resolver el caso estacionario en la ecuación 1.43 y así establecer el valor de  $\tilde{\rho}_{eg}$ :

$$\tilde{\rho}_{eg} = \frac{(i\Omega_p/2) [-\Gamma_2/2 + i(\delta_1 + \delta_2) - 2\gamma_g]}{[-\Gamma_2/2 + i(\delta_1 + \delta_2) - 2\gamma_g] [-\Gamma_1/2 + i\delta_1 - \gamma_g/2] - (i\Omega_c/2)^2}.\quad (1.46)$$

Por último se sustituye el valor de  $\tilde{\rho}_{eg}$  en la susceptibilidad:

$$\chi = -i \frac{N \langle g | \hat{\varepsilon}_p \cdot \mathbf{d} | e \rangle^2}{\hbar \epsilon_0} \frac{[-\Gamma_2/2 + i(\delta_1 + \delta_2) - 2\gamma_g]}{[-\Gamma_2/2 + i(\delta_1 + \delta_2) - 2\gamma_g] [-\Gamma_1/2 + i\delta_1 - \gamma_g/2] - (i\Omega_c/2)^2}.\quad (1.47)$$

Considérese el caso en que  $\delta_2 = 0$  mientras varía el campo de prueba alrededor de la frecuencia de resonancia de la transición al primer estado excitado, se analiza lo que le sucede

al láser de prueba al pasar por el medio atómico. La parte imaginaria de la susceptibilidad dará el coeficiente de absorción del medio mientras que la parte real proporciona el índice de refracción. Como se observa en la figura 1.4, en ausencia del campo de control el medio tiene un máximo de absorción cuando el desintonamiento del láser de prueba es cero, es decir, el medio se vuelve opaco en la frecuencia de resonancia pues los átomos absorben la luz; sin embargo, al encender el haz de control se crea una ventana de transmisión exactamente a la frecuencia de resonancia de la transición al primer estado excitado. Este fenómeno es conocido como transparencia electromagnéticamente inducida, EIT por sus siglas en inglés, y puede ser utilizado para detectar estados de Rydberg de una forma no destructiva (ver sección 6.2).

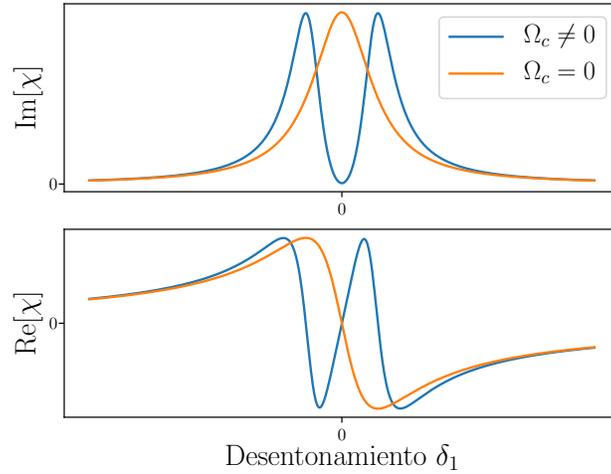


Figura 1.4: Susceptibilidad del medio atómico en función del desintonamiento  $\delta_1 = \omega_p - \omega_1$  para un átomo de tres niveles, cuando  $\delta_2 = 0$  se tiene EIT. La parte imaginaria de la susceptibilidad caracteriza la absorción mientras que la parte real determina las propiedades del índice de refracción del medio.

En el fenómeno de EIT los campos ópticos y los materiales son modificados debido a la creación de coherencia en los estados atómicos. Dicha coherencia es inducida por el láser de control provocando interferencia entre los distintos caminos de excitación que controlan la respuesta óptica del medio. Su importancia reside en el hecho de que se produce una gran susceptibilidad no lineal en la región espectral donde se genera la transparencia y esto es asociado con una dispersión abrupta [9]. Dado que la velocidad de grupo de la luz transmitida es inversamente proporcional a la pendiente del índice de refracción del medio, este fenómeno se puede utilizar para frenar la luz a velocidades de unos cuantos metros por segundo [19], ya que como se muestra en la figura 1.4 el perfil del índice de refracción presenta una pendiente abrupta en la frecuencia de resonancia.

Si en cambio se toma un desintonamiento  $\delta_2$  grande en comparación a la tasa de decaimiento

$\Gamma_1$  y a la frecuencia de Rabi  $\Omega_c$ , el sistema se comporta efectivamente como uno de dos niveles ya que el primer nivel excitado nunca es poblado. La dinámica efectiva de este sistema puede ser aproximada por un Hamiltoniano de dimensiones menores que el original y el procedimiento a través del cual se deshechan los estados irrelevantes del sistema para derivar el Hamiltoniano efectivo es conocido como eliminación adiabática [14, 20]. En la figura 1.5 se observa el coeficiente de absorción de este sistema, se puede apreciar el surgimiento de un segundo máximo de absorción.

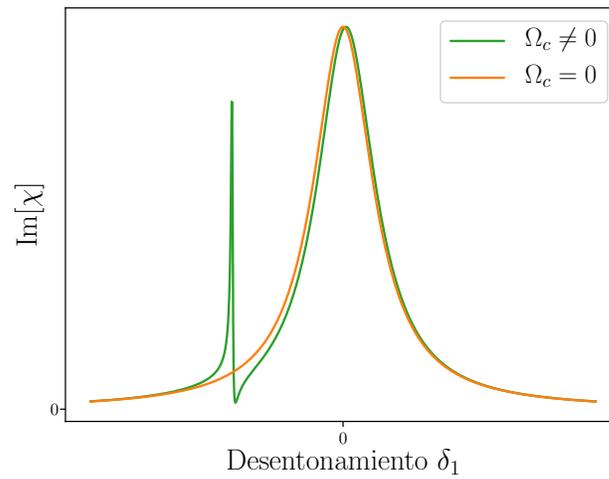


Figura 1.5: Absorción del medio atómico en función del desintonamiento  $\delta_1 = \omega_p - \omega_1$  para un átomo de tres niveles cuando  $\delta_2 \gg \Gamma_1$ . Además de observar el pico central correspondiente a la transición  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  se observa un pico adicional correspondiente a la transición  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |r\rangle$ .

En los siguientes capítulos se discutirán las consideraciones experimentales necesarias para implementar estos modelos.

## Capítulo 2

---

---

# Láseres

---

---

2.1	Conceptos generales . . . . .	20
2.1.1	Configuración cat-eye . . . . .	21
2.1.2	Configuración Littrow . . . . .	22
2.2	Propiedades de la luz aleatoria . . . . .	22
2.2.1	Intensidad . . . . .	23
2.2.2	Coherencia temporal . . . . .	24
2.2.3	Espectro . . . . .	27
2.3	Forma de línea láser . . . . .	28

Los láseres son dispositivos que generan o amplifican radiación coherente en el rango de frecuencias infrarrojas, visible o ultravioleta del espectro electromagnético [21]. Operan bajo un principio general originalmente creado para frecuencias de microondas que se llamó amplificación de microondas por emisión estimulada de radiación, “maser” por sus siglas en inglés, inventado en 1955 por Charles H. Townes y sus estudiantes de posgrado James P. Gordon y Herbert J. Zeiger. Este concepto se extendió a las frecuencias ópticas en mayo de 1960 cuando Theodore Maiman creó el primer dispositivo de amplificación de luz por emisión estimulada de radiación o “láser”.

Los láseres han servido como una herramienta para infinidad de avances científicos en diversas áreas de la física. Desde el descubrimiento del enfriamiento láser alrededor de 1985 por William D. Phillips, Cohen-Tannoudji y Steven Chu, que dio paso a la realización experimental del primer condensado de Bose-Einstein en 1995 por Eric Cornell y Carl Wieman, hasta la reciente comprobación experimental de las ondas gravitacionales observadas por primera vez en septiembre del 2015 en el experimento LIGO. En México se logró el primer condensado de Bose-Einstein, siendo además el primer condensado fermiónico de América Latina, en el Labo-

ratorio de Materia Ultrafría (LMU) de la UNAM bajo la supervisión del Dr. Jorge Amin Seman Harutinian el 24 de octubre del 2018 por lo que el interés en la física experimental relacionada con los láseres es vigente y relevante.

En este trabajo la atención se centra en las cualidades ópticas de los láseres, su angosto espectro de emisión y alta potencia desempeñan un papel fundamental dentro de la interacción luz-materia que da paso a la generación de los estados de Rydberg. En este caso, los láseres representan el campo eléctrico clásico que se describió en el capítulo 1.

En las siguientes secciones se hace un tratamiento general de los tipos de láseres utilizados en este experimento así como las propiedades generales de la luz láser y el origen de su espectro de emisión.

## 2.1. Conceptos generales

En esta sección se exponen las generalidades acerca del funcionamiento básico de los láseres centrandó la discusión en los temas de interés para este trabajo. El tratamiento desarrollado en los párrafos siguientes se basa en [21, 22] donde se estudia a profundidad la teoría sobre estos dispositivos.

La luz láser presenta una gran cantidad de características deseables para la física experimental ya que los haces tienen muy poca divergencia, pueden llegar a tener alta potencia y su luz es casi monocromática. De forma general están compuestos por tres elementos:

- Fuente
- Medio de ganancia
- Resonador óptico

La **fente** es el reservorio de energía que se convierte en luz láser. Para los láseres utilizados en este trabajo la fuente es eléctrica.

El **medio de ganancia** realiza la conversión de la energía de la fuente a luz coherente amplificando la luz que pasa por él. En este caso se utiliza un láser de diodo que es un semiconductor compacto, eficiente y de bajo costo, pero que tiene un pobre control en la longitud de onda de emisión y estabilidad. Los diodos tienen una cavidad interna cuya parte trasera es altamente reflejante y la cara delantera tiene alta transmisión, esta cavidad es llamada interna o intrínseca.

El **resonador óptico** recicla la luz que pasa por el medio de ganancia para lograr una mayor amplificación. Los resonadores son al mismo tiempo filtros seleccionadores de frecuencias que permiten operar el láser dentro de un rango de algunos nm alrededor de la longitud de onda nominal de emisión. En la sección 4.2 se hace una descripción completa de la física de los resonadores ópticos.

A continuación se describen los dos tipos de resonadores ópticos externos utilizados en este experimento.

### 2.1.1. Configuración cat-eye

Los láseres del tipo cat-eye, ojo de gato por su traducción del inglés<sup>1</sup>, tienen un resonador óptico externo formado entre la parte trasera altamente reflejante del diodo y un reflector tipo ojo de gato alejado a una distancia  $d$ , típicamente de algunos centímetros. El retroreflector esta formado por un lente y un acoplador de salida que es un espejo parcialmente reflejante, el diagrama de esta configuración se muestra en la figura 2.1. Este tipo de láseres son conocidos en la literatura como “CEL” por sus siglas en inglés y forman parte de los láseres de diodo de cavidad exterior “ECDL”.

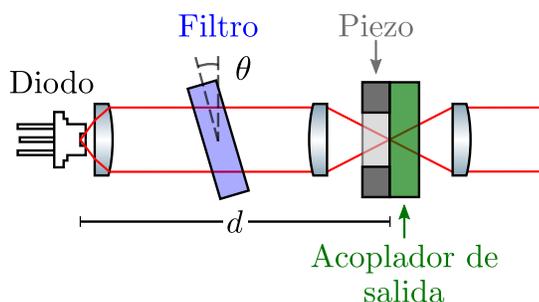


Figura 2.1: Diagrama esquemático de un láser de diodo de cavidad externa cat-eye.

A la salida del diodo se colima el haz con una lente de apertura numérica grande. Un filtro de alta transmisión se utiliza para seleccionar la longitud de onda de emisión al variar el ángulo de incidencia  $\theta$ . Este tipo de retroreflector refleja la radiación de vuelta a su fuente con una dispersión mínima y funciona para un amplio rango de ángulos de incidencia, razón por la cual se acopla luz de vuelta al diodo de una forma eficiente. La configuración cateye se encuentra inherentemente alineada por lo que el láser es extremadamente insensible a perturbaciones mecánicas.

Un cristal piezoeléctrico permite variar de manera controlada la distancia entre el diodo y el acoplador de salida en escalas nanométricas modificando las frecuencias resonantes con la cavidad externa, logrando así selectividad en la frecuencia de emisión del sistema. Control en temperatura y corriente permiten que este tipo de sistemas alcancen anchos de línea de sub-MHz en el espectro de emisión. En las secciones 2.2 y 2.3 se estudia a profundidad el concepto y origen del ancho de línea.

<sup>1</sup>El nombre “cat-eye” deriva del fenómeno de retroreflexión presente los ojos de los gatos y otros vertebrados que produce el efecto característico de ojos brillosos.

### 2.1.2. Configuración Littrow

Los láseres en la configuración Littrow son otro tipo de ECDL en los cuales se forma una cavidad externa entre la superficie trasera reflejante del diodo y una rejilla de difracción separados varios centímetros (ver [23, 24]). El haz de salida del diodo es colimado con una lente de apertura numérica grande para posteriormente incidir sobre una rejilla de difracción. La rejilla de difracción se coloca de tal manera que la reflexión de primer orden se dirija de regreso al diodo. Modificando el ángulo de incidencia  $\theta$  se centra el espectro de emisión del láser en  $\lambda = 2d \sin \theta$  donde  $d$  es la distancia entre el diodo y la rejilla de difracción.

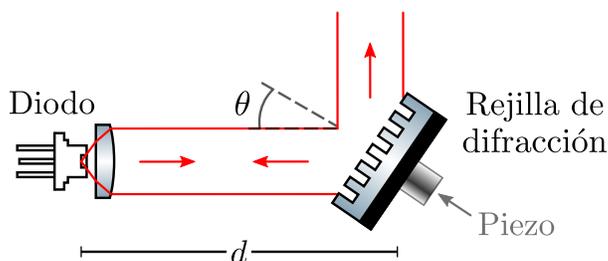


Figura 2.2: Diagrama esquemático de un láser de diodo de cavidad externa en la configuración Littrow.

Un problema con este diseño es que existe una competencia entre el modo de la cavidad interna del diodo, la rejilla de difracción y la cavidad externa. El comportamiento de estos elementos es diferente respecto a variaciones en la temperatura, longitud de la cavidad o ángulo de incidencia en la rejilla de difracción y esto limita la estabilidad en frecuencia del láser; sin embargo, se pueden lograr rangos amplios de operación al escanear la longitud de la cavidad al mismo tiempo que se rota la rejilla de difracción. Para un estudio a profundidad de este comportamiento ver [25].

Pequeños cambios en la frecuencia de emisión pueden lograrse controlando la longitud de la cavidad externa del láser con un cristal piezoeléctrico. La rejilla de difracción es desplazada al aplicar una rampa de voltaje al piezo produciendo un desplazamiento en frecuencia. Con un control en la temperatura y corriente que alimenta al diodo se pueden alcanzar anchos de línea entre 120 kHz y 300 kHz para parámetros típicos de operación en esta configuración.

## 2.2. Propiedades de la luz aleatoria

En esta sección se hace una descripción matemática de las propiedades físicas que caracterizan a cierto tipo de luz llamada luz aleatoria. Esto permitirá determinar más adelante cuáles son las propiedades que un sistema de láseres debe tener para generar átomos de Rydberg (ver subsección 3.2.2). Los párrafos siguientes se basan en [26].

La luz coherente o determinista es aquella para la cual la dependencia de su función de onda en el tiempo y posición es periódica y predecible como puede ser una onda monocromática  $e(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{E(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}$ , donde  $\omega = 2\pi\nu$  es la frecuencia angular y  $E(\mathbf{r})$  es una función compleja determinista, por ejemplo:  $E(\mathbf{r}) = Ae^{-ikr}/r$  para una onda esférica. Existe otro tipo de luz llamada luz aleatoria para la cual la función  $E(\mathbf{r}, t)$  es aleatoria y se caracteriza por cantidades promediadas, en este caso la dependencia de la onda en el tiempo y la posición dejan de ser totalmente predecibles y generalmente deberán ser descritas con métodos estadísticos. La aleatoriedad en la luz puede provenir de fluctuaciones impredecibles en la fuente o del medio a través del cual se propaga.

La materia que se encarga del estudio de las propiedades de la luz aleatoria es la óptica estadística y a continuación se explican las cantidades más importantes que caracterizan a este tipo de luz.

### 2.2.1. Intensidad

Considérese la función de onda compleja  $E(\mathbf{r}, t)$  como solución a la ecuación escalar de Helmholtz:

$$\nabla^2 E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

donde  $E$  puede ser cualquier componente del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y  $c$  es la velocidad de la luz en el medio definida como  $c := c_0/n$ , con  $n$  el índice de refracción del medio dieléctrico y  $c_0$  la velocidad de la luz en el vacío. Nótese que la ecuación 2.1 solo es válida en casos donde las diferentes componentes vectoriales del campo no se mezclan. Esta resulta ser una aproximación útil ya que es más fácil de manejar que el caso vectorial.

La intensidad  $I(\mathbf{r}, t)$  de luz coherente y determinista se define como la norma al cuadrado de la función de onda compleja  $E(\mathbf{r}, t)$ :

$$I(\mathbf{r}, t) = |E(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (2.2)$$

aquí se ha tomado la convención:

$$E(\mathbf{r}, t) := \frac{E(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{2\eta_0}}, \quad (2.3)$$

con  $\eta_0$  la impedancia del vacío:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0} \approx 377 \Omega, \quad (2.4)$$

donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío y  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío.

Para luz monocromática y determinista la intensidad es independiente del tiempo. En el caso en que la función de onda compleja  $E(\mathbf{r}, t)$  es aleatoria, la intensidad  $|E(\mathbf{r}, t)|^2$  también lo

es y se define la intensidad promedio dependiente del tiempo como:

$$I(\mathbf{r}, t) = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle, \quad (2.5)$$

donde el símbolo  $\langle \cdot \rangle$  denota un promedio sobre múltiples realizaciones de la función aleatoria. Experimentalmente esto significa una realización repetida de la onda siempre bajo las mismas condiciones.

La intensidad promedio puede ser independiente del tiempo cuando la onda es estadísticamente estacionaria, es decir que los promedios son invariantes en el tiempo. Estacionario no siempre significa constante, significa que hay una constancia de las propiedades promedio. En el caso en que la luz es estacionaria se puede promediar la intensidad sobre un periodo largo en lugar de hacer varias realizaciones de la onda, en este caso se tiene:

$$I(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |E(\mathbf{r}, t)|^2 dt. \quad (2.6)$$

### 2.2.2. Coherencia temporal

Supóngase una onda estacionaria (cantidades promedio invariantes del tiempo) fija en un punto espacial  $\mathbf{r}_0$ , esto permite dejar a un lado la dependencia espacial para simplificar la notación. Las fluctuaciones aleatorias de  $E(t)$  están caracterizadas por una escala temporal llamada memoria de la función. Para intervalos temporales mayores que la memoria de la función esta parecerá errática y tendrá cambios abruptos, en cambio, al examinar la función por periodos más cortos que la memoria esta tendrá una apariencia más suave. Una medida que cuantifica estas características es un promedio estadístico conocido como la función de autocorrelación. Esta función dice hasta qué punto la onda fluctúa de la misma forma dentro de un intervalo y se define como:

$$G(\tau) = \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle, \quad (2.7)$$

una definición equivalente es:

$$G(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E^*(t)E(t + \tau) dt, \quad (2.8)$$

donde  $\tau$  es el retraso temporal entre las realizaciones de la onda.

Para entender el significado de la expresión 2.7 se piensa en la fase de  $G(\tau)$ , que resulta ser el ángulo entre los fasores  $E(t)$  y  $E(t + \tau)$ . Si estos dos fasores no están correlacionados el ángulo entre ellos varía aleatoriamente entre 0 y  $2\pi$  como se muestra en la figura 2.3, el fador  $E^*(t)E(t + \tau)$  tiene un ángulo incierto por lo que puede tomar cualquier dirección y al hacer su promedio se obtiene que la función de autocorrelación  $G(t)$  es igual a cero. Por el contrario,

si  $E(t)$  y  $E(t + \tau)$  están correlacionados entonces mantendrán alguna relación entre ellos y el producto  $E^*(t)E(t + \tau)$  tendrá una dirección preferencial, por lo que  $G(t)$  será diferente de cero.

En el lenguaje de la teoría de coherencia óptica la función de autocorrelación  $G(\tau)$  se conoce como la función de coherencia temporal. Se puede mostrar que  $G(\tau)$  tiene simetría hermitiana, es decir  $G(-\tau) = G^*(\tau)$ . Además, la intensidad definida en 2.5 es igual a  $G(\tau)$  al tomar  $\tau = 0$  por lo que la función de coherencia temporal contiene información acerca de la intensidad y del grado de correlación o coherencia de la luz estacionaria.

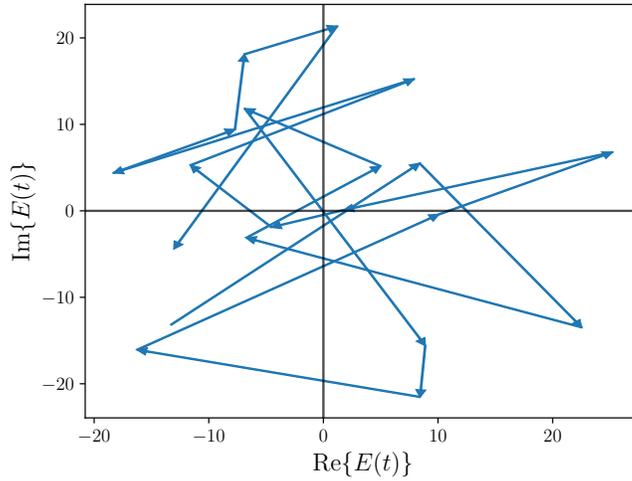


Figura 2.3: Cambio del fasor  $E(t)$  respecto al tiempo cuando su argumento está distribuido uniformemente entre  $0$  y  $2\pi$ . El promedio de sus partes real e imaginaria es cero, por lo que  $\langle E(t) \rangle = 0$

Una medida de coherencia que no está relacionada con la intensidad es la función de autocorrelación normalizada que se define como:

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)} = \frac{\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle}. \quad (2.9)$$

Esta nueva función es llamada el grado complejo de coherencia temporal y su valor absoluto no puede ser mayor que uno:

$$0 \leq |g(\tau)| \leq 1. \quad (2.10)$$

El valor de  $|g(\tau)|$  es una medida del grado de correlación entre  $E(t)$  y  $E(t + \tau)$ . En el caso de luz determinista y monocromática se encontrará que  $|g(\tau)| = 1$  para todo  $\tau$ , luego entonces las funciones  $E(t)$  y  $E(t + \tau)$  se encuentran completamente correlacionadas para todo retraso temporal  $\tau$ . Normalmente el valor de  $|g(\tau)|$  decae de su valor máximo  $|g(0)| = 1$  conforme  $\tau$  incrementa y las fluctuaciones en la luz empiezan a perder correlación para una  $\tau$  suficientemente

grande.

Si el valor de  $|g(\tau)|$  decrece monótonamente con el retraso temporal se define el tiempo de coherencia  $\tau_c$  como el ancho completo a media altura de la función  $|g(\tau)|$  (ver figura 2.4). La definición de  $\tau_c$  es arbitraria y se podría definir como el ancho completo a cualquier otra altura de la función  $|g(\tau)|$ ; sin embargo, en la mayoría de textos se considera igual que en este trabajo. Para  $\tau < \tau_c$  las fluctuaciones están fuertemente correlacionadas mientras que para  $\tau > \tau_c$  estarán débilmente correlacionadas. Una definición equivalente es:

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau. \quad (2.11)$$

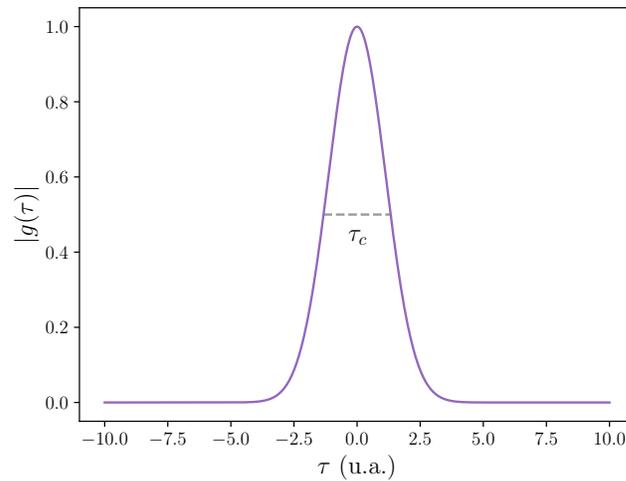


Figura 2.4: Gráfica del grado complejo de coherencia temporal Gaussiano y su tiempo de coherencia  $\tau_c$  definido como el ancho completo a media altura.

Finalmente, se define la longitud de coherencia como:

$$l_c = c\tau_c. \quad (2.12)$$

Nótese que la luz es coherente de forma efectiva si la distancia  $c\tau_c$  es más grande que el camino óptico que esta recorre. Este es el caso de la luz láser pues típicamente los tiempos de coherencia temporal son increíblemente grandes y los caminos ópticos en el laboratorio no lo son. Por ejemplo, para un láser con un tiempo de coherencia  $\tau_c = 1 \times 10^{-5}$  s, que corresponde a un ancho de línea de 100 kHz en el espectro de emisión (este concepto se explica en la siguiente sección), se tiene una longitud de coherencia de 2997.9 m.

### 2.2.3. Espectro

El objetivo ahora es conocer el espectro promedio de la luz aleatoria y para esto se hace una descomposición en frecuencias de Fourier de la función  $E(t)$ . La amplitud de la componente con frecuencia  $\nu$  es la transformada de Fourier:

$$\tilde{E}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i2\pi\nu t} dt. \quad (2.13)$$

Se define la cantidad promedio  $\langle |\tilde{E}(\nu)|^2 \rangle$  que representa la densidad de energía espectral de la luz y tiene unidades de energía por unidad de área por unidad de frecuencia, de esta forma  $\langle |\tilde{E}(\nu)|^2 \rangle d\nu$  es la energía promedio por unidad de área de los componentes con frecuencias en el intervalo entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ .

Supóngase que la función  $E(t)$  es estacionaria y esta definida en todo intervalo temporal, esto quiere decir que es eterna y lleva consigo una energía infinita por lo que  $\langle |\tilde{E}(\nu)|^2 \rangle \rightarrow \infty$ . Para corregir este problema conceptual se determina primero la densidad de energía espectral de la función  $E(t)$  dentro de una ventana temporal de ancho  $T$  tomando la transformada de Fourier truncada:

$$\tilde{E}_T(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} E(t)e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (2.14)$$

así  $\langle |\tilde{E}_T(\nu)|^2 \rangle$  es una densidad de energía espectral que ya no diverge. La densidad de potencia espectral se define entonces como  $(1/T)\langle |\tilde{E}_T(\nu)|^2 \rangle$  y tiene unidades energía por unidad de tiempo. Se extiende la ventana temporal al infinito al tomar el límite  $T \rightarrow \infty$  para obtener la densidad de potencia espectral completa:

$$S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |\tilde{E}_T(\nu)|^2 \rangle. \quad (2.15)$$

La densidad de potencia espectral es diferente de cero para frecuencias positivas y ya que  $|E(t)|^2$  representa la potencia por unidad de área o intensidad ( $\text{W}/\text{cm}^2$ ),  $S(\nu)d\nu$  representa la potencia promedio por unidad de área que contienen las frecuencias entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  por lo que  $S(\nu)$  es la densidad de intensidad espectral ( $\text{W}/\text{cm}^2\text{Hz}$ ). Es normal referirse a la densidad de potencia espectral simplemente como “espectro” o “forma de línea”. En términos de  $S(\nu)$  la intensidad total promedio es:

$$I = \int_0^{\infty} S(\nu) d\nu. \quad (2.16)$$

La función de autocorrelación  $G(\tau)$  definida en la ecuación 2.7 y la densidad espectral definida en 2.15 están relacionados a través de la transformada de Fourier de la siguiente manera:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau. \quad (2.17)$$

A esta relación se le conoce como el teorema de Wiener-Khinchin.

El espectro de la luz láser normalmente se encontrará dentro de una banda angosta de frecuencias centrada alrededor de una frecuencia central  $\nu_0$ . Se define  $\nu_{\text{FWHM}}$  como el ancho completo a media altura (FWHM por sus siglas en inglés) de la densidad espectral  $S(\nu)$ , esta cantidad es conocida como “ancho espectral” o “ancho de línea”. Debido a que  $G(\tau)$  y  $S(\nu)$  se encuentran relacionados a través de la ecuación 2.17 sus anchos se encuentran relacionados inversamente, esto quiere decir que una fuente luminosa con un espectro ancho tiene un tiempo de coherencia muy corto mientras que una fuente de luz con un ancho de línea muy delgado tiene un tiempo de coherencia grande. En el caso límite en que la luz es monocromática se tiene  $G(\tau) = Ie^{i\omega_0\tau}$  de tal forma que la densidad espectral es una delta de Dirac  $S(\nu) = I\delta(\nu - \nu_0)$  y solo contiene una componente de frecuencia  $\nu_0$ , por lo que  $\tau_c = \infty$  y  $\nu_{\text{FWHM}} = 0$ .

### 2.3. Forma de línea láser

Un láser ideal es una fuente de luz monocromática determinista. Fluctuaciones en frecuencia causan que adquiera cierto grado de aleatoriedad causando que su forma de línea deje de ser una distribución delta de Dirac y se ensanche. La relación entre el espectro del ruido en frecuencia que afecta al láser y la forma de línea del láser que da como resultado se ha estudiado exhaustivamente; sin embargo, no existe una expresión sencilla del espectro del ruido, además de leyes de potencias, que explique la forma de línea del láser. En [27] se propone un modelo que permite entender la relación entre el ruido y la forma de línea de una manera sencilla, esta sección se basa en dicho artículo.

Las propiedades espectrales de los láseres pueden ser descritas en términos de la forma de línea óptica y su ancho de línea asociado o en términos de la densidad de potencia espectral de su ruido en frecuencia. Conocer el ruido que afecta al láser presenta una ventaja pues permite utilizar esta información para modificar la forma y ancho de línea como se verá más adelante en el capítulo 4.

Sea  $S_{\delta\nu}(f)$  la densidad espectral del ruido en frecuencia del campo eléctrico del láser  $E(t) = E_0 \exp[i(2\pi\nu_0 t + \phi(t))]$  con  $\phi$  una fase. La función de autorrelación (ver ecuación 2.8) del campo se puede calcular en términos del espectro del ruido que lo afecta de la siguiente forma:

$$G_E(\tau) = E_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} \exp \left[ -2 \int_0^\infty S_{\delta\nu}(f) \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{f^2} df \right], \quad (2.18)$$

donde  $\delta\nu = \nu - \nu_0$  es la desviación en frecuencia del láser alrededor de su valor promedio  $\nu_0$ . De acuerdo al teorema de Wiener-Khinchin, la forma de línea del láser está dada por la

transformada de Fourier de la función de autocorrelación (ver ecuación 2.17):

$$S_E(\nu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu\tau} G_E(\tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Desafortunadamente esta fórmula general no puede ser integrada analíticamente excepto por el caso trivial del ruido blanco  $S_{\delta\nu}(f) = h_0$  donde  $h_0$  tiene unidades de  $\text{Hz}^2/\text{Hz}$ .

Considérese una densidad espectral del ruido en frecuencia que tiene un nivel constante  $h_0$  debajo de una frecuencia de corte  $f_c$  para la cual se vuelve cero al pasar este límite:

$$S_{\delta\nu} = \begin{cases} h_0, & \text{si } f \leq f_c \\ 0, & \text{si } f > f_c. \end{cases} \quad (2.20)$$

En este sencillo modelo de ruido, conocido como ruido blanco filtrado, es posible evaluar analíticamente la integral en la ecuación 2.18 de la siguiente manera:

$$G_E(\tau) = E_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} \exp \left[ 2 \frac{h_0}{f_c} \left( \sin^2(\pi f_c \tau) - \pi f_c \tau \text{Si}(2\pi f_c \tau) \right) \right], \quad (2.21)$$

donde  $\text{Si}(x) = \int_0^x \sin(t)/t dt$  es la función del seno integral. Un primer problema aparece al intentar encontrar la transformada de Fourier de esta expresión para resolver la ecuación 4.76 pues no es posible obtener una expresión analítica excepto para dos casos límites:  $f_0 \rightarrow \infty$  y  $f_c \rightarrow 0$ . Cuando se toma  $f_c \rightarrow \infty$  se obtiene la expresión:

$$S_E(\nu) = E_0^2 \frac{h_0}{(\nu - \nu_0)^2 + (\pi h_0/2)^2}, \quad (2.22)$$

en este caso la forma de línea es Lorentziana con un ancho de línea  $\nu_{\text{FWHM}} = \pi h_0$ . Por otra parte en el caso límite  $f_c \rightarrow 0$  se obtiene:

$$S_E(\nu) = E_0^2 \left( \frac{2}{\pi h_0 f_c} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2 h_0 f_c} \right], \quad (2.23)$$

que corresponde a una forma de línea Gaussiana con un ancho de línea  $\nu_{\text{FWHM}} = (8 \ln(2) h_0 f_c)^{1/2}$ .

Resulta interesante estudiar numéricamente la evolución de la forma de línea para distintas frecuencias de corte  $f_c$  con un nivel de ruido fijo  $h_0$ . En la figura 2.5 se muestra el resultado cuando se toma un nivel de de ruido  $h_0 = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$ . Se observa que cuando  $f_c \ll h_0$  la forma de línea es Gaussiana y el ancho de línea aumenta con  $f_c$  mientras que con  $f_c \gg h_0$  la forma de línea se transforma en Lorentziana y el ancho de línea deja de crecer. En [27] se muestra que el ruido con componentes de Fourier altas contribuye únicamente a las colas de la forma de línea y no al ancho, además se encuentra una fórmula aproximada para el ancho de

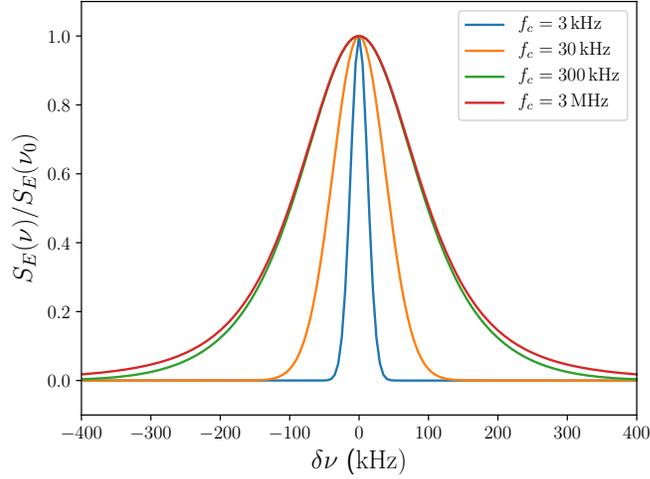


Figura 2.5: Cálculo numérico de la forma de línea  $S_E(\delta\nu)$  del láser para distintas frecuencias de corte  $f_c$  con un nivel de ruido fijo  $h_0 = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$ . Las formas de línea están normalizadas para facilitar la comparación. La forma de línea es Gaussiana cuando  $f_c \ll h_0$  y pasa a ser Lorentziana cuando  $f_c \gg h_0$ .

línea para cualquier  $f_c$  dada por:

$$\nu_{\text{FWHM}}(f_c) = h_0 \frac{(8\ln(2)f_c/h_0)^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{8\ln(2)f_c}{\pi^2 h_0}\right)^2\right]^{1/4}}. \quad (2.24)$$

En la figura 2.6 se muestra una gráfica de esta función donde se evidencia la existencia de los dos regímenes antes mencionados. La frecuencia límite entre estas dos regiones esta dada por la intersección de las asíntotas dando un valor de:

$$f_c^* = \frac{\pi^2}{8\ln(2)} h_0 \approx 1.78h_0. \quad (2.25)$$

El ejemplo anterior implica que el espectro del ruido en frecuencia puede ser separado en dos regiones que modifican la forma de línea en formas completamente diferentes. En la primer región, definida por  $S_{\delta\nu}(f) > 8\ln(2)f/\pi^2$ , el ruido contribuye en la parte central de la forma de línea, que es Gaussiana, y hace más grande el ancho de línea. En la segunda región, definida por  $S_{\delta\nu}(f) < 8\ln(2)f/\pi^2$ , el ruido contribuye principalmente a hacer más grandes las colas de la forma de línea pero deja de contribuir al ancho. Se puede entender este fenómeno en términos de la teoría de modulación de frecuencia. Se define el índice de modulación como la razón entre la desviación en frecuencia  $\Delta f$  entre la frecuencia de modulación  $f_m$ , es decir  $\beta = \Delta f/f_m$ . De esta

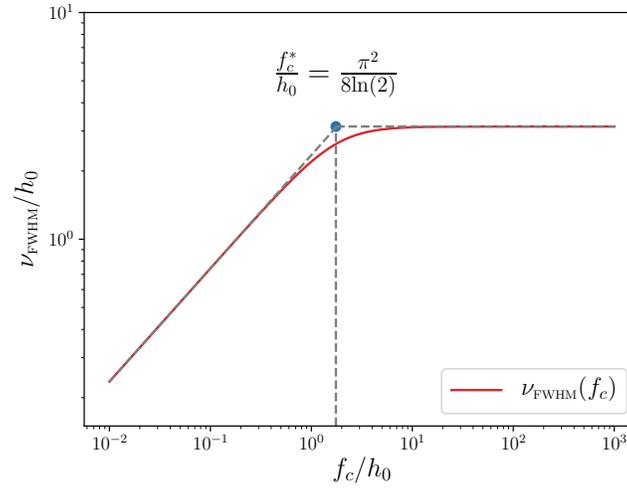


Figura 2.6: Gráfica del ancho de línea en función de la frecuencia de corte  $f_c$  (ver ecuación 2.24). Ambos ejes se normalizaron con el nivel del ruido  $h_0$ . Se observan comportamientos diferentes para bajas y altas frecuencias.

forma en la primer región el nivel del ruido es alta comparada con la frecuencia de Fourier por lo que se produce una frecuencia de modulación baja con un alto índice de modulación  $\beta > 1$ . Por otro lado en la segunda región el nivel del ruido es bajo comparado con la frecuencia de Fourier dando como resultado un índice de modulación  $\beta$  pequeño, esto significa que la modulación es demasiado rápida para producir un efecto significativo en el ancho de línea. La línea que separa estas dos regiones con comportamientos diferentes se llama línea  $\beta$  de separación y en la figura 2.7 se muestra gráficamente para el caso particular del ruido blanco filtrado.

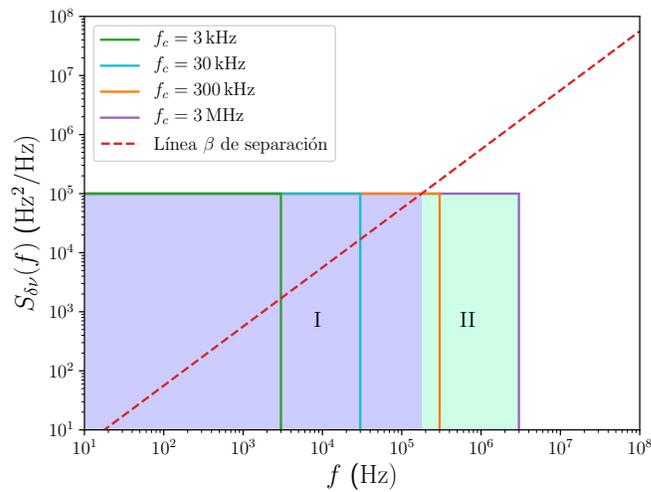


Figura 2.7: Modelo de ruido blanco filtrado (ver ecuación 2.20) con un nivel de ruido fijo  $h_0 = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$  para distintas frecuencias de corte  $f_c$ . La línea roja punteada se muestra la línea  $\beta$  de separación dada por  $S_{\delta\nu}(f) = 8 \ln(2) f / \pi^2$  que divide al espectro en dos regiones. En la región I (morado) se tiene un índice de modulación alto por lo que el ruido provoca el ensanchamiento de la forma de línea. En la región II (azul) el índice de modulación es bajo, de tal forma que el ruido hace más grandes las colas del espectro.

## Capítulo 3

---

---

# Átomos de Rydberg

---

---

3.1	Propiedades . . . . .	34
3.1.1	Ecuación radial hidrogenoide . . . . .	34
3.1.2	Escalamiento de las propiedades con $n$ . . . . .	35
3.2	Rubidio . . . . .	37
3.2.1	Estructura de niveles energéticos . . . . .	38
3.2.2	Estados de Rydberg . . . . .	40

Los átomos de Rydberg son aquellos que se encuentran en estados altamente excitados con un número cuántico principal  $n \geq 20$ . La construcción de una teoría acerca de estos se remonta a los inicios de la mecánica cuántica con el modelo de Bohr y desde entonces han sido un sistema de interés en la física atómica; sin embargo, no se habían encontrado muchas aplicaciones prácticas importantes para las excitaciones de Rydberg. En el año 2001 Lukin *et al.* [8] describieron una técnica para manipular información cuántica utilizando el bloqueo de Rydberg, un fenómeno único presente en este tipo de átomos y que atrajo el interés de la comunidad por sus aplicaciones en áreas como la información cuántica y la óptica cuántica, reavivando el atractivo de estos sistemas.

En la primer sección de este capítulo se describen las principales propiedades de los estados de Rydberg en átomos alcalinos, mostrando por qué son un sistema que atrae tanto interés de diversas áreas de la física. En la segunda sección se presentan las principales características del rubidio, especie química seleccionada para generar las excitaciones de Rydberg. Se muestra cómo las particularidades atómicas del metal alcalino fijan condiciones específicas al sistema de láseres considerando el modelo de interacción luz materia del átomo de tres niveles que se estudió en el capítulo 1.

### 3.1. Propiedades

Los átomos de Rydberg presentan diversas características exageradas, a diferencia de átomos en estados poco excitados, que escalan como potencias de  $n$ . Como muestra de esto, en los átomos alcalinos el único electrón de valencia está débilmente ligado, debido a que se encuentra alejado del núcleo, y es extremadamente sensible a campos eléctricos externos o a otros átomos de Rydberg. Además, dichos estados son metaestables con tiempos de vida del orden de 100  $\mu\text{s}$ , cuatro órdenes de magnitud más largos que otros estados poco excitados. Por ejemplo, el primer estado excitado en rubidio tiene un tiempo de vida de tan solo 20 ns aproximadamente. Debido a estas y a otras propiedades, los átomos de Rydberg son considerados sondas altamente sensibles a su ambiente.

En esta sección se hace una revisión general de las propiedades más importantes de los estados de Rydberg en átomos alcalinos. Los párrafos siguientes se basan en [28].

#### 3.1.1. Ecuación radial hidrogenoide

Para comprender cualitativamente cómo algunas de las propiedades más importantes de los estados de Rydberg en átomos alcalinos escalan con  $n$  se hace una analogía con el modelo del átomo de hidrógeno. Los metales alcalinos y el hidrógeno tienen un único electrón en su capa de valencia y tratar con esta descripción es numéricamente más sencillo. Una diferencia importante es que los términos del Hamiltoniano hiperfino (ver [15]) no son relevantes para los átomos de Rydberg en metales alcalinos ya que la interacción entre el espín nuclear y el espín electrónico es débil pues el único electrón de valencia se encontrará alejado del núcleo a una gran distancia, como se verá más adelante.

Recordando que la parte radial de la ecuación de Schrödinger que describe al átomo de hidrógeno se puede escribir como (ver [29]):

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ -\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u = Eu \quad \text{con} \quad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e, \quad (3.1)$$

donde  $u(r) = rR(r)$  con  $r$  la coordenada radial y  $R$  la parte radial de la función de onda,  $e$  es la carga del electrón,  $\mu$  es la masa reducida del sistema con  $m_e$  y  $m_p$  las masas del electrón y protón,  $\hbar$  es la constante de Planck reducida y  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío. El primer término dentro de los paréntesis cuadrados es un potencial central mientras que el segundo es conocido como el término centrífugo que depende de el número cuántico azimutal  $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  y tiende a arrojar al electrón fuera del origen igual que la fuerza (ficticia) centrífuga en la mecánica clásica. Los elementos alcalinos tienen un único electrón en su capa de valencia y los electrones de las capas interiores forman una capa cerrada con un momento angular total idénticamente cero, de tal forma que tienen una distribución de

carga esféricamente simétrica. Por esta razón, se considera que el potencial al que esta sujeto el electrón de valencia es un potencial central como en el hidrógeno con muy buena aproximación.

La solución a la ecuación 3.1 es la parte radial de la función de onda hidrogenoide [30]:

$$R_{nl}(\rho) = \frac{1}{a_0} \rho^l \sum_{q=0}^{\infty} c_q \rho^q e^{-\rho \lambda_n}, \quad (3.2)$$

donde  $c_q$  toma los valores:

$$c_q = (-1)^q \left( \frac{2}{k+l} \right)^q \frac{(k-1)!}{(k-q-1)!} \frac{(2l+1)!}{q!(q+2l+1)!} c_0. \quad (3.3)$$

Aquí el valor  $c_0$  quedará determinado por la condición de normalización:

$$\int_0^{\infty} |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr = 1. \quad (3.4)$$

Además,  $\rho$  y  $\lambda_n$  se definen como:

$$\rho = \frac{r}{a_0} \quad \text{y} \quad \lambda_n = \sqrt{-\frac{E_n}{E_I}}, \quad (3.5)$$

con  $a_0$  el radio de Bohr. Las energías  $E_n$  y  $E_I$  adquieren la expresión:

$$E_n = - \left[ \frac{m_e}{2\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad E_I \approx 13.6 \text{ eV}, \quad (3.6)$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  es el número principal cuántico y  $E_I$  es la energía de ionización.

### 3.1.2. Escalamiento de las propiedades con $n$

Para obtener un entendimiento cualitativo del escalamiento de las propiedades con  $n$  y  $l$  se observan los momentos de la posición del electrón  $r$  que estan dados por el valor esperado  $\langle \mathbf{r}^s \rangle$ , donde  $s$  es un entero:

$$\langle \mathbf{r}^s \rangle = \int_0^{\infty} R_{nl}^*(r) r^s R_{nl}(r) r^2 dr \quad (3.7)$$

Si  $s$  es positivo, entonces la integral de la ecuación 3.7 es dominada por las funciones de onda evaluadas en la región de integración donde  $r$  es grande. Por otro lado, si  $s$  es negativo, el momento se determina principalmente por el comportamiento de la función de onda cerca del núcleo. Si  $s$  es positivo,  $\langle \mathbf{r}^s \rangle$  será débilmente dependiente de  $l$  ya que el término dominante en la ecuación 3.1 es el de interacción Coulombiana. Cuando  $s$  es negativo, estados con un  $l$  bajo tienen una mayor probabilidad de encontrarse cerca del núcleo que otros con  $l$  grande ya que el término centrífugo (ver 3.1) empuja a la función de onda de estos últimos a un  $r$  superior.

Por esta razón, los estados con un valor de  $l$  grande son conocidos como estados circulares ya que la probabilidad de encontrar al electrón cerca del núcleo es despreciable. Se puede probar que la forma con el cual escala  $r^s$  para una  $s$  positiva es  $\langle \mathbf{r}^s \rangle \propto n^{2s}$  mientras que para  $s < -1$  el factor es  $\langle \mathbf{r}^s \rangle \propto n^{-3}$ . El caso  $s = -1$  es especial y se encuentra que  $\langle \mathbf{r}^{-1} \rangle \propto n^{-2}$ .

Para los átomos alcalinos el escalamiento de  $\langle \mathbf{r}^s \rangle$  con  $n$  puede hacerse un poco más preciso con una modificación. Dichos átomos tienen muchos electrones en las capas interiores y estados del electrón de valencia con un valor de  $l$  pequeño penetran en las capas cerradas de los átomos de Rydberg interactuando con los electrones. La interacción resultante puede ser descrita usando teoría de defecto cuántico [31]; sin embargo, dicho tratamiento excede el alcance de este trabajo y basta con saber que típicamente para  $l > 4$  los estados de Rydberg de átomos alcalinos son hidrogenoides.

Usando estos conceptos, el radio promedio de un átomo de Rydberg escala proporcionalmente a  $n^2$ . Además, utilizando combinaciones entre los elementos de la matriz radial y energías de separación se puede deducir el escalamiento de  $n$  para muchas otras propiedades de los átomos de Rydberg. Por ejemplo, en el segundo orden de teoría de perturbaciones, la polarizabilidad es proporcional a la suma de los cuadrados de los elementos de la matriz dipolar divididas por la energía de separación entre estados. Esta suma está dominada por los términos con denominadores más pequeños que resultan ser las diferencias en energía entre estados de Rydberg vecinos, estas diferencias escalan como  $n^{-3}$  mientras que los elementos de matriz dipolar entre estados de Rydberg vecinos escalan como  $n^2$  de tal forma que la polarizabilidad escala como  $n^7$ . El escalamiento en  $n$  para algunas de las propiedades más importantes de los átomos de Rydberg se pueden deducir de forma análoga y las más importantes se presentan en la tabla 3.1.

Propiedad	Cantidad	Escalamiento
Niveles energéticos	$E_n$	$n^{-2}$
Espaciamiento entre niveles	$\Delta E_n$	$n^{-3}$
Radio	$ \langle nl   \mathbf{r}   n'l' \rangle $	$n^2$
Momento de transición dipolar del estado base al estado de Rydberg	$ \langle nl   -e\mathbf{r}   g \rangle $	$n^{-3/2}$
Momento de transición dipolar entre estados de Rydberg adyacentes	$ \langle nl   -e\mathbf{r}   n'l' \rangle $	$n^2$
Tiempo de vida radiativa	$\tau$	$n^3$
Polarizabilidad	$\alpha$	$n^7$
Coefficiente de interacción de van der Waals	$C_6$	$n^{11}$

Tabla 3.1: Escalamiento de las propiedades más importantes de los estados de Rydberg con el número principal cuántico  $n$  para átomos alcalinos.

El tiempo de vida radiativa es una de las propiedades más importantes pues determina la escala temporal en la que se podrá manipular el átomo de Rydberg experimentalmente y esta

relacionado con los momentos de transición dipolar a través de la regla de oro de Fermi. Esta establece que la tasa de transición es proporcional al cuadrado del elemento de matriz de la perturbación. En este caso el Hamiltoniano que describe la interacción entre la luz y los átomos, dentro de la aproximación dipolar (ver subsección 1.1.1), es  $H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ , donde  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  es el operador dipolar eléctrico. La interacción con la radiación estimula la transición del estado base  $|g\rangle$  al estado de Rydberg  $|nl\rangle$  a una tasa  $\Gamma$ :

$$\Gamma \propto |eE_0|^2 \left| \int \psi_{nl}^*(\mathbf{r} \cdot \hat{\varepsilon}) \psi_g d^3\mathbf{r} \right|^2 \equiv |eE_0|^2 |\langle nl | \mathbf{r} \cdot \hat{\varepsilon} | g \rangle|^2, \quad (3.8)$$

donde  $\hat{\varepsilon}$  es el vector de polarización del campo. Los momentos de transición dipolar del estado base al estado de Rydberg escalan como  $n^{-3/2}$  y dado que  $\tau \propto \Gamma^{-1}$  el tiempo de vida radiativa escala como  $n^3$ .

El potencial de van der Waals  $U(R) = C_6/R^6$  surge a partir de la interacción no resonante entre dos átomos en el segundo orden de la teoría de perturbaciones. El escalamiento es proporcional a  $n^{11}$  debido a que  $C_6$  es proporcional al momento de transición dipolar entre dos estados de Rydberg adyacentes a la cuarta potencia dividido por la energía de separación entre los estados. Una implicación interesante de esta fuerte interacción es el fenómeno conocido como *bloqueo de Rydberg*. Considérese un par de átomos interactuando con un láser que tiene la frecuencia para generar un átomo de Rydberg, al crear una primer excitación surge un desentonamiento en la energía para una segunda excitación debido al potencial de interacción mencionado anteriormente. Esto resulta en la existencia de un radio de bloqueo alrededor del átomo de Rydberg dentro del cual una segunda excitación es imposible:

$$R_b = \left( \frac{C_6}{\nu_{\text{FWHM}}} \right)^{1/6}, \quad (3.9)$$

donde  $\nu_{\text{FWHM}}$  es el ancho de línea del láser de excitación. Este fenómeno permite crear un medio cuántico óptico con una respuesta no lineal al nivel de unos cuantos fotones [8, 32, 12].

## 3.2. Rubidio

Como se mencionó anteriormente, los elementos que tienen un único electrón en su capa de valencia son conocidos como metales alcalinos. El litio, sodio, potasio, rubidio, cesio y francio pertenecen a este grupo de átomos y presentan ventajas experimentales para la generación de átomos de Rydberg respecto a otras especies atómicas cuya configuración electrónica es más compleja. Para generar excitaciones de Rydberg el rubidio tiene una gran cantidad de facilidades, su estructura de niveles energéticos es sencilla y el conocimiento acumulado acerca de los métodos y técnicas para la preparación de estados a través de las interacciones luz-materia (ver capítulo 1) es vasto pues se ha estudiado ampliamente. Aunado a lo anterior, las longitudes

de onda necesarias para generar los estados altamente excitados se pueden producir con láseres comerciales como se verá más adelante.

En esta sección se describe la estructura de niveles energéticos del rubidio y se describen los estados de Rydberg que se pretenden excitar, esto permite establecer las características que debe tener el sistema de láseres para generar las excitaciones.

### 3.2.1. Estructura de niveles energéticos

Existen dos isótopos naturales del rubidio:  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$ , algunas de sus características principales se encuentran listadas en la tabla 3.2. La descripción de la estructura de niveles que se hace en los párrafos siguientes es resumida pues existen textos completos sobre el estudio de estos temas (ver [15]).

Isotopo	Abundancia	Tiempo de vida (años)	Masa (u)	Espín nuclear
$^{85}\text{Rb}$	72.168 %	Estable	84.911789739(9)	$I = 5/2$
$^{87}\text{Rb}$	27.835 %	$4.88 \times 10^{10}$	86.909180535(10)	$I = 3/2$

Tabla 3.2: Características principales de los isótopos  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$ .

El átomo de rubidio cuenta con 37 electrones, su estado base tiene la siguiente configuración electrónica:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s, \quad (3.10)$$

donde se utiliza la notación “ $nl^N$ ”, con  $n$  y  $l$  los números principal y azimutal como se describieron anteriormente y  $N$  representa el número de electrones que tienen dichos valores de  $n$  y  $l$ . De esta forma, el primer estado excitado del rubidio es  $5p$ .

Al incluir la estructura fina de los niveles energéticos se da paso a la interacción espín órbita. Ahora el operador de momento angular que es una constante de movimiento del sistema es:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i$  y  $\mathbf{S} = \sum \mathbf{s}_i$  son la suma de los momentos angulares de todos los electrones en el átomo. Con estos nuevos operadores surge la notación para distinguir los estados:

$$^{2S+1}L_J, \quad (3.12)$$

con  $S = \sum s_i$ ,  $L = \sum l_i$  y  $|L - S| \leq J \leq L + S$ . Así, el estado base del rubidio se etiqueta como  $5^2S_{1/2}$ . El primer estado excitado se desdobra en los estados  $5^2P_{1/2}$  y  $5^2P_{3/2}$ .

Finalmente al tomar en cuenta todos los efectos debidos al momento angular del núcleo o espín nuclear surge la estructura hiperfina, donde el operador de momento angular total del

sistema es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}, \quad (3.13)$$

en este caso no se adopta una nueva notación, simplemente se etiqueta cada estado con su correspondiente valor  $F = J \pm I$ . En esta descripción las funciones de onda quedan caracterizadas por los números cuánticos  $J$ ,  $I$ ,  $F$  y  $M_F$ . El estado base  $5^2S_{1/2}$  del  $^{85}\text{Rb}$  tiene  $F = 2, 3$  y para  $^{87}\text{Rb}$  toma los valores  $F = 1, 2$ .

Para que los átomos de rubidio puedan ser excitados a niveles de mayor energía se deben cumplir las reglas de selección de las llamadas transiciones dipolares eléctricas:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \pm 1 \\ \Delta J &= 0, \pm 1 \\ \Delta F &= 0, \pm 1 \\ \Delta F &\neq 0 \text{ si } M_F = M'_F = 0 \\ \Delta M_F &= 0, \pm 1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Con estas reglas de selección se obtienen dos transiciones a partir del estado base del rubidio llamadas líneas D1 y D2:

$$\text{D1: } 5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$$

$$\text{D2: } 5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}.$$

En la espectroscopía de absorción (ver [15] y subsección 5.2.1) mostrada en la figura 3.1 se miden las transiciones hiperfinas asociadas a la línea D2 de  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$  (ver [33, 34]).

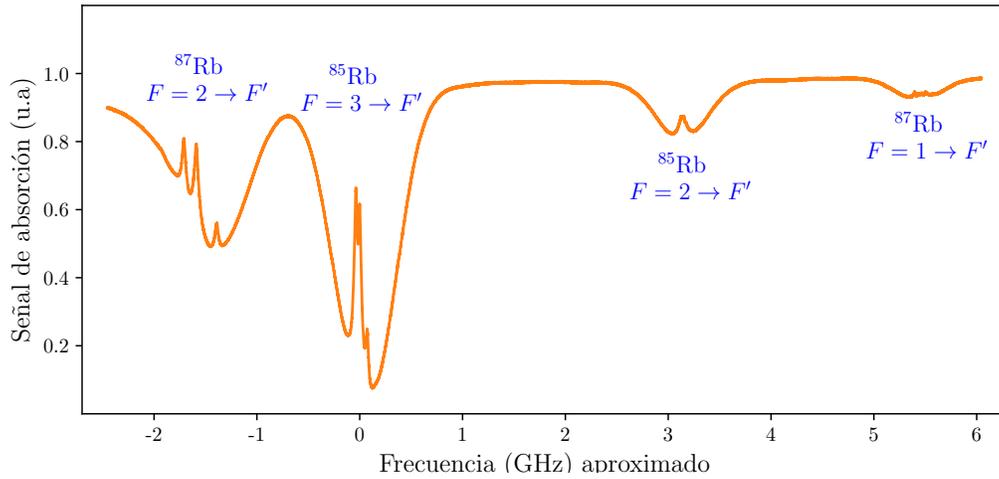


Figura 3.1: Espectroscopía medida de la línea D2 de 780 nm de  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$ .

### 3.2.2. Estados de Rydberg

La generación de estados de Rydberg desde un número principal cuántico  $n = 20$  hasta la energía de ionización se produce típicamente a través de excitaciones de dos fotones considerando un sistema efectivo de tres niveles (ver capítulo 1). En el rubidio hay dos excitaciones realizables siguiendo las reglas de selección descritas en las ecuaciones 3.14 (ver [35]):

$$5S \xrightarrow{780 \text{ nm}} 5P \xrightarrow{480 \text{ nm}} nS/nD, \quad (3.15)$$

con una ruta alternativa por medio de las transiciones:

$$5S \xrightarrow{420 \text{ nm}} 6P \xrightarrow{1016 \text{ nm}} nS/nD. \quad (3.16)$$

Ambos esquemas son realizables con láseres comerciales de diodo y para la realización de este trabajo se eligió el primer esquema como se muestra en la figura 3.2. En este caso los elementos de las transiciones dipolares escalan como  $\langle 5P | e\mathbf{r}_e | nS \rangle \propto n^{-3/2}$  [35]. Se escogió una excitación a través de dos fotones pues esta permite implementar métodos de detección no destructiva como la transparencia electromagnéticamente inducida (ver subsección 1.2.3 y sección 6.2)), a la vez que permite jugar con la intensidad de los dos campos compensando la falta de intensidad de alguno de ellos. Aunado a lo anterior, si se quisiera generar la excitación usando un solo fotón este tendría que ser de luz con longitud de onda de 297 nm que es difícil de producir y de manipular, de tal forma que no es una opción viable.

Para lograr una excitación coherente de los estados de Rydberg es necesario que los láseres sean suficientemente intensos para que la frecuencia de Rabi sea mucho mayor que la tasa de decaimiento (ver ecuación 1.35), normalmente se necesitaran láseres con una potencia de algunas decenas a centenas de miliwatts. También es indispensable que tengan un ancho de línea equiparable con el ancho de línea de la transición. Una forma de estimar el ancho de línea natural es conociendo la tasa de transición del estado a partir de la regla de oro de Fermi (ver ecuación 3.8). Por ejemplo, el ancho de línea natural de la transición del estado  $5P$  al estado de Rydberg  $43S$  es de de 3.76 kHz y el ancho de línea del láser de excitación deberá ser suficientemente delgado en consecuencia, en el capítulo siguiente se explica paso a paso cómo se logra esto experimentalmente. Una guía completa sobre el cálculo de los elementos de matriz dipolar y potenciales de interacción en estados de Rydberg se puede consultar en [36].

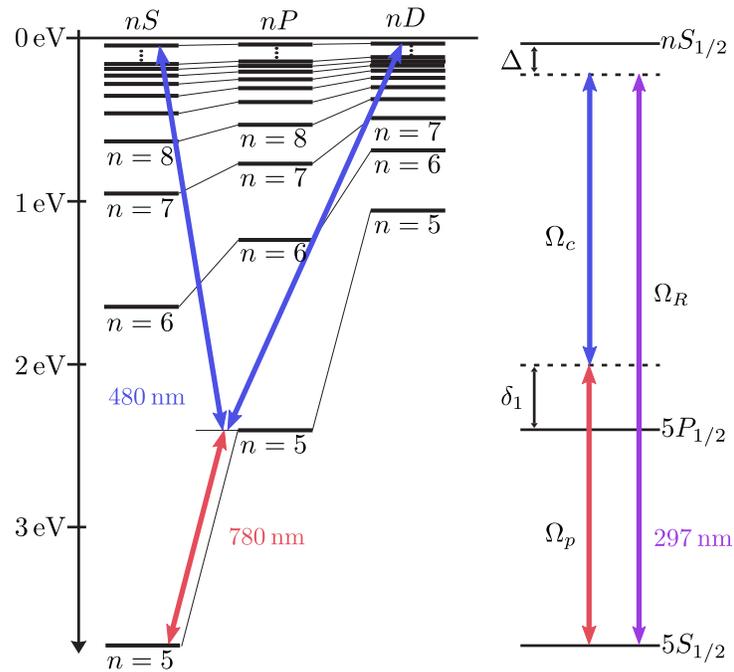


Figura 3.2: Diagrama de niveles energéticos para las transiciones a estados de Rydberg en rubidio. Las frecuencias de Rabi  $\Omega_p$  y  $\Omega_c$  caracterizan la fuerza de interacción entre los campos de prueba y de control con el átomo (ver ecuación 1.35),  $\Omega_R$  es la frecuencia de Rabi en el esquema de generación de la excitación con un solo fontón. Aquí  $\delta_1$  y  $\Delta$  cracterizan el desintonamiento entre la frecuencia de los campos y la frecuencia de resonancia de los átomos (ver sección 1.2).



## Capítulo 4

---

---

# Estabilización de frecuencia

---

---

4.1	Teoría de control . . . . .	44
4.1.1	Sistemas dinámicos . . . . .	44
	Filtro pasa bajos . . . . .	45
	Sistemas compuestos . . . . .	46
4.1.2	Retroalimentación . . . . .	48
	Ley de control PID . . . . .	49
4.2	Resonadores ópticos . . . . .	51
4.2.1	Condiciones de resonancia . . . . .	51
	Onda estacionaria . . . . .	51
	Onda viajera . . . . .	53
4.2.2	Cavidad con pérdidas . . . . .	54
	Intensidad . . . . .	54
	Ancho de la resonancia . . . . .	57
	Transmisión y reflexión . . . . .	58
4.2.3	Tiempo de vida del fotón . . . . .	59
4.2.4	Modos Gaussianos . . . . .	60
4.3	Estabilización de frecuencia Pound-Drever-Hall . . . . .	64
4.3.1	Señal de error . . . . .	66
4.3.2	Reducción del ancho de línea . . . . .	68

En el capítulo 1 se estudió de forma teórica la interacción entre la luz y la materia, se hizo evidente que la frecuencia de la luz incidente sobre los átomos juega un papel crucial en la interacción pues de esta depende la probabilidad de excitar al átomo. Aunado a esto, en el capítulo 3 se estableció que un espectro de emisión delgado de los láseres es necesario para

poder llevar a los átomos a un estado altamente excitado de tal forma que si se desea crear átomos de Rydberg en el laboratorio es indispensable poder controlar el espectro de emisión de los láseres.

Este capítulo es un puente entre la teoría y el experimento. En la primer sección se establecen las nociones básicas de la teoría de control pues esta será utilizada para modificar las propiedades de emisión de los láseres. En la segunda sección se estudia la física de los resonadores ópticos, estos serán la herramienta principal a partir de la cual se caracterizará la luz que incide sobre los átomos. Finalmente se explica la técnica Pound-Drever-Hall para anclar un láser a la frecuencia de resonancia de una cavidad óptica y cómo al hacer esto se modifica el espectro de emisión.

## 4.1. Teoría de control

En la física experimental es normal encontrarse con situaciones donde es necesario mantener ciertos parámetros del experimento constantes, en particular en esta sección se explicará cómo es posible estabilizar la frecuencia de los láseres para llevar a los átomos a estados altamente excitados.

La teoría de control estudia cómo se comportan los sistemas físicos al someterlos a sistemas de retroalimentación que buscan modificar su respuesta para obtener los parámetros deseados. En las siguientes páginas se establecen las nociones básicas de esta teoría y el tratamiento aquí desarrollado se basa en las referencias [37], [38] y [39].

### 4.1.1. Sistemas dinámicos

La aplicación de un sistema de retroalimentación implica modificar el comportamiento de un sistema dinámico para regular algún parámetro físico. A continuación se desarrolla una breve descripción de los sistemas dinámicos y esto a su vez establecerá la notación que se usa en esta sección.

Un sistema dinámico general se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) & (4.1a) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & (4.1b) \end{cases}$$

donde el estado del sistema  $\mathbf{x}$  esta caracterizado por  $n$  variables independientes,  $\mathbf{u}$  representa  $m$  entradas independientes y  $\mathbf{y}$  representa  $p$  valores de salida independientes del sistema. Además,  $\mathbf{f}$  representa la dinámica del sistema mientras que  $\mathbf{g}$  realiza la tarea de traducir el estado  $\mathbf{x}$  y las variables de entrada  $\mathbf{u}$  en variables de salida del sistema. Cabe resaltar que el número de variables de entrada  $n$  normalmente superará el número de variables de salida del sistema  $p$ .

Para el caso de un sistema dinámico lineal las ecuaciones 4.1 se traducen en:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{x} + \tilde{B}\mathbf{u} & (4.2a) \\ \mathbf{y} = \tilde{C}\mathbf{x} + \tilde{D}\mathbf{u}, & (4.2b) \end{cases}$$

en este caso  $\tilde{A}$  representa una matriz de  $n \times n$  que contiene la dinámica,  $B$  es una matriz de  $n \times m$  con los parámetros de entrada,  $\tilde{C}$  es una matriz de  $p \times n$  y  $\tilde{D}$  es una matriz de  $p \times m$ .

### Filtro pasa bajos

El filtro pasa bajos es un ejemplo sencillo de un sistema dinámico lineal. Se puede visualizar esquemáticamente como se muestra en la figura 4.1 y adquiere una gran relevancia dentro de la física experimental pues una gran cantidad de dispositivos actúan de forma similar a este sistema.

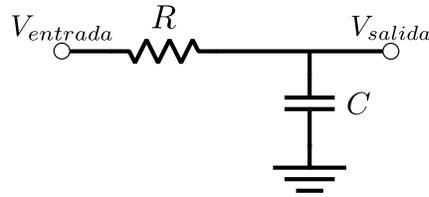


Figura 4.1: Circuito esquemático de un filtro pasa bajos.

La ecuación que los describe es:

$$\dot{V}_{salida}(t) = -\frac{1}{RC}V_{salida}(t) + \frac{1}{RC}V_{entrada}(t), \quad (4.3)$$

en este caso,  $n = m = p = 1$ ,  $x = y = V_{salida}$ ,  $u = V_{entrada}$ ,  $A = -1/RC$ ,  $B = 1/RC$ ,  $C = 1$  y  $D = 0$ . Para analizar los sistemas dinámicos es conveniente llevar la discusión del dominio temporal al de frecuencias. En la teoría de control la transformada utilizada es la de Laplace:

$$\mathcal{L}[y(t)] = y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt, \quad (4.4)$$

utilizando esta transformada es posible pasar de una ecuación diferencial lineal de orden  $n$ -ésimo a una ecuación algebraica de orden  $n$ -ésimo en la variable  $s$ .

Para analizar el filtro pasa bajos en el dominio de frecuencias se identifica  $\omega_0 = 1/RC$  en la ecuación 4.3, variable que se conoce como la frecuencia de corte y es aquella frecuencia en la cual el circuito reduce su ganancia de voltaje a un 70 %. Al identificar las variables de entrada y salida como se establecieron en la ecuación 4.1 se obtiene la expresión:

$$\dot{y}(t) = -\omega_0 y(t) + \omega_0 u(t), \quad (4.5)$$

que al tomar la transformada de Laplace se convierte en la ecuación algebraica:

$$s y(s) = -\omega_0[-y(s) + u(s)], \quad (4.6)$$

lo que lleva a definir una nueva cantidad:

$$G(s) \equiv \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{1 + s/\omega_0}. \quad (4.7)$$

Esta nueva función  $G(s)$  es conocida como la función de transferencia y es la razón de las salidas del sistema entre las entradas y permite caracterizar la respuesta del sistema pues al determinar los ceros y polos de esta función se hallarán las frecuencias a las cuales el sistema no responde en absoluto o su comportamiento tiende a infinito respectivamente. Si se quiere encontrar la dependencia en frecuencia explícitamente se debe evaluar  $G(s)$  con  $s = i\omega$  donde  $\omega$  es la frecuencia angular:

$$G(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega/\omega_0}. \quad (4.8)$$

Se definen dos cantidades importantes a partir de la función de transferencia: la magnitud y el argumento:

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2}} \quad (4.9)$$

y

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (4.10)$$

La magnitud de la función de transferencia indica cómo cambia la respuesta del sistema dependiendo de la frecuencia de la señal de entrada. El argumento proporciona información del cambio de fase que sufre la señal de entrada al pasar por el sistema. Las gráficas log-log de  $|G(i\omega)|$  junto con las gráficas lineal-log de  $\arg G(i\omega)$  son conocidas como gráficas de Bode y sirven para darse una apreciación cualitativa de la dinámica del sistema, por ejemplo, indican en cuáles frecuencias un sistema dinámico se puede volver inestable. En la figura 4.2 se muestran las gráficas de las ecuaciones 4.9 y 4.10. Se debe notar que las asíntotas de la figura 4.2a) se intersectan en la frecuencia de corte  $\omega_0$  esto señala que para frecuencias por encima de esta frecuencia la magnitud disminuye rápidamente hacia  $-\infty$ . A su vez en la figura 4.2b) el desfase en  $\omega_0$  es de  $-90^\circ$  asíntótico cruzando por  $-45^\circ$ , en este caso, si la función de entrada contiene muchos armónicos, las componentes de baja frecuencia se reproducen fielmente en la salida mientras que las componentes de alta frecuencia se atenúan en amplitud y cambian de fase.

### Sistemas compuestos

Un sistema compuesto es un sistema dinámico conformado por varios elementos físicos. Es claro que la función de transferencia para dos elementos en serie será el producto de las

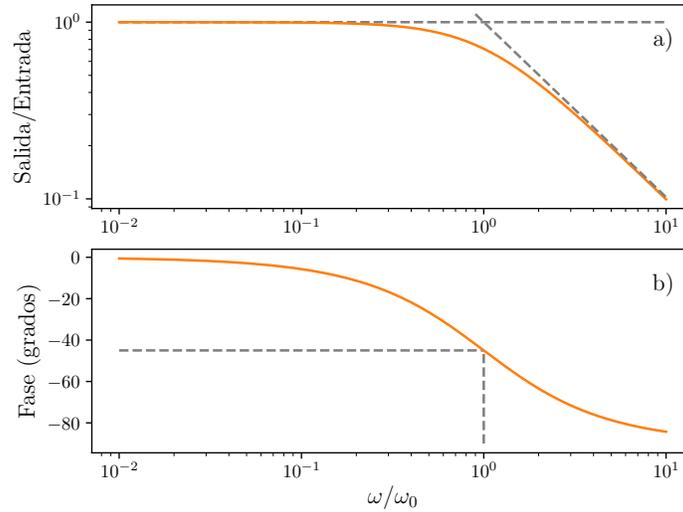


Figura 4.2: Función de transferencia de un filtro pasa bajos. a) Gráfica de Bode de la magnitud  $||G(i\omega)||$ . b) Gráfica de Bode la fase  $[\arg G(i\omega)]$ .

funciones de transferencia individuales en el espacio transformado. Para encontrar su expresión en el dominio temporal se debe echar mano del teorema de convolución.

Se define la convolución de las funciones de transferencia  $G$  y  $H$  de la siguiente manera:

$$G * H = \int_0^{\infty} G(\tau)H(t - \tau)d\tau, \quad (4.11)$$

entonces, por el teorema de convolución se sabe que:

$$\mathcal{L}[G * H] = G(s)H(s). \quad (4.12)$$

La convolución es la herramienta que se necesita para describir sistemas compuestos donde la señal de salida de un elemento se usa como entrada del siguiente. En la figura 4.3 se muestra un sistema compuesto por un  $G(s)$  que contiene a la dinámica del sistema y traduce las entradas  $u(s)$  en salidas  $y(s)$  seguido de un sensor  $H(s)$  que da la medición  $v(s)$ .

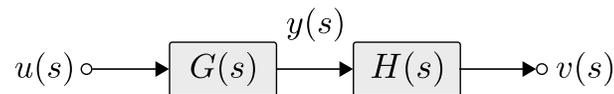


Figura 4.3: Diagrama de bloques que ilustra a un sistema compuesto en serie.

### 4.1.2. Retroalimentación

Una vez que se han establecido las ideas básicas de los sistemas dinámicos es posible desarrollar las primeras nociones para describir un sistema con retroalimentación.

Considerese un sistema cuya dinámica es descrita por  $G(s)$ . El objetivo es que la salida del sistema  $y(t)$  siga una señal de control  $r(t)$  de la forma más exacta posible. La estrategia es la siguiente: determinar la diferencia entre la salida  $y(t)$  y la señal de control  $r(t)$  para definir la señal de error como:

$$e(t) = r(t) - y(t), \quad (4.13)$$

la retroalimentación implica aplicar una ley de control  $K$  a la señal de error para minimizar su magnitud. En la figura 4.4 se muestran las conexiones esquemáticas de este sistema del cual se deduce:

$$y(s) = K(s)G(s)e(s), \quad (4.14)$$

al sustituir  $e(s)$  se obtiene:

$$y(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}r(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}r(s), \quad (4.15)$$

donde la ganancia del sistema es  $L(s) = K(s)G(s)$ . En la retroalimentación *abierta* se modifica la dinámica para ser  $L = KG$ , cuando se hace una retroalimentación *cerrada* se tiene una dinámica dada por  $T = KG/(1 + KG) = L/(1 + L)$ . Siempre se busca que  $K(s)$  sea tal que  $T(s)$  tenga mejor dinámica que  $G(s)$ .

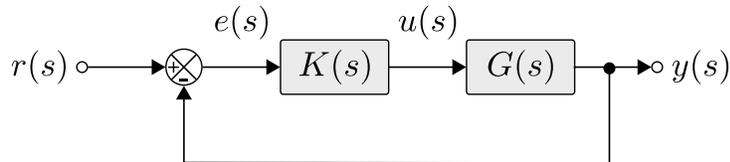


Figura 4.4: Diagrama de bloques que ilustra un sistema de retroalimentación cerrado. La dinámica del sistema  $G(s)$  es controlada por  $K(s)$ .

Nótese también en la figura 4.4 que la salida de  $G(s)$  vuelve a entrar en la parte negativa del nodo lo que da lugar a una *retroalimentación negativa*, esto provoca que el signo de la retroalimentación sea negativo cuando la salida  $y$  se encuentra por encima del valor deseado  $r$  y se vuelve positivo cuando se encuentra por debajo. Un cambio en este signo en la retroalimentación puede generar oscilaciones espontáneas afectando negativamente la estabilidad del sistema.

Ahora se analiza el efecto que tiene introducir una perturbación al sistema  $p(t)$  y un ruido introducido por el sensor  $n(t)$ . De la figura 4.5 se deduce que:

$$y(s) = K(s)G(s)e(s) + p(s), \quad (4.16)$$

donde la señal de error deberá tomar en cuenta el ruido en la medición:

$$e(s) = r(s) - n(s) - y(s), \quad (4.17)$$

por lo que  $y(s)$  ahora se expresará como:

$$y(s) = \frac{KG}{1 + KG}[r(s) - n(s)] + \frac{1}{1 + KG}p(s), \quad (4.18)$$

se observa que la señal de control efectiva ahora es  $r - n$  y el sistema no tiene forma de diferenciar entre el ruido introducido por la medición  $n$  y la señal de control  $r$ . Debido a este efecto, el sistema se volverá más ruidoso conforme aumente la ganancia de la retroalimentación. Es posible disminuir la afectación a través de ajustar la frecuencia de corte  $\omega_0$  del sistema que de ahora en adelante se llamará ancho de banda. Un ancho de banda mayor es bueno para el sistema en tanto permite la compensación de frecuencias cada vez más altas y es perjudicial pues permite que una mayor cantidad de ruido entre al sistema y contamine la retroalimentación. El ancho de banda del sistema de retroalimentación determina qué tan rápido se responde a cambios en el parámetro físico que se desea controlar.

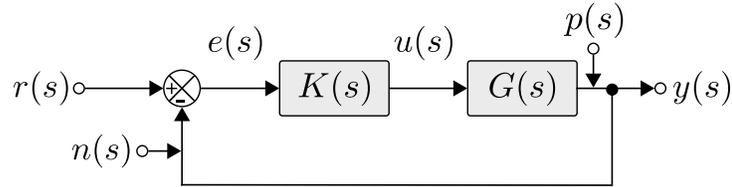


Figura 4.5: Diagrama de bloques que ilustra un sistema de retroalimentación cerrado con una perturbación  $p(s)$  y ruido en la medición  $n(s)$ .

### Ley de control PID

Una de las leyes de control  $K$  más utilizadas para modificar la dinámica de los sistemas es la que implementa un control proporcional, integral y diferencial del cual obtiene sus siglas PID:

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (4.19)$$

donde  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son los parámetros que se modifican para obtener el control deseado. La parte proporcional con  $K_p > 0$  sirve para mitigar el efecto de las perturbaciones de forma directa, reacciona siempre de forma proporcional y en fase con la modulación, una desventaja es que aplica ganancia a altas frecuencias que pueden ser mayores a la frecuencia donde el sistema presenta un desfase de  $90^\circ$ , en este caso el ruido se amplifica en lugar de minimizarse. La parte integral actúa cuando el sistema se estabiliza en el largo plazo pero en un nivel que difiere del punto de anclaje  $r$ , cuando esto sucede la parte integral empieza a sumar el error

y le permite al sistema reaccionar, esta parte presenta un cambio de fase de  $-90^\circ$ . La parte derivativa del sistema presenta un desfase de  $90^\circ$  y sirve cuando el estado del sistema está cambiando rápidamente y es necesario aplicar una retroalimentación inmediata; sin embargo, si se tiene en el experimento un sensor ruidoso el cual introduce fluctuaciones aleatorias en la medición esto puede llevar a una respuesta inapropiada del controlador y volver al sistema inestable, esto se puede mitigar con una buena colocación de filtros que disminuyan el ruido. La figura 4.6 muestra cómo actúan en magnitud y en fase los diferentes elementos del PID.

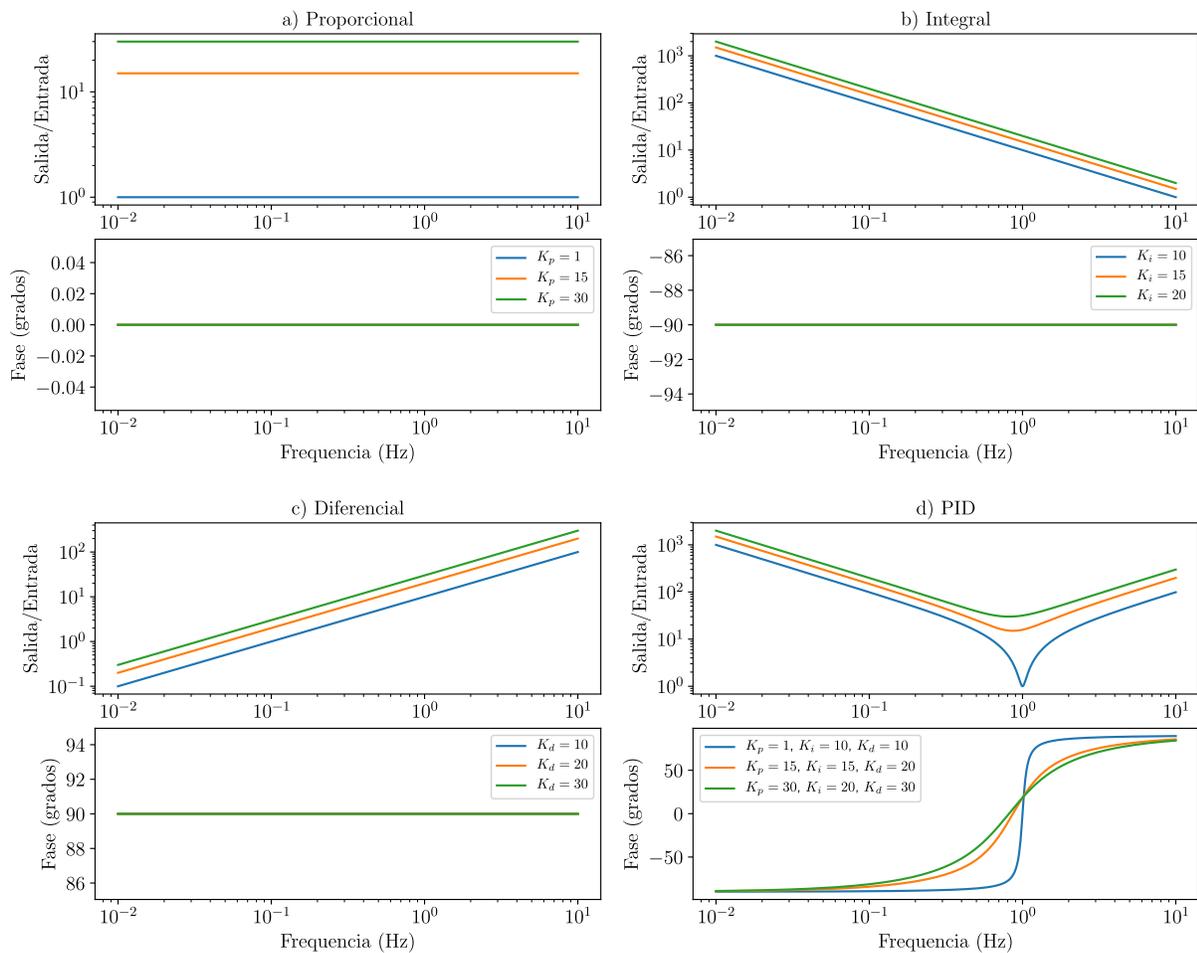


Figura 4.6: Gráficas de Bode de magnitud y fase de las leyes de control individuales que componen a un controlador PID para diferentes valores arbitrarios. a) Control proporcional. b) Control integral. c) Control diferencial. d) Control PID.

## 4.2. Resonadores ópticos

Para estabilizar el espectro de emisión de un láser a través de un sistema de retroalimentación es necesario generar una señal de error que sea sensible a los cambios de la frecuencia emitida, es decir, es indispensable contar con un elemento óptico que discrimine frecuencias y es en ese sentido que los resonadores ópticos son de interés para el desarrollo de este trabajo.

Un resonador óptico confina y almacena luz de longitudes de onda específicas determinadas por la configuración experimental del resonador y es por esto que se pueden utilizar como filtros ópticos o analizadores de espectro. En esta sección se desarrolla el formalismo básico de los resonadores ópticos, los siguientes párrafos se basan en [22].

### 4.2.1. Condiciones de resonancia

El resonador óptico más sencillo en el que se puede pensar es la cavidad de Fabry-Perot también llamado etalon de Fabry-Perot en el cual se colocan dos espejos planos paralelos altamente reflejantes y sin pérdidas separados por una distancia  $d$  como se muestra en la figura 4.7.

Para averiguar cuáles son las condiciones necesarias que debe cumplir la luz para poder resonar con la cavidad se plantean dos enfoques diferentes: el primero es en el que se propone a la luz como una onda estacionaria que cumple ciertas condiciones de frontera establecidas por la cavidad y le permite existir dentro de la misma, el segundo enfoque es el de la onda viajera donde se toma en cuenta el tipo de interferencia que tiene la luz consigo misma al viajar por la cavidad.

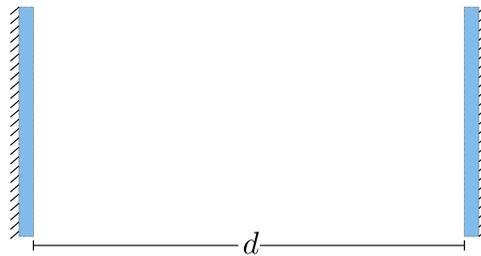


Figura 4.7: Cavidad de Fabry-Perot también conocida como etalon consiste en dos espejos planos paralelos de alta reflectividad y sin pérdidas separados por una distancia  $d$ .

### Onda estacionaria

Una onda plana es una de las más simples y más importantes soluciones a la ecuación de onda escalar de Helmholtz (ver ecuación 2.1) y de forma general se puede escribir como:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0^{(+)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + E_0^{(-)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}, \quad (4.20)$$

aquí el superíndice ( $\pm$ ) diferencia a las partes de frecuencias positivas  $e^{-i\omega t}$  y negativas  $e^{-i(-\omega t)}$  del campo. Las ondas planas estacionarias dentro de la cavidad son la superposición de ondas que van a la derecha y ondas que van a la izquierda en una sola dimensión, proponiendo que la onda plana estacionaria viaja en dirección del eje  $z$  se obtiene:

$$E^{(+)}(z) = E_{01}^{(+)} e^{ikz} + E_{02}^{(+)} e^{-ikz}, \quad (4.21)$$

donde  $E_{01}^{(+)} = E_0^{(+)} e^{-i\omega t}$  es la onda que viaja a la derecha y  $E_{02}^{(+)}$  es la que viaja a la izquierda. Nótese que se han elegido únicamente los términos del campo que contienen frecuencias positivas y de esta forma es posible dejar implícitamente la dependencia temporal del campo. Si se consideran espejos ideales, es decir sin pérdidas, las amplitudes de las dos ondas son iguales:

$$|E_{01}^{(+)}| = |E_{02}^{(+)}| := E_0^{(+)}, \quad (4.22)$$

de esta forma se reescribe la ecuación 4.21 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E^{(+)}(z) &= E_0^{(+)} \left( e^{ikz+i\phi_1} + e^{-ikz-i\phi_2} \right) \\ &= E_0^{(+)} e^{i(\phi_1-\phi_2)/2} \left( e^{ikz+i(\phi_1+\phi_2)/2} + e^{-ikz-i(\phi_1+\phi_2)/2} \right) \\ &= E_0^{(+)} e^{i\Delta\phi/2} \cos(kz + \bar{\phi}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $\phi_1$  y  $-\phi_2$  son las fases del primer y segundo campo,  $\Delta\phi := \phi_1 - \phi_2$ , y  $\bar{\phi} := (\phi_1 + \phi_2)/2$ .

La condición de frontera que debe satisfacerse es que la onda se desvanezca en los espejos. Esto significa que en el lado izquierdo en  $z = 0$ :

$$E_0^{(+)}(z = 0) = 0 \implies \bar{\phi} = -\pi/2, \quad (4.24)$$

por lo que la solución pasa de ser un coseno a un seno:

$$E^{(+)}(z) = E_0^{(+)} e^{i\Delta\phi/2} \sin(kz), \quad (4.25)$$

debe suceder lo mismo para el lado derecho en  $z = d$ , es decir:

$$E_0^{(+)}(z = d) = 0 \implies \sin(kd) = 0 \implies kd = q\pi, \quad (4.26)$$

donde  $q$  es un número entero. Por lo tanto los modos permitidos de la cavidad son las ondas planas que satisfacen la relación:

$$k_q = \frac{\pi q}{d} \quad \text{con} \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

se pueden escribir las condiciones de resonancia en términos de la longitud de onda, frecuencia y frecuencia angular que son permitidas dentro de la cavidad de la siguiente forma:

$$\lambda_q = \frac{2d}{q}, \quad \nu_q = \frac{cq}{2d}, \quad \omega_q = \frac{\pi cq}{d} \quad \text{con} \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

El espectro correspondiente es un arreglo de picos arbitrariamente delgados y que se encuentran espaciados uniformemente como se muestra en la figura 4.8.

La distancia en frecuencia que separa a dos picos contiguos de resonancia es llamado rango espectral libre o FSR por sus siglas en inglés:

$$\nu_{\text{FRS}} := \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2d} = \frac{c_0}{2nd}, \quad (4.29)$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio que llena a la cavidad y  $c_0$  es la velocidad de la luz en el vacío.

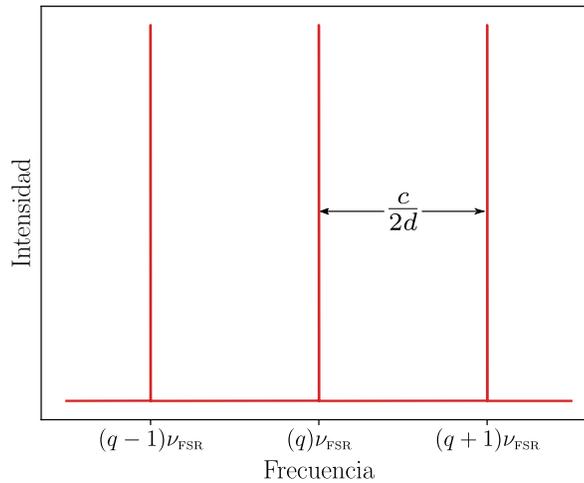


Figura 4.8: Espectro de frecuencias permitidas en una cavidad de Fabry-Perot sin pérdidas. Los picos de resonancia son arbitrariamente delgados.

### Onda viajera

Cuando se considera a la luz como una onda viajera, la interferencia que genera la onda con ella misma después de dar una vuelta completa dentro de la cavidad se vuelve relevante. Para que una onda plana pueda existir dentro de la cavidad debe regresar exactamente con la misma fase después de recorrer de ida y vuelta la cavidad, de esta forma interferirá constructivamente con ella misma. Si la luz presenta un pequeño cambio en fase después de una vuelta este se irá acumulando y después de un tiempo se tendrá interferencia destructiva. Por lo tanto, la fase

acumulada debe ser múltiplo de  $2\pi$ :

$$2kd = 2\pi q \quad \text{con} \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.30)$$

de nuevo, los modos resonantes con la cavidad son las ondas planas que satisfacen:

$$k_q = \frac{\pi q}{d}, \quad (4.31)$$

siendo esta la misma relación encontrada en la ecuación 4.27 cuando se consideró que la onda era estacionaria.

### 4.2.2. Cavidad con pérdidas

Dejando a un lado la cavidad ideal que se estudió en la sección anterior supóngase ahora una cavidad real, esto es, una cavidad que presenta pérdidas. Las pérdidas pueden ser debidas a la transmisión de los espejos, pérdidas alrededor de los bordes de espejos de tamaño finito, dispersión por el medio gaseoso u objetos dentro de la cavidad, etc. Se analizará cómo estas pérdidas modifican las resonancias de la cavidad.

### Intensidad

Ahora se analiza el efecto que sufre el campo debido a las pérdidas después de dar  $n$  vueltas dentro de la cavidad. Supóngase que la amplitud del campo se reduce por un factor de  $r$  cada vuelta completa, esto es lo mismo que decir que uno de los espejos de la cavidad tiene reflectividad del campo eléctrico dado por una constante  $r$  mientras que el otro espejo se mantiene ideal:

$$|E_{n+1}^{(+)}| = |rE_n^{(+)}|, \quad (4.32)$$

en este caso  $E_n^{(+)}$  es la amplitud de la onda plana en la  $n$ -ésima vuelta. Después de una vuelta, la fase de la onda plana cambia como:

$$\Delta\phi = 2kd = \frac{4\pi d}{\lambda}, \quad (4.33)$$

de esta forma se tiene que el campo cumple la relación:

$$E_{n+1}^{(+)} = r e^{i2kd} E_n^{(+)}, \quad (4.34)$$

por lo tanto, la onda total dentro de la cavidad será:

$$\begin{aligned}
 E^{(+)} &= E_0^{(+)} + E_1^{(+)} + \dots \\
 &= E_0^{(+)} [1 + re^{i2kd} + (re^{i2kd})^2 + \dots] \\
 &= \frac{E_0^{(+)}}{1 - re^{i2kd}},
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

para obtener esta expresión se ha utilizado la serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ . La intensidad total será entonces:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{I_0}{|1 - re^{i2kd}|^2} \\
 &= \frac{I_0}{|1 - r \cos(2kd) - ir \sin(2kd)|^2} \\
 &= \frac{I_0}{[1 - r \cos(2kd)]^2 + r^2 \sin^2(2kd)} \\
 &= \frac{I_0}{1 - 2r \cos(2kd) + r^2 \cos^2(2kd) + r^2 \sin^2(2kd)} \\
 &= \frac{I_0}{1 + r^2 - 2r \cos(2kd)} \\
 &= \frac{I_0}{(1-r)^2 + 4r \sin^2(kd)},
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

en este desarrollo se ha utilizado la identidad trigonométrica  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ , además  $I_0 = 2|E_0^{(+)}|^2/\eta$  donde  $\eta$  es la impedancia del medio dentro de la cavidad. Nótese que la intensidad máxima será cuando el denominador sea lo más pequeño posible, es decir, cuando  $4r \sin^2(kd) = 0$ , en ese caso se tendrá que:

$$I_{\max} = \frac{I_0}{(1-r)^2}. \tag{4.37}$$

Existe en la literatura una forma estándar de escribir la intensidad y es en términos de la fineza:

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2(kd)}, \tag{4.38}$$

donde la fineza se define como:

$$\mathcal{F} := \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}, \tag{4.39}$$

la fineza es una cantidad muy importante que caracteriza las pérdidas de la cavidad.

Observese que la única dependencia de la intensidad en la longitud de la cavidad  $d$  es en el término senoidal por lo que la intensidad es periódica en  $d$  con periodo  $\lambda/2$ . Se puede escribir

la intensidad en términos de el rango espectral libre  $\nu_{\text{FSR}}$  de la siguiente manera:

$$I = \frac{I_{\text{max}}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_{\text{FSR}}}\right)}, \quad (4.40)$$

ahora es evidente que la intensidad también es periódica en la frecuencia con el periodo siendo el rango espectral libre como se muestra en la figura 4.9. De nuevo, la intensidad será máxima cuando el denominador sea mínimo y esto implica que:

$$\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_{\text{FSR}}}\right) = 0 \implies \nu = q\nu_{\text{FSR}} \quad \text{con} \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.41)$$

esta es la misma condición de resonancia que para la cavidad sin pérdidas y es en estas frecuencias que la cavidad obtiene un máximo de intensidad. El mínimo de intensidad ocurre cuando el término senoidal toma el valor de la unidad:

$$I_{\text{min}} = \frac{I_{\text{max}}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2}, \quad (4.42)$$

el mínimo de intensidad tiende a cero cuando la fineza se vuelve cada vez más grande.

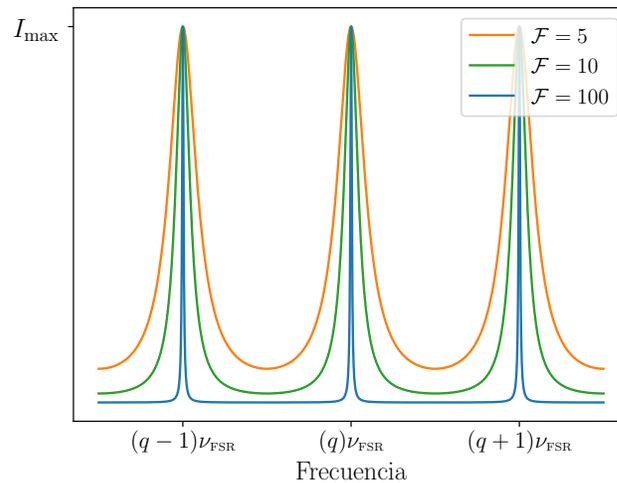


Figura 4.9: Intensidad de la luz que circula dentro de una cavidad con pérdidas. Se aprecia cómo el ancho de línea de las resonancias cambia dependiendo la fineza para tres valores arbitrarios:  $\mathcal{F} = 5, 10$  y  $100$ .

### Ancho de la resonancia

Para definir el ancho de la resonancia se calcula cuánto mide el ancho de la función intensidad definida en la ecuación 4.40. Se define el ancho como la frecuencia tal que la intensidad cae a la mitad de su valor máximo  $I = I_{\max}/2$  y esto sucede cuando:

$$\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_{\text{FSR}}}\right) = 1 \implies \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_{\text{FSR}}}\right) = \left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right)^2, \quad (4.43)$$

despejando para la frecuencia  $\nu$ :

$$\nu = \pm \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\pi} \arcsin\left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right). \quad (4.44)$$

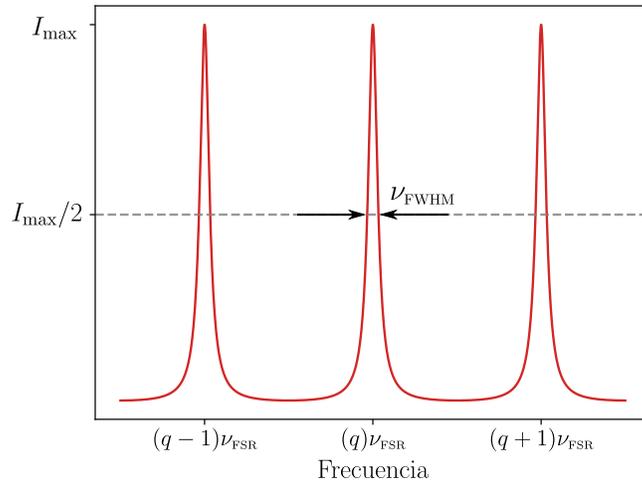


Figura 4.10: Espectro de frecuencias permitidas en una cavidad de Fabry-Perot con pérdidas. Se muestra el ancho completo a media altura  $\nu_{\text{FWHM}}$ .

En realidad, hablar de anchos de línea tiene sentido únicamente cuando se pueden resolver las resonancias, es decir, cuando se tienen finezas altas y en ese caso el argumento del término senoidal se vuelve muy pequeño por lo cual se toma la aproximación de ángulo pequeño:

$$\nu \approx \pm \frac{\nu_{\text{FSR}}}{2\mathcal{F}}, \quad (4.45)$$

de esta forma el ancho completo de la resonancia a la mitad del valor máximo de intensidad es:

$$\nu_{\text{FWHM}} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\mathcal{F}}, \quad (4.46)$$

donde las iniciales FWHM significan ancho completo a media altura por su traducción del inglés. En la figura 4.10 se muestra gráficamente el ancho completo a media altura. En el límite cuando la fineza se hace arbitrariamente grande el ancho de línea se vuelve arbitrariamente pequeño hasta ser una función  $\delta$  de Dirac semejante a las resonancias de una cavidad sin pérdidas.

### Transmisión y reflexión

Para hacer una descripción de la luz que es transmitida o reflejada por la cavidad se analiza el campo eléctrico y cómo es afectado por su interacción con los espejos. El espejo 1 será aquel que se encuentra a la izquierda y es el primero al que llega la luz, el espejo 2 será el de la derecha. El coeficiente de transmisión y reflexión del espejo 1 será  $t_1$  y  $r_1$  respectivamente y se llamará de forma análoga a las propiedades del espejo 2 como se muestra en la figura 4.11. Se utilizarán coeficientes primados para indicar que la luz viaja en dirección contraria a la mostrada en la figura.

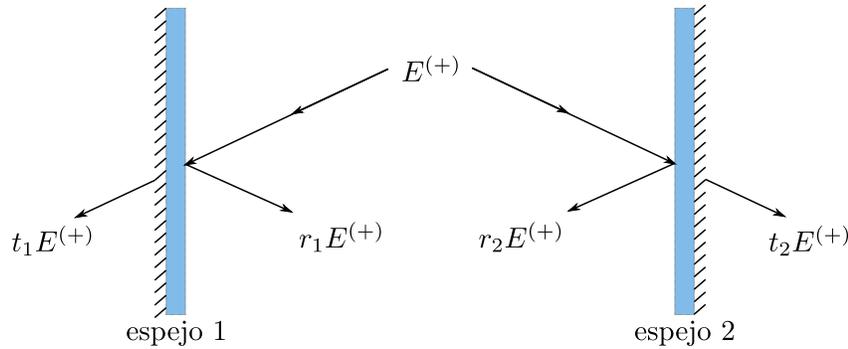


Figura 4.11: Diagrama esquemático de la transmisión y reflexión del campo electromagnético en una cavidad.

El caso más sencillo es aquel en que ambos espejos son idénticos  $t_1 = t_2 = t$  y  $r_1 = r_2 = r$ . Cuando el campo incidente  $E_i$  llega al espejo 1 una parte se refleja de la cavidad y nunca logra entrar, este campo está dado por  $r'E_i$ . Para encontrar el campo total reflejado se suma esta contribución con las partes del campo que son transmitidas a través del espejo 1 y después de viajar dentro de la cavidad y dar múltiples vueltas se escapan de la cavidad por el mismo espejo.

La luz que viaja dentro de la cavidad sufre un cambio de fase  $\phi$  al desplazarse de un espejo a otro debido a que el campo debe recorrer una distancia  $d$  entre los espejos, este cambio de fase estará dado por:

$$\phi = e^{ikd} = e^{i2\pi d/\lambda} = e^{i\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}, \quad (4.47)$$

en la figura 4.12 se muestra un diagrama que ilustra cómo se modifica el campo eléctrico al viajar en la cavidad e interactuar con los espejos. Del esquema se deduce el cociente de campo

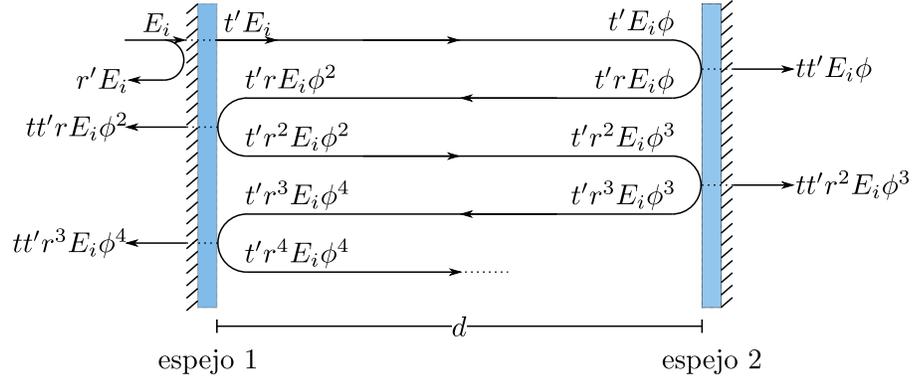


Figura 4.12: Diagrama esquemático que muestra las modificaciones que sufre el campo eléctrico al resonar dentro de una cavidad de longitud  $d$  con pérdidas.

reflejado respecto al campo incidente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(\nu) &= \frac{E_r}{E_i} = r' + tt'r\phi^2 + tt'r^3\phi^4 + r^5\phi^6 \dots \\
 &= r' + tt'\phi (r\phi + r^3\phi^3 + r^5\phi^5 + \dots) \\
 &= -r + (1 - r^2) \phi \left( \frac{r\phi}{1 - r^2\phi^2} \right) \\
 &= \frac{r (e^{i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}} - 1)}{1 - r^2 e^{i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}},
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

para llegar al resultado se han utilizado ambas relaciones de Stokes  $r' = -r$  y  $tt' = 1 - r^2$  además de la serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a(1 - r^{n+1}) / (1 - r)$ . Una gráfica del cuadrado de esta función se muestra en la figura 4.15.

De manera similar se calcula el cociente de campo transmitido respecto al campo incidente:

$$\mathcal{T}(\nu) = \frac{E_t}{E_i} = \frac{(1 - r^2) e^{i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}}{1 - r^2 e^{i2\pi\nu/\nu_{\text{FSR}}}}. \tag{4.49}$$

Nótese que al evaluar  $\nu = \nu_{\text{FSR}}$  en las ecuaciones 4.48 y 4.49 la reflexión es cero y la transmisión es uno, es decir, cuando la frecuencia de la luz es igual a la frecuencia del rango espectral libre todo el campo incidente es transmitido y nada es reflejado.

### 4.2.3. Tiempo de vida del fotón

Para generalizar el tratamiento con pérdidas se define la cantidad  $P_s$  conocida como probabilidad de supervivencia. Se trata de la fracción de la intensidad que permanece dentro de la cavidad después de una vuelta completa. En términos de las reflectancias (coeficientes de

reflexión de intensidad) de los espejos de la cavidad se expresa como:

$$P_s = R_1 R_2, \quad (4.50)$$

donde  $R_i = |r_i|^2$  con  $r_i$  la reflectividad de los espejos,  $i = 1, 2$ . En términos de  $P_s$  la fineza adquiere la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{\pi P_s^{1/4}}{1 - \sqrt{P_s}} \\ &\approx \frac{\pi}{1 - \sqrt{P_s}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

en el segundo renglón se ha hecho la aproximación donde se tiene un buen resonador y  $P_s$  toma un valor cercano a uno por lo que  $\sqrt{P_s}$  también es casi uno. En este límite se puede expandir la expresión  $(1 - \sqrt{P_s})$  al menor orden, es decir  $P_s^{1/4} \approx 1$  y  $(1 - P_s) = (1 - \sqrt{P_s})(1 + \sqrt{P_s}) \approx 2(1 - \sqrt{P_s})$ .

Dado que la probabilidad de que el fotón se pierda es  $1 - P_s$ , se puede probar que el número promedio de vueltas que un fotón sobrevivirá tiene la expresión:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{1 - P_s}. \quad (4.52)$$

A su vez, el tiempo que le toma a un fotón dar una vuelta completa a la cavidad es:

$$\tau_{vc} = \frac{2d}{c} = \frac{1}{\nu_{\text{FSR}}}. \quad (4.53)$$

De esta forma, el tiempo de vida de un fotón dentro de la cavidad será el tiempo que le toma dar una vuelta por el número de vueltas que en promedio sobrevivirá:

$$\tau_f = \frac{1}{(\nu_{\text{FSR}})(1 - P_s)}, \quad (4.54)$$

tomando de nuevo la aproximación donde  $P_s$  toma un valor próximo a uno se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau_f &\approx \frac{1}{(\nu_{\text{FSR}}) 2(1 - \sqrt{P_s})} \\ &= \frac{\mathcal{F}}{2\pi(\nu_{\text{FSR}})} \\ &= \frac{1}{2\pi\nu_{\text{FWHM}}}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

#### 4.2.4. Modos Gaussianos

En los desarrollos anteriores se consideró una cavidad de espejos planos paralelos; sin embargo, esta no es la única configuración que puede tener una cavidad. Al cambiar la geometría

de los espejos la distribución espacial del campo deberá modificarse en consecuencia para poder resonar con la cavidad y formar modos estables dentro de la misma. A pesar de que la óptica de rayos es útil para determinar las condiciones bajo las cuales los rayos pueden ser confinados esta no proporciona información de las distribuciones de intensidad espacial de los modos de resonancia. Para obtener esa información es necesario acudir a la óptica de ondas, en [40] se realiza un análisis a profundidad de este tema y esta subsección se basa en dicho artículo.

Supóngase un campo eléctrico que se desplaza en el eje  $z$  de izquierda a derecha:

$$E = \psi(x, y, z) e^{-ikz}, \quad (4.56)$$

donde  $\psi$  es una función compleja que varía lentamente y representa las diferencias entre un láser y una onda plana, por ejemplo: una distribución no uniforme de la intensidad, expansión del haz con la propagación y curvatura del frente de onda por nombrar algunas. Los modos del campo estarán dados como solución a la ecuación paraxial de Helmholtz con las condiciones de frontera adecuadas:

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad (4.57)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$ . En el espacio libre una solución a la ecuación 4.57 esta dada por:

$$E(r, z) = \frac{W_0}{W} \exp \left[ -i \left( kz - \arctan \left( \frac{\lambda z}{\pi W_0^2} \right) \right) - r^2 \left( \frac{1}{W^2} + \frac{ik}{2R} \right) \right], \quad (4.58)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2$ . Esta solución es conocida como el modo fundamental y depende de dos parámetros reales  $R$  y  $W$  que caracterizan completamente al haz,  $R(z)$  es el radio de curvatura del frente de onda que intersecta al eje  $z$  y  $W(z)$  es una medida de la disminución de la amplitud del campo  $E$  conforme aumenta la distancia al eje  $z$ , esta disminución es de forma Gaussiana y el valor de  $W$  alcanza un mínimo en la cintura del haz  $W_0$  donde el frente de onda es plano.

De forma matemática los parámetros  $R$  y  $W$  estan dados por:

$$W^2(z) = W_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (4.59)$$

y

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 \right], \quad (4.60)$$

donde el parámetro  $z_R$  es la longitud o rango de Rayleigh y se define como la distancia a la cual  $W(z)$  toma el valor de  $\sqrt{2}W_0$ , se puede expresar de la siguiente manera:

$$z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}. \quad (4.61)$$

Es posible excitar el modo fundamental en una cavidad si la luz incidente empata los radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$  en las posiciones  $z_1$  y  $z_2$  respectivamente, de esa forma la luz será reflejada por el mismo camino que ingresó. Si esto no sucede la intensidad se perderá debido a procesos de difracción, absorción o excitación de modos transversales como se describe a continuación. En la figura 4.13 se muestran los frentes de onda de un haz Gaussiano.

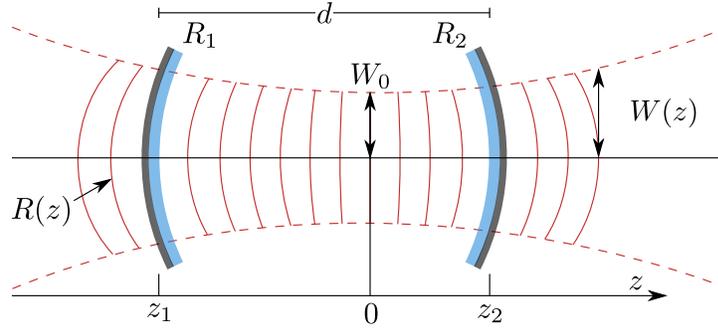


Figura 4.13: Esquema del corte longitudinal de un haz Gaussiano. En línea sólida se muestran los frentes de onda del haz, con línea punteada se muestra el contorno.

En este punto se pueden imponer diferentes geometrías y simetrías al sistema que se traducirán en condiciones de frontera para producir familias de soluciones exactas y ortogonales a la ecuación 4.57. Al resolver la ecuación 4.57 considerando coordenadas cartesianas, es decir un sistema con una geometría rectangular, se obtiene la solución:

$$E_{m,n}(x, y, z) = H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{W}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{W}\right) \exp\left[-i\left(kz - \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2}\right)\right) - (x^2 + y^2)\left(\frac{1}{W^2} + \frac{ik}{2R}\right)\right], \quad (4.62)$$

donde  $H_m(x)$  es el polinomio de Hermite de orden  $m$  por lo que estos modos son conocidos como modos de Hermite-Gauss, en este caso  $m$  y  $n$  son los números de modo y nótese que si ambos valen cero se obtiene de nuevo la ecuación 4.58 que es el modo fundamental. Se puede demostrar [41] que estos modos pueden ser excitados en una cavidad constituida por espejos esféricos si el haz incidente a la cavidad no entra correctamente por el eje óptico definido por los espejos, ya sea que el haz entre de forma paralela al eje óptico pero con una traslación o si se introduce con un ángulo respecto al eje óptico.

Si ahora se considera un sistema con geometría cilíndrica la solución estará dada por:

$$E_{p,l}(r, \phi, z) = \left(\sqrt{2}\frac{r}{W}\right)^l L_p^l\left(2\frac{r^2}{W^2}\right) \exp\left[-i\left(kz + l\phi - (2p + l + 1)\arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2}\right)\right) - r^2\left(\frac{1}{W^2} + \frac{ik}{2R}\right)\right], \quad (4.63)$$

en este caso  $p$  y  $l$  son los números de modo radial y angular respectivamente y  $L_p^l$  es el polinomio generalizado de Laguerre por lo que estos modos se conocen como modos de Laguerre-Gauss. En [41] se muestra que estos modos se obtienen si el tamaño de la cintura de la cavidad no es el mismo de la cintura del haz o si la posición de la cintura de la cavidad y la cintura del haz se encuentran desplazadas.

Para visualizar estos modos de mayor orden se hace un corte transversal en la intensidad del campo eléctrico tomando un valor de  $z$  constante arbitrario, en la figura 4.14 se muestran algunos de los primeros modos excitados de Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss. Como se mencionó antes estas soluciones a la ecuación 4.57 no son las únicas familias de soluciones exactas ortogonales, una tercer familia se obtiene al considerar coordenadas elípticas y representan una transición continua entre los modos de Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss [42].

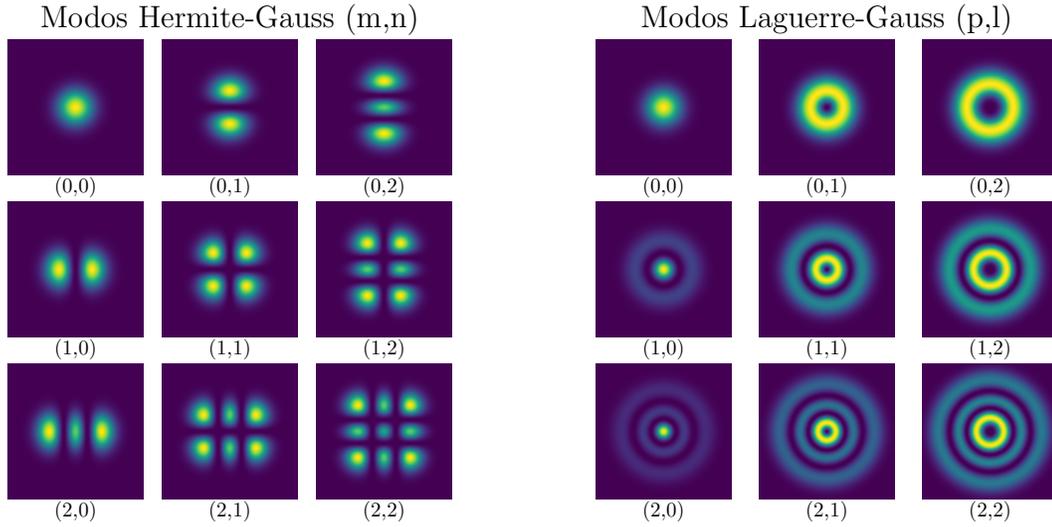


Figura 4.14: Modos transversales del campo electromagnético. Se muestran los primeros modos del tipo Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss.

Debido a que un haz Gaussiano a lo largo de su dirección de propagación adquiere un cambio de fase diferente al que adquiere una onda plana con la misma frecuencia óptica el rango espectral libre será ligeramente diferente:

$$\nu_q = q\nu_{\text{FSR}} + \frac{\Delta\zeta}{\pi}\nu_{\text{FSR}} \quad \text{con} \quad q = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.64)$$

donde  $\nu_{\text{FSR}} = c/2d$  como se había determinado antes es el rango espectral libre y  $\Delta\zeta(z) = -\arctan(z/z_R)$  es conocido como el cambio de fase de Gouy [26]. El espaciamiento en frecuencia de los modos es independiente de la curvatura de los espejos y el segundo término de la derecha

simplemente representa un desplazamiento de todas las frecuencias de resonancia. Finalmente las frecuencias de resonancia para los modos excitados de la cavidad estarán dadas de la siguiente forma:

$$\nu_{l,m,q} = q\nu_{\text{FSR}} + (l + m + 1) \frac{\Delta\zeta}{\pi} \nu_{\text{FSR}} \quad \text{con} \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.65)$$

donde  $l$  y  $m$  son los números de modo descritos anteriormente.

### 4.3. Estabilización de frecuencia Pound-Drever-Hall

Para estabilizar la frecuencia de un láser se necesita una manera precisa y exacta de medir la frecuencia del haz y sus fluctuaciones para generar una señal de error e implementar un sistema de retroalimentación que la estabilice. Una buena manera de lograr esto es utilizar un resonador óptico como referencia de frecuencia mandando la luz a una cavidad de Fabry-Perot y observando la intensidad del campo que se refleja (ver ecuación 4.48). Si se desea operar el láser cerca de una de las frecuencias de resonancia de la cavidad un cambio en la frecuencia del láser se traducirá en un cambio en la intensidad reflejada y a partir de estos cambios es posible determinar la frecuencia del haz y sus fluctuaciones; sin embargo, este método tiene algunas fallas pues cambios en la intensidad de la luz emitida por el láser también se verán reflejados en la intensidad reflejada de la cavidad y el sistema no es capaz de diferenciar estos cambios de fluctuaciones de frecuencia. Además, esta señal es simétrica respecto a la frecuencia de resonancia de la cavidad por lo que si el láser se saliera de dicha frecuencia no hay forma de saber si el láser necesita aumentar o disminuir su frecuencia para volver a resonar con la cavidad (ver figura 4.15).

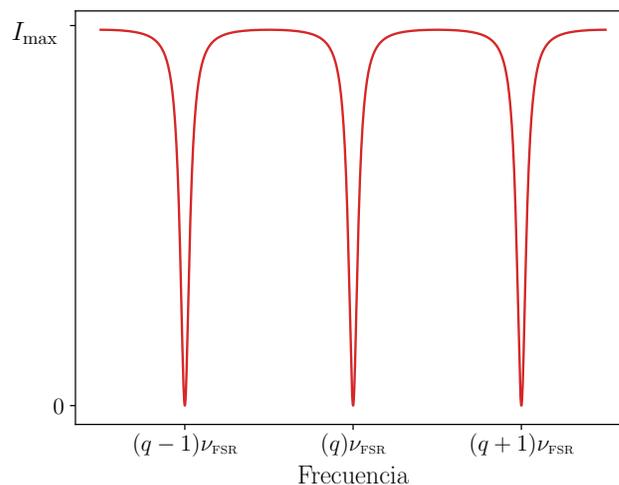


Figura 4.15: Espectro de frecuencias reflejadas de una cavidad de Fabry-Perot con pérdidas.

De la ecuación 4.48 se sabe que el campo reflejado de la cavidad es la suma del campo que se refleja inmediatamente de la cavidad y nunca logra entrar y la suma de campos que se escapan después de dar algunas vueltas dentro de la misma. Estos dos campos tienen la misma frecuencia y cerca de resonancia sus intensidades son casi las mismas; sin embargo, la fase relativa entre ellos depende fuertemente de qué lado de la resonancia se encuentre la frecuencia del láser. Cuando el láser resuena perfectamente con la cavidad la parte del campo que no logra entrar y la que se escapa tienen exactamente un desfase de  $180^\circ$  y se cancelarán completamente. Cuando la luz no es perfectamente resonante la fase entre ellos dice de qué lado de la resonancia se encuentra. La técnica experimental de Pound-Drever-Hall [43, 44] permite medir de forma indirecta la fase relativa entre los dos haces y extraer una señal de error para anclar el láser a la frecuencia de resonancia de la cavidad.

La técnica consiste en modular la fase del haz incidente con un Modulador Electro-Óptico, EOM por sus siglas en inglés, que permitirá generar bandas laterales que a su vez producen nuevos picos de reflexión adicionales a la reflexión principal. Estas surgen debido a que las modulaciones de fase se traducen en modulaciones de frecuencia y de forma efectiva ahora se tiene un haz con tres frecuencias diferentes. Estos nuevos picos de reflexión tendrán una relación de fase definida con el haz incidente y el reflejado. Si se hace interferir las bandas laterales con el haz reflejado se obtendrá un patrón de batido a la frecuencia de modulación y se puede medir la fase electrónicamente a partir de este batido. Las bandas laterales establecen un estándar de fase a partir del cual se mide la fase del haz reflejado.

Se sabe que al modular la fase del campo incidente este tendrá la forma:

$$E_i = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)}, \quad (4.66)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular del haz principal,  $\Omega$  es la frecuencia de modulación de la fase y  $\beta$  es conocido como la profundidad de modulación. Al expandir la expresión utilizando funciones de Bessel se obtiene:

$$\begin{aligned} E_i &\approx [J_0(\beta) + 2iJ_1(\beta) \sin \Omega t] e^{i\omega t} \\ &= E_0 [J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Para calcular el campo que es reflejado de la cavidad cuando hay un haz principal y sus bandas laterales se trata a cada haz independientemente y se multiplica por su coeficiente de reflexión (ecuación 4.48) a la frecuencia correspondiente de cada uno:

$$E_r = E_0 [\mathcal{R}(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + \mathcal{R}(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - \mathcal{R}(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}]. \quad (4.68)$$

Lo que se detecta en un fotodiodo es en realidad la potencia de la luz reflejada de la cavidad,

es decir:

$$\begin{aligned}
P = |E_r|^2 = P_c |\mathcal{R}(\omega)|^2 + P_s \{ & |\mathcal{R}(\omega + \Omega)|^2 + |\mathcal{R}(\omega - \Omega)|^2 \} \\
& + 2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Re} [\mathcal{R}(\omega) \mathcal{R}^*(\omega + \Omega) - \mathcal{R}^*(\omega) \mathcal{R}(\omega - \Omega)] \cos \Omega t \\
& + 2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Im} [\mathcal{R}(\omega) \mathcal{R}^*(\omega + \Omega) - \mathcal{R}^*(\omega) \mathcal{R}(\omega - \Omega)] \sin \Omega t \\
& + (\text{términos } 2\Omega), \quad (4.69)
\end{aligned}$$

se tienen tres ondas con diferentes frecuencias, la onda principal con frecuencia  $\omega$  y dos bandas laterales a frecuencias  $\omega \pm \Omega$  que se pueden entender como una onda con frecuencia nominal  $\omega$  con un patrón de batido envolvente con frecuencia  $\Omega$ .

### 4.3.1. Señal de error

Lo que resta ahora que se conoce la potencia de la luz reflejada por la cavidad que recibe el fotodiodo es procesar electrónicamente esta información para obtener una señal de error que permita anclar la frecuencia de emisión del láser a la frecuencia de resonancia de la cavidad.

Supóngase que el haz principal se encuentra cerca de de la frecuencia de resonancia de la cavidad y la frecuencia de modulación es suficientemente alta tal que las bandas laterales no están cerca de resonancia, es correcto asumir que las bandas laterales se reflejan completamente por lo que:

$$\mathcal{R}(\omega) \mathcal{R}^*(\omega + \Omega) - \mathcal{R}^*(\omega) \mathcal{R}(\omega - \Omega) \approx -2i \operatorname{Im} \{ \mathcal{R}(\omega) \}. \quad (4.70)$$

Nótese que esta es una expresión puramente imaginaria, esto implica que en la ecuación 4.69 el término que oscila como  $\cos(\Omega t)$  se descarta completamente. Si se pudiera aislar electrónicamente el término que oscila como  $\sin(\Omega t)$  entonces se mediría la señal:

$$\epsilon = -2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Im} \{ \mathcal{R}(\omega) \mathcal{R}^*(\omega + \Omega) - \mathcal{R}^*(\omega) \mathcal{R}(\omega - \Omega) \}, \quad (4.71)$$

que resultar ser una excelente señal de error ya que, como se muestra en la figura 4.16, es asimétrica respecto a la frecuencia de resonancia de la cavidad y las variaciones en la intensidad del láser no modifican el punto de anclaje, solo modifican la amplitud de la señal.

El objetivo entonces es aislar electrónicamente la parte de la señal que oscila como  $\sin(\Omega t)$ . Para lograr esto se utiliza un mezclador electrónico de frecuencias y un filtro pasa bajos. La salida de un mezclador de frecuencias esta dada por la multiplicación de sus entradas, usando dos señales de entrada senoidales se obtiene:

$$A \sin(\Omega t) A' \sin(\Omega' t) = \frac{AA'}{2} \{ \cos[(\Omega - \Omega') t] - \cos[(\Omega + \Omega') t] \}, \quad (4.72)$$

donde  $A$  y  $A'$  son las amplitudes de las señales. Si se genera una señal senoidal con frecuencia

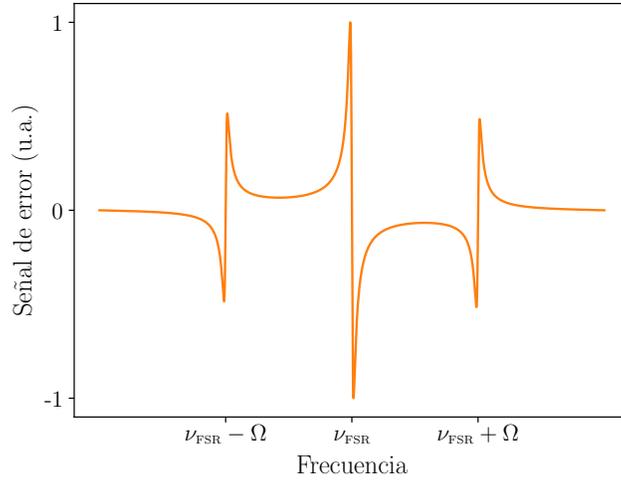


Figura 4.16: Señal de error generada con el método de Pound-Drever-Hall para frecuencias de modulación  $\Omega$  altas (ver 4.71).

$\Omega'$  igual a frecuencia de modulación de las bandas laterales, donde la notación primada indica que la señal viaja por un camino electrónico diferente a la señal que se conduce al EOM, y se introduce en una entrada del mezclador mientras que en la otra se conecta la señal medida en el fotodiodo que, además de los términos que no oscilan, contiene un solo término oscilante que varía como  $\sin(\Omega t)$ , la salida contendrá términos en dos frecuencias: la suma  $(\Omega + \Omega')$  y la resta  $(\Omega - \Omega')$ . Si se hace  $\Omega'$  igual a  $\Omega$  entonces el término que oscila como  $\cos[(\Omega - \Omega') t]$  será una señal se corriente directa proporcional a la amplitud de la señal de error que se quiere medir y se puede aislar con un filtro pasa bajos.

Es importante observar que si en lugar de dos señales senoidales se introducen una señal que oscile como un seno y otra como un coseno la salida del mezclador será:

$$A \sin(\Omega t) A' \cos(\Omega' t) = \frac{AA'}{2} \{ \sin[(\Omega - \Omega') t] - \sin[(\Omega + \Omega') t] \}, \quad (4.73)$$

en este caso si  $\Omega = \Omega'$  la señal dc se hace cero. Es decir, si se desea medir la señal de error se debe poder controlar si se introduce un seno o un coseno en el mezclador de frecuencias, este cambio se traduce en introducir un desfase de  $90^\circ$  en el camino electrónico de la señal de modulación con frecuencia  $\Omega'$ . En la práctica es necesario contar con un elemento que controle el desfase de esta señal en un rango amplio ya que casi siempre habrá desfases desiguales en el camino que lleva la señal EOM y el camino que lleva la señal al mezclador de frecuencias. Un esquema del montaje experimental descrito en esta sección se muestra en la figura 4.17.

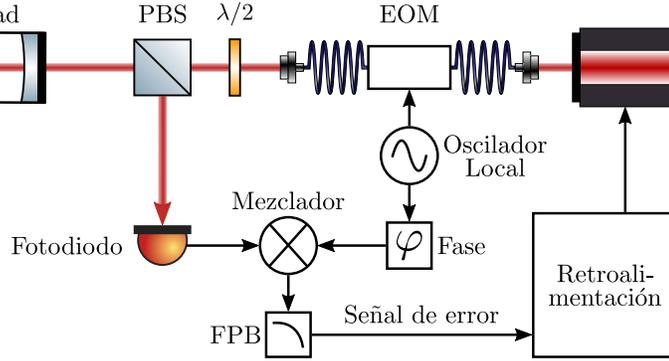


Figura 4.17: Esquema del montaje experimental para la generación de la señal de error usando la técnica Pound-Drever-Hall.

### 4.3.2. Reducción del ancho de línea

La técnica Pound-Drever-Hall tiene una ventaja adicional: permite reducir el ancho del espectro de emisión o ancho de línea del láser. Con esta técnica se han reportado anchos de línea de láseres de diodo desde 1 Hz [45] hasta subhertz [46] representando esta una reducción de hasta 8 órdenes de magnitud comparado con un láser de diodo sin estabilización.

En la sección 2.3 ya se ha expuesto un modelo sencillo acerca de la densidad espectral del ruido en frecuencia que ensancha la forma de línea del espectro de emisión de los láseres. Ahora se hace una ligera modificación a dicho modelo: considérese un láser sometido a un nivel de ruido en frecuencia constante  $h_b$  Hz<sup>2</sup>/Hz que se reduce a un nuevo nivel constante  $h_a$  debido que se implementa un sistema de retroalimentación con ancho de banda  $f_b$ . La densidad espectral del ruido en frecuencia resultante es:

$$S_{\delta\nu}(f) = \begin{cases} h_b, & \text{si } f \geq f_b \\ h_a, & \text{si } f < f_b, \end{cases} \quad (4.74)$$

donde  $h_a < h_b$ . Con este modelo se puede calcular la evolución de la forma y ancho de línea dependiendo del ancho de banda  $f_b$  del sistema de retroalimentación. La ecuación 2.18 en este caso toma la forma:

$$G_E(\tau) = E_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} \exp \left[ -h_b\pi^2|\tau| - \frac{h_a - h_b}{f_b} \left( 2\pi f_b\tau \text{Si}(2\pi f_b\tau) - 2\sin^2(\pi f_b\tau) \right) \right], \quad (4.75)$$

donde  $\text{Si}(x)$  es la función del seno integral. De acuerdo al teorema de Wiener-Khinchin, la forma de línea del láser está dada por la transformada de Fourier de la función de autocorrelación (ver ecuación 2.17):

$$S_E(\nu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu\tau} G_E(\tau) d\tau. \quad (4.76)$$

Desafortunadamente esta fórmula general no puede ser integrada analíticamente; sin embargo, en la figura 4.18 se muestra el cálculo numérico de la forma de línea para distintos valores de ancho de banda con un nivel de ruido  $h_b = 1 \text{ MHz}^2/\text{MHz}$  fijo que se reduce a  $h_a = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$ . Se observa que el ancho de línea tiende a  $\pi h_b$  cuando el ancho de banda  $f_b$  tiende a cero, esto se explica pues el espectro del ruido corresponde a uno de ruido blanco con un nivel fijo  $h_b$ . Por otra parte el ancho de línea tiende a  $\pi h_a$  cuando el ancho de banda  $f_b$  tiende a infinito pues en este caso el ruido es blanco pero tiene un nivel  $h_a$ .

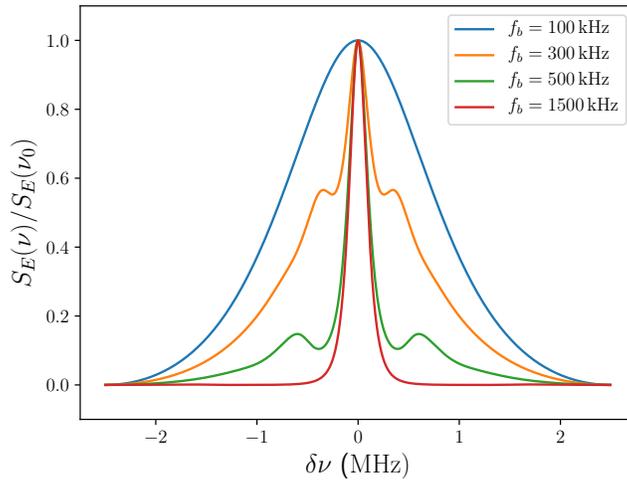


Figura 4.18: Evolución de la forma de línea para un láser sometido a un sistema de retroalimentación con distintos anchos de banda  $f_b$ .

En [27] se muestra que el ancho de banda mínimo necesario para reducir el ancho de línea en este modelo está dado por:

$$f_b^{min} = \frac{\pi^2 h_b}{8 \ln(2)}. \quad (4.77)$$

Este ancho de banda depende del nivel del ruido inicial  $h_b$  y corresponde al caso en que el ruido se encuentra por debajo de la línea  $\beta$  de separación para frecuencias más grandes que el ancho de banda del sistema de retroalimentación como se muestra en la figura 4.19. Como consecuencia, cuando  $f_b > f_b^{min}$  únicamente la parte de bajas frecuencias con un nivel del ruido  $h_a$  se encuentra por encima de la línea  $\beta$  de separación y solo esta provoca un aumento en el ancho de línea (ver sección 2.3). Nótese que el ancho de línea final del láser depende del nivel  $h_a$  y por lo tanto de la ganancia del sistema de retroalimentación a bajas frecuencias, pero es independiente del ancho de banda del sistema siempre que  $f_b > f_b^{min}$ .

Conseguir los componentes electrónicos para implementar un sistema de retroalimentación con un ancho de banda superior al ancho de banda mínimo  $f_b^{min}$  y que tenga suficiente ganancia a bajas frecuencias para reducir el ancho de línea no es una complicación mayor pues estos existen

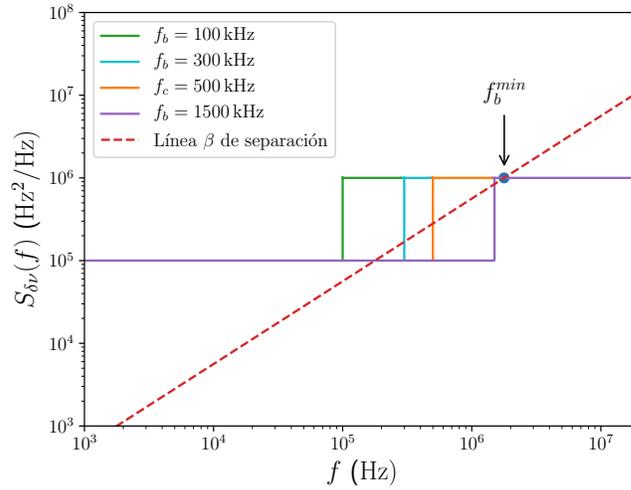


Figura 4.19: Modelo de ruido en frecuencia usado para estudiar la reducción del ancho de línea implementando un sistema de retroalimentación (ver ecuación 4.74). Se asume que el nivel de ruido  $h_b = 1 \text{ MHz}^2/\text{MHz}$  fijo se reduce a  $h_a = 100 \text{ kHz}^2/\text{kHz}$  por medio de un sistema de retroalimentación con ancho de banda  $f_b$ . El ancho de banda mínimo para reducir eficientemente el ancho de línea es  $f_b^{\min} = \pi^2 h_b / (8 \ln(2))$ .

en el mercado. Lo que es más importante es lograr medir una gran cantidad de componentes de Fourier del ruido, incluso las que tienen amplitudes más bajas, aquí es donde se vuelve relevante la técnica Pound-Drever-Hall. La señal de error que se produce a través del método PDH es una medida de qué tan alejado se encuentra el láser de la frecuencia de resonancia de la cavidad. El interés se centra ahora en cómo cambia la sensibilidad de la señal de error al modificar la fineza de la cavidad. En la figura 4.20 se muestra la derivada de la función de error en función de la frecuencia para distintas finezas y se observa que al incrementar la fineza de la cavidad la derivada incrementa su valor cerca de la frecuencia de resonancia. Los cambios en el valor de la derivada se tornan abruptos para pequeños desplazamientos en frecuencia y esto significa que al incrementar la fineza la señal de error incrementa su sensibilidad y las componentes en frecuencia del ruido que afectan al láser se traducirán en grandes cambios en el voltaje de la señal de error que se retroalimenta al sistema, incluso si la amplitud de las mismas es pequeña. Medir las fluctuaciones en frecuencia del láser con este método permite que el sistema de retroalimentación suprima un gran rango de frecuencias del ruido y disminuya efectivamente el ancho de línea del láser.

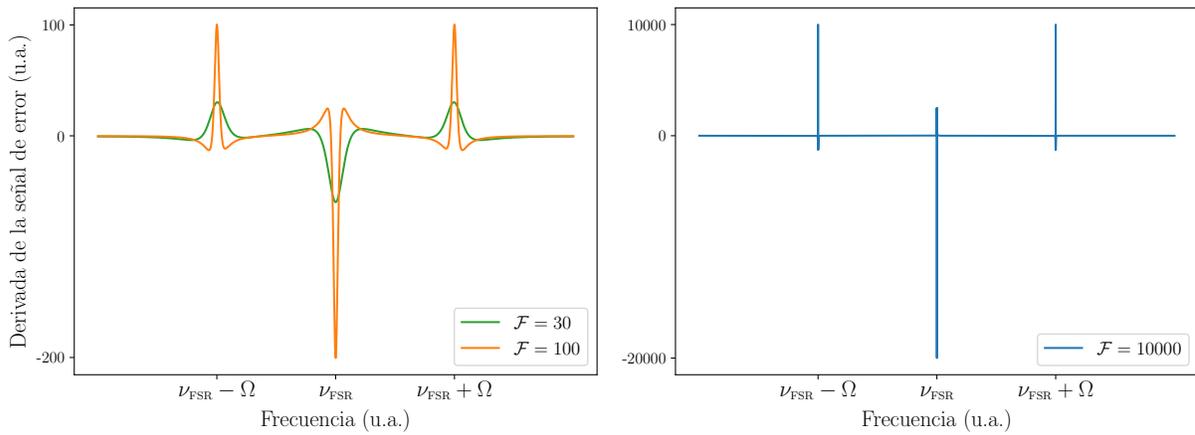


Figura 4.20: Derivada en función de la frecuencia de la señal de error generada con el método de Pound-Drever-Hall para frecuencias de modulación  $\Omega$  altas (ver 4.71). Al incrementar la fineza de la cavidad óptica el valor de la derivada cerca de la frecuencia de resonancia aumenta y pequeños cambios en la frecuencia del láser se transforman en grandes cambios en la señal de error.



## Capítulo 5

---

---

# Esquema experimental

---

---

5.1	Cavidad de referencia . . . . .	74
5.1.1	Acoplamiento de modo . . . . .	75
5.1.2	Rango espectral libre . . . . .	76
5.1.3	Fineza . . . . .	76
5.2	Láser de 780 nm . . . . .	77
5.2.1	Óptica . . . . .	77
5.2.2	Electrónica . . . . .	79
5.3	Láser de 960 nm . . . . .	80
5.3.1	Óptica . . . . .	81
5.3.2	Electrónica . . . . .	83
5.4	Caracterización . . . . .	84
5.4.1	Acoplamiento de modo . . . . .	84
5.4.2	Rango espectral libre . . . . .	86
5.4.3	Fineza . . . . .	88
5.4.4	Control de temperatura . . . . .	91
5.4.5	Estabilidad de la cavidad . . . . .	91
5.4.6	Optimización del anclaje . . . . .	95

En este capítulo se hace una descripción completa de la parte experimental de esta tesis. En la primera sección se presentan las características de la cavidad de referencia. En las secciones dos y tres se explica el diseño del montaje óptico y electrónico utilizado para estabilizar la frecuencia de los láseres de 780 nm y 960 nm mediante la técnica Pound-Drever-Hall. En la cuarta sección se expone la caracterización y optimización de los anclajes.

## 5.1. Cavity de referencia

Se utiliza una cavidad óptica plano-cóncava fabricada por Stable Laser Systems para estabilizar la frecuencia de los dos láseres que generan la excitación de Rydberg. Los espejos se encuentran montados sobre un separador cilíndrico de vidrio de ultra baja expansión o ULE por sus siglas en inglés. Se trata de un tipo especial de vidrio de silicato dopado con dióxido de titanio que adquiere un mínimo de expansión térmica a cierta temperatura crítica  $T_c$  cercana a la temperatura ambiente. Con este material se puede aproximar la longitud relativa de la cavidad en función de la temperatura de la siguiente manera [46]:

$$\frac{\Delta d}{d} \approx 10^{-9} \left( \frac{T - T_c}{^\circ\text{C}} \right)^2, \quad (5.1)$$

donde  $d$  es la separación entre los espejos,  $\Delta d$  es el cambio en la separación y  $T$  es la temperatura del espaciador de ULE. Cerca de  $T_c$  la longitud relativa adquiere un valor cercano a cero y esto implica que las fluctuaciones en el rango espectral libre se vuelven pequeñas. Al estabilizar térmicamente el sistema alrededor de  $T_c$  se obtiene una referencia en frecuencia estable.

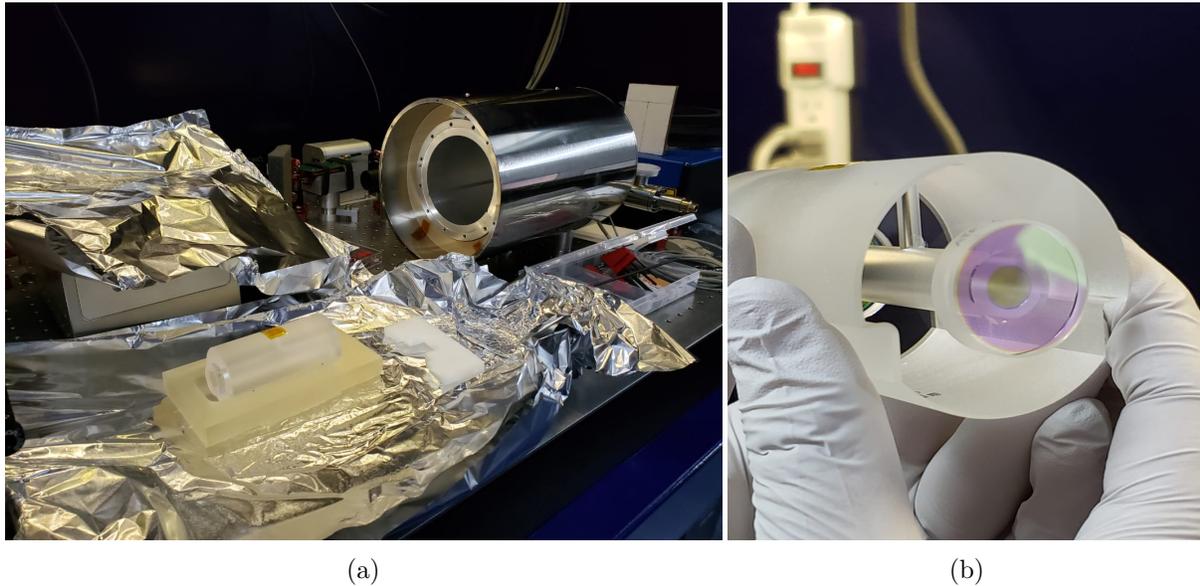


Figura 5.1: Se muestra el montaje de la cavidad de alta fineza utilizada para estabilizar la frecuencia de los láseres de 780 nm y 960 nm. (a) Espaciador de ULE montado sobre el bloque de Zerodur y la cámara de vacío. (b) Cavidad montada en espaciador de ULE.

Para lograr una alta estabilidad térmica el espaciador de ULE es montado en un bloque de Zerodur sobre 4 esferas de viton, material que también posee cualidades térmicas, dentro de una cámara de vacío de aluminio como se muestra en la figura 5.1. El Zerodur es un material de vitrocerámica de aluminosilicato de litio cuyo coeficiente de expansión térmica es menor que el

de la cámara de aluminio. Una bomba iónica se conecta a la cámara de vacío para alcanzar una presión de  $10^{-8}$  mbar al mismo tiempo que la temperatura se estabiliza alrededor de  $30.5^\circ\text{C}$  con un controlador comercial. Esta configuración permite aislar térmica y mecánicamente al sistema de su entorno y permite crear una referencia en frecuencia ultra estable.

### 5.1.1. Acoplamiento de modo

Con el objetivo de utilizar eficientemente la potencia de la luz acoplada a la cavidad se busca excitar únicamente el modo fundamental, de esto dependerá la amplitud de la señal de error generada (ver ecuación 4.71). La posición y el tamaño de la cintura de la cavidad deberán ser igualados por los láseres de bombeo para evitar excitar modos transversales de orden mayor (ver subsección 4.2.4).

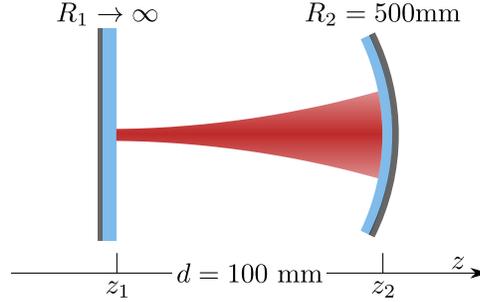


Figura 5.2: Esquema de la cavidad óptica de referencia montada en el experimento.

El resonador está formado por un espejo plano de radio de curvatura  $R_1 \rightarrow \infty$  y un espejo cóncavo con  $R_2 = 500$  mm separados por una distancia  $d = 100$  mm como se muestra en la figura 5.2. De acuerdo a la ecuación 4.60 se sabe lo siguiente:

$$R(z_1) = R_1 = z_1 + \frac{z_R}{z_1} \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

y

$$R(z_2) = R_2 = z_2 + \frac{z_R}{z_2} = 500 \text{ mm}, \quad (5.3)$$

de la ecuación 5.2 se deduce que  $z_1 = 0$  mm de tal forma que la posición de la cintura es igual a la posición del espejo plano. En consecuencia, la posición del espejo cóncavo será  $z_2 = d$ . A partir de la ecuación 5.3 se calcula el rango de Rayleigh:

$$\begin{aligned} z_R &= \sqrt{z_2(R_2 - z_2)} \\ &= 200 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Finalmente, para conocer el tamaño de la cintura se emplea la ecuación 4.61. Los tamaños

de cintura para los láseres serán:

$$W_{0,780} = 223 \mu\text{m} \quad (5.5)$$

para 780 nm y

$$W_{0,960} = 247 \mu\text{m} \quad (5.6)$$

para 960 nm. Es necesario elegir un esquema óptico que enfoque los haces a la cavidad para lograr estos tamaños de cintura.

### 5.1.2. Rango espectral libre

La distancia entre los espejos de la cavidad especificada por el fabricante es  $d = 100$  mm. Usando la ecuación 4.29 se calcula el rango espectral libre teórico:

$$\nu_{\text{FSR,teo}} = 1.498 \text{ GHz}. \quad (5.7)$$

Por otra parte, a partir de la ecuación 4.64 se determina la separación entre dos modos contiguos al hacer la diferencia entre dos modos con el mismo valor  $q$  y distinto  $(m, l)$ , es decir:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{l,m,q,\text{teo}} &= \nu_{1,0,q} - \nu_{0,0,q} \\ &= \frac{\arctan(z_2/z_R)}{\pi} \nu_{\text{FSR}} \\ &= 0.221 \text{ GHz}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $z_R$  y  $z_2$  toman los valores numéricos calculados en la subsección anterior.

### 5.1.3. Fineza

Dos recubrimientos especiales se añadieron a los espejos con el fin de obtener alta reflectividad para luz de 780 nm y 960 nm. La ecuación 4.39 permite estimar las finezas usando las reflectividades especificadas por el fabricante:

$$\begin{aligned} r_{780} = 0.99952 &\implies \mathcal{F}_{780,\text{teo}} = 6542.2 \\ r_{960} = 0.999842 &\implies \mathcal{F}_{960,\text{teo}} = 19861.1, \end{aligned} \quad (5.9)$$

de tal forma que se tiene una cavidad de alta fineza para luz de 780 nm y 960 nm. Aunado a esto se tiene un tiempo de vida de los fotones dado por la expresión 4.55:

$$\begin{aligned} \tau_{f,780} &= 695 \text{ ns} \\ \tau_{f,960} &= 2.11 \mu\text{s}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

## 5.2. Láser de 780 nm

Este es uno de los dos láseres necesarios para generar la excitación de Rydberg. En esta sección se detallan los esquemas óptico y electrónico utilizados para estabilizar su frecuencia mediante la técnica Pound-Drever-Hall.

### 5.2.1. Óptica

Se eligió un láser de diodo en la configuración cat-eye (ver subsección 2.1.1) fabricado por MOGlabs que emite principalmente a una longitud de onda de 780 nm. Será utilizado para excitar átomos de rubidio del estado base al estado intermedio  $5^2P_{3/2}$ . Servirá también como referencia en frecuencia para anclar otros láseres mediante un batido de frecuencias (ver [47]).

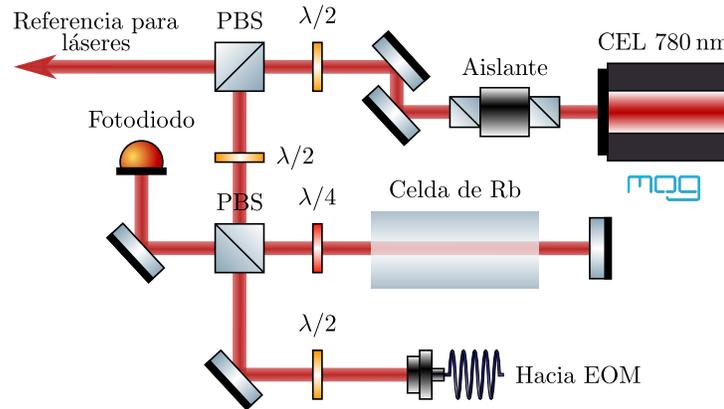


Figura 5.3: Esquema del montaje óptico para el láser de 780 nm.

En la figura 5.3 se muestra el esquema del montaje óptico. La potencia de la luz a la salida del láser es de 72 mW. Se coloca una lámina de media onda y un cubo divisor de haz polarizador, PBS por sus siglas en inglés, que divide en dos ramas el haz, la lámina permite variar la potencia que se distribuye en cada ramificación. Una de las ramas continúa su trayecto por la mesa óptica llevándose el 98 % de la potencia total. Los láseres que se anclarán por batido tomarán la referencia de este haz. En la rama de baja potencia el haz se divide nuevamente por el mismo método. En una rama se implementa una espectroscopía de absorción saturada de la línea D2 de  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$  que se utiliza como referencia absoluta de frecuencia (ver figura 3.1). En este tipo de espectroscopía se hace incidir dos haces contrapropagantes sobre una nube atómica cuyos átomos tienen una distribución de velocidades tipo Maxwell. Al variar la frecuencia de ambos láseres estos interactuarán con la fracción de átomos en la clase de velocidades  $v \approx 0$  cuando la frecuencia de los láseres se encuentre cerca de resonancia. El primer haz excita una fracción de los átomos al nivel excitado que provoca un pico en la señal de absorción al paso del segundo haz, esta es una técnica de espectroscopía libre del efecto Doppler [15]. La fracción

restante de luz se acopla a la fibra óptica del modulador electro-óptico que dirige el haz hacia la cavidad.

El arreglo óptico para empatar la posición y cintura de la cavidad (ver ecuación 5.5) se muestra en la figura 5.4. Los elementos ópticos utilizados así como su posición estimada se encuentran en la tabla 5.1. El montaje se planeó con el programa Gaussian Beam Calculator. La cintura del haz saliente de la fibra óptica del EOM se midió a partir del tamaño de la cintura del haz colimado con una lente en la aproximación paraxial de la apertura numérica.

Elemento	Características	Posición estimada (mm)
Fibra óptica	$W_0 \approx 2.8 \mu\text{m}$	0
Lente	$f = 4.482 \text{ mm}$	4.48
Lente	$f = 300 \text{ mm}$	395
Espejo cóncavo	$R = 500 \text{ mm}$	600
Espejo plano	$R \rightarrow \infty$	700
Cintura estimada	$W'_{0,780} = 119 \mu\text{m}$	700

Tabla 5.1: Elementos ópticos utilizados para acoplar el modo fundamental a la cavidad de alta fineza para un haz con longitud de onda de 780 nm.

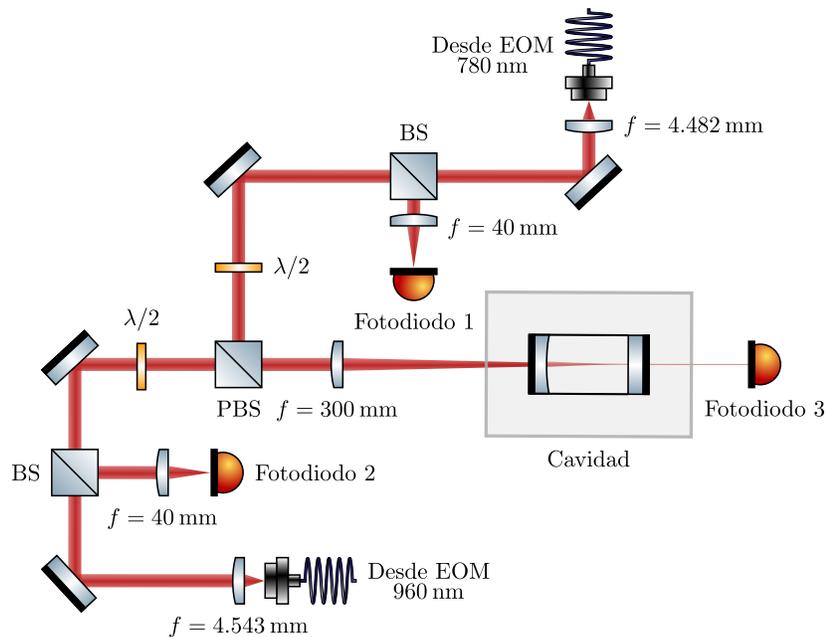


Figura 5.4: Esquema del montaje óptico para acoplar el modo fundamental de los láseres de 780 nm y 960 nm a la cavidad de alta fineza. Mezclar los haces con un PBS asegura que sus polarizaciones serán diferentes. La luz reflejada de la cavidad se separa usando divisores de haz y se enfoca en el fotodiodo 1 para 780 nm y fotodiodo 2 para 960 nm. El fotodiodo 3 captura la luz transmitida de la cavidad para monitorear la alineación.

Usando el tamaño estimado de la cintura del haz se calcula el error teórico en el acoplamiento del modo fundamental de la siguiente manera [41]:

$$\varepsilon_{780} = \left( \frac{W'_{0,780}}{W_{0,780}} - 1 \right)^2 = 21 \%. \quad (5.11)$$

Esto implica que 21 % de la potencia total del haz se utilizará para excitar el primer modo transversal Laguerre-Gauss. Aquí la notación primada hace referencia a la cintura del haz.

Es importante recordar que el error y las posiciones de los elementos ópticos son valores estimados. En este experimento no es posible medir con precisión las distancias relativas. El espaciador de ULE se introduce a la cámara de vacío y a partir de ese punto solo es posible aproximar la ubicación de los espejos de la cavidad; sin embargo, los valores estimados representan un punto de partida para acoplar de forma correcta la luz a la cavidad, esto se logrará haciendo el pico de transmisión del modo fundamental mucho mayor que los demás como se explica en la subsección 5.4.1.

### 5.2.2. Electrónica

Este láser utiliza un sistema de retroalimentación rápido para estabilizar su frecuencia con la técnica Pound-Drever-Hall. El controlador FSC100 fabricado por MOGLabs implementa dos sistemas de retroalimentación que actúan individualmente:

- Retroalimentación lenta en piezo
- Retroalimentación rápida en corriente

La retroalimentación **lenta** tiene un ancho de banda de 10 kHz aproximadamente y modifica la respuesta del piezo. Implementa una ley de control integral o doble integral con ganancia y frecuencia de corte variables. Su objetivo es compensar las perturbaciones de baja frecuencia que afectan al láser como variaciones debidas a cambios en temperatura, vibraciones sonoras o corrientes de aire.

La retroalimentación **rápida** tiene un ancho de banda de 10 MHz aproximadamente y modifica la corriente que alimenta al diodo. Implementa una ley de control PID con ganancia y frecuencia de corte variables en todo el ancho de banda. Compensa las perturbaciones de baja y alta frecuencia que modifican la respuesta del láser.

El esquema del montaje electrónico para la generación de la señal de error y la aplicación del sistema de retroalimentación se muestra en la figura 5.5. La retroalimentación lenta se implementa a través del controlador DLC202 de MOGLabs que traduce la salida del controlador FSC100 en una señal de alto voltaje para controlar el piezo mientras que la retroalimentación rápida en la corriente se aplica directo al diodo.

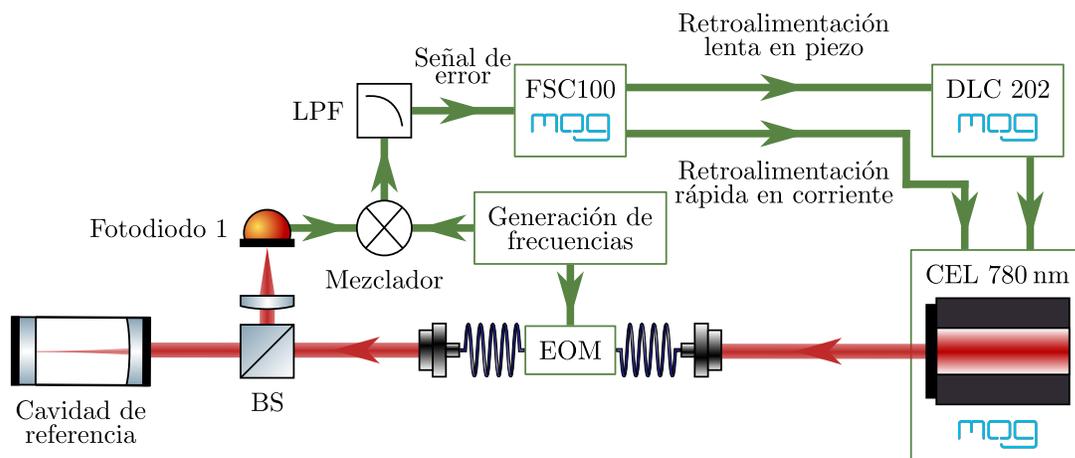


Figura 5.5: Esquema del montaje electrónico para el láser de 780 nm.

La técnica de estabilización de frecuencia que se ha expuesto hasta este punto permite anclar la frecuencia del láser a una de las frecuencias de resonancia de la cavidad con gran precisión; sin embargo, estas no corresponderán generalmente a la frecuencia de transición atómica del estado  $5^2P_{3/2}$  del rubidio. Una modificación menor en la técnica original de Pound-Drever-Hall permite anclar el láser a cualquier frecuencia arbitraria dentro del rango de emisión.

Si se compara la espectroscopía medida de la línea D2 de  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$  con la señal de transmisión de la luz acoplada a la cavidad se puede determinar la diferencia de frecuencias entre una de las resonancias del modo fundamental y la transición atómica deseada, se llamará a esta frecuencia  $f_{\text{dif}}$ . Al modular la luz con esta frecuencia aparecerán bandas laterales en la señal de transmisión de la cavidad a una frecuencia igual a la frecuencia de transición atómica deseada. La estrategia consiste en aplicar la técnica Pound-Drever-Hall al primer conjunto de bandas laterales para anclar el láser a la frecuencia  $f_{\text{dif}}$ . Al introducir una segunda modulación con frecuencia  $f_{\text{PDH}}$  se genera un segundo conjunto de bandas laterales referentes a la primera que permiten generar la señal de error.

Es ideal contar con un elemento electrónico que genere señales con frecuencias de hasta la mitad del rango espectral libre para tener flexibilidad en la frecuencia de anclaje  $f_{\text{dif}}$ . En este esquema se utiliza una DDS AD9959 que genera una señal senoidal de hasta 200 MHz pues con este rango es posible anclar a la frecuencia de transición atómica requerida. El esquema de la generación de señales se muestra en la figura 5.6.

### 5.3. Láser de 960 nm

Este es el segundo láser que se estabilizó en frecuencia usando la cavidad ultra estable y de alta fineza. Los esquemas ópticos y electrónicos se describen a continuación.



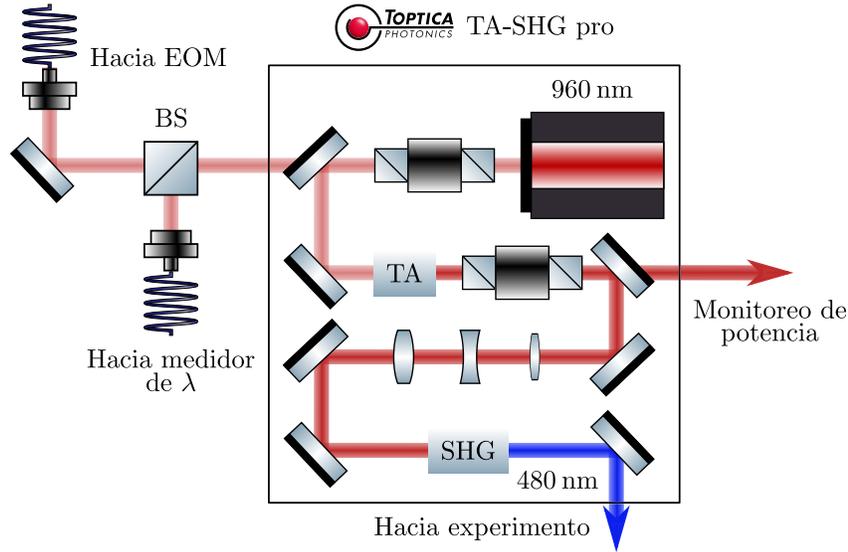


Figura 5.7: Esquema del montaje óptico para el láser de 960 nm.

medidor de onda. Al determinar la longitud de onda de la luz infrarroja se deduce la longitud de onda de la luz azul, pues esta es del doble de frecuencia, permitiendo conocer qué estado de Rydberg se está excitando.

El arreglo óptico para empatar la posición y tamaño de la cintura de la cavidad (ver ecuación 5.6) se muestra en la figura 5.4. Los elementos ópticos utilizados así como su posición estimada se encuentran en la tabla 5.2. El montaje se planeó de forma similar al caso del láser de 780 nm (ver subsección 5.2.1).

Elemento	Características	Posición estimada (mm)
Fibra óptica	$W_0 \approx 3.6 \mu\text{m}$	0
Lente	$f = 4.543 \text{ mm}$	4.54
Lente	$f = 300 \text{ mm}$	340
Espejo cóncavo	$R = 500 \text{ mm}$	600
Espejo plano	$R \rightarrow \infty$	700
Cintura estimada	$W'_{0,960} = 168 \mu\text{m}$	700

Tabla 5.2: Elementos ópticos utilizados para acoplar el modo fundamental a la cavidad de alta fineza para un haz con longitud de onda de 960 nm.

Usando el tamaño estimado de la cintura del haz se calcula el error teórico en el acoplamiento del modo fundamental de la siguiente manera [41]:

$$\varepsilon_{960} = \left( \frac{W'_{0,960}}{W_{0,960}} - 1 \right)^2 = 10 \%. \quad (5.12)$$

Debido a que existen elementos ópticos compartidos por los haces de 780 nm y 960 nm como el lente de  $f = 300$  mm es claro que se debe encontrar un punto intermedio entre las posiciones estimadas de tal forma que la alineación sea la mejor posible para los dos haces.

### 5.3.2. Electrónica

Para estabilizar la frecuencia de este láser se utiliza un sistema de retroalimentación rápido. El controlador FALC 110 fabricado por Toptica implementa dos sistemas de retroalimentación:

- Retroalimentación rápida en corriente
- Retroalimentación lenta en piezo

La retroalimentación **rápida** tiene un ancho de banda de 10 MHz aproximadamente y controla la corriente que alimenta al diodo. Implementa una ley de control ID haciendo un énfasis especial en la parte integral pues la amplitud de los ruidos que afectan la frecuencia del láser normalmente decrecen con la frecuencia. Tres circuitos diferentes de integración se aplican para diferentes rangos de frecuencias permitiendo una gran personalización en las ganancias y frecuencias de corte.

La retroalimentación **lenta** tiene un ancho de banda de algunas decenas de kHz aproximadamente e implementa una ley de control integral usando la misma señal de error. Su objetivo es corregir las derivas lentas de la frecuencia del láser controlando el comportamiento del piezo en la rejilla de difracción. El piezo tiene una respuesta lenta; sin embargo, puede modificar la frecuencia de emisión del láser en un rango amplio. En tanto que la ganancia de este sistema supere la ganancia de la parte rápida a bajas frecuencias la retroalimentación lenta se encarga de compensar las fluctuaciones de baja frecuencia.

El esquema del montaje electrónico para la generación de la señal de error y la aplicación del sistema de retroalimentación se muestra en la figura 5.8. La retroalimentación lenta en el piezo se implementa a través del controlador DLC pro de Toptica que traduce la salida del controlador FALC 110 en una señal de alto voltaje para controlar el piezo mientras que la retroalimentación rápida en la corriente se aplica directo al diodo.

Para anclar el láser a una frecuencia arbitraria dentro del rango de emisión se implementa la técnica modificada de Pound-Drever-Hall (ver subsección 5.2.2). En este esquema la primera modulación a una frecuencia  $f_{\text{dif}}$  se implementa a través del modulador electro-óptico (ver figura 5.9). Una segunda modulación a una frecuencia  $f_{\text{PDH}} = 20$  MHz se aplica a la corriente del diodo mediante un oscilador externo. El módulo PDD 110 de Toptica genera la segunda modulación y a partir de la señal de reflexión de la cavidad de referencia crea la señal de error que se alimenta al FALC 110 para implementar los dos sistemas de retroalimentación antes descritos.

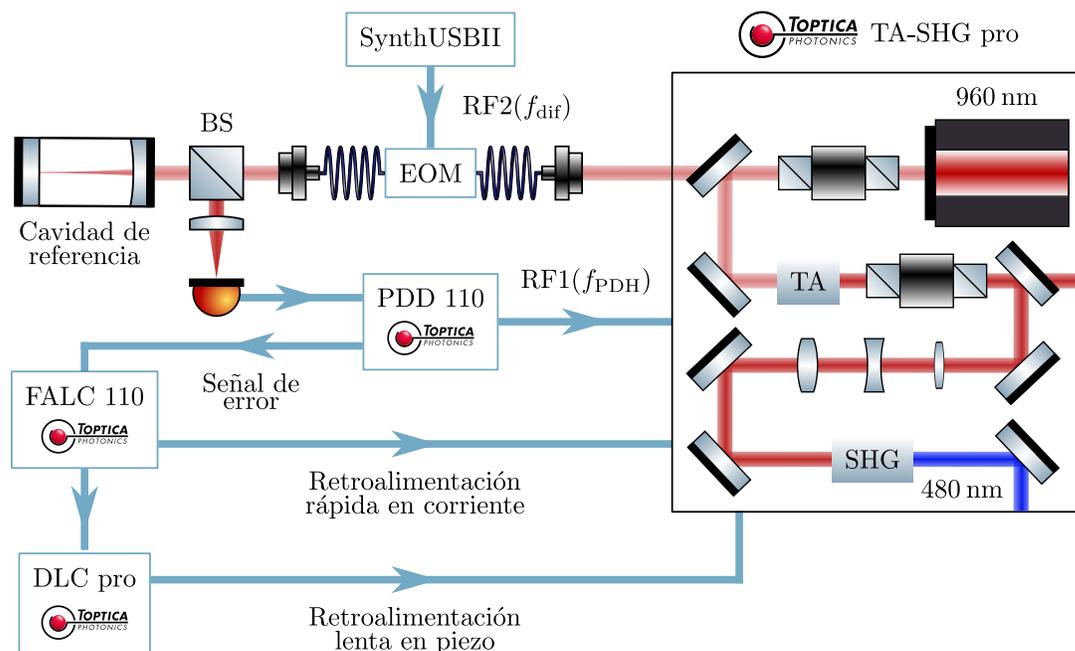


Figura 5.8: Esquema del montaje electrónico para el láser de 960 nm.

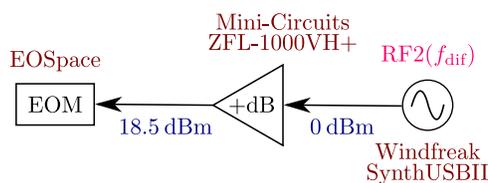


Figura 5.9: Esquema de la generación de la señal de modulación RF2 a una frecuencia  $f_{dif}$  para el láser de 960 nm.

## 5.4. Caracterización

### 5.4.1. Acoplamiento de modo

Para acoplar el modo fundamental a la cavidad se realiza el mismo procedimiento para los dos láseres. Se escanea el piezo que selecciona la frecuencia de emisión y se observan los distintos modos de excitación con una cámara CMOS que captura la luz transmitida de la cavidad como se muestra en la figura 5.10.

La primer alineación busca reducir el orden de los modos del tipo Hermite-Gauss modificando únicamente la posición y ángulo del eje óptico de la luz de entrada a la cavidad con los dos espejos de cada esquema óptico (ver figura 5.4). Al identificar el modo fundamental se pasa a una segunda alineación más fina en la que se sustituye la cámara por un fotodiodo, esto permite comparar la intensidad de todos los modos excitados. La intensidad de los modos del

tipo Laguerre-Gauss se reducirá modificando la posición de los lentes tanto de colimación como el lente compartido de foco igual a 300 mm.

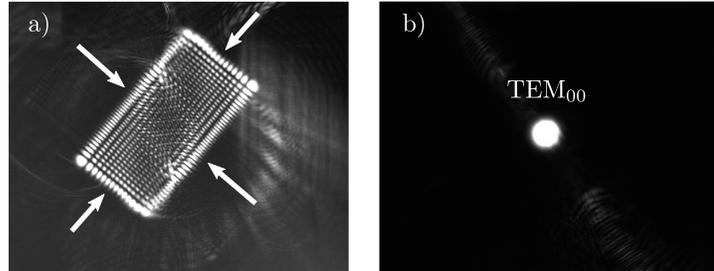


Figura 5.10: Fotografías del proceso de alineación usando una cámara CMOS. a) Inicio de la alineación. El objetivo es reducir el tamaño de los modos de Hermite-Gauss más grandes. b) Se observa el modo fundamental cuando la alineación es óptima.

Para el láser de 780 nm se alineó un haz con una potencia de  $61 \mu\text{W}$ . La posición del lente con  $f = 300 \text{ mm}$  en la figura 5.4 se colocó de tal forma que este haz estuviera óptimamente acoplado como se muestra en la figura 5.11. Todos los modos del tipo Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss se suprimieron hasta que solo el modo fundamental es observado.

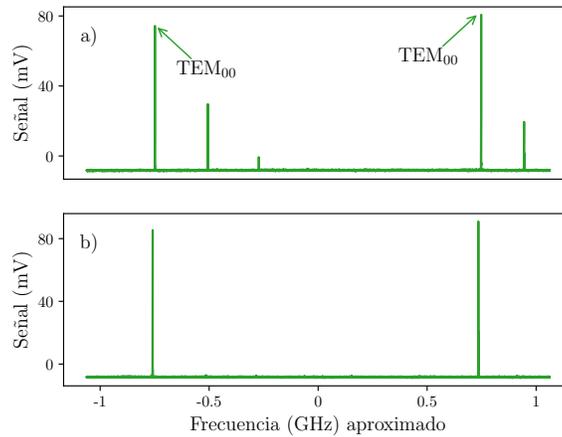


Figura 5.11: Señal de transmisión de la cavidad para el haz de 780 nm. a) Se observan dos modos fundamentales contiguos y modos de mayor orden debido a desalineaciones. b) Cuando la alineación es óptima sólo el modo fundamental es observado.

Para el láser de 960 nm se alineó un haz con una potencia de  $375 \mu\text{W}$ . Debido a que la posición del lente con  $f = 300 \text{ mm}$  en la figura 5.4 se colocó para que el haz de 780 nm estuviera óptimamente alineado se tiene una ligera desalineación en la posición o tamaño del haz que excita un 2.75 % de un modo de orden superior del tipo Laguerre-Gauss como se observa en la figura 5.12.

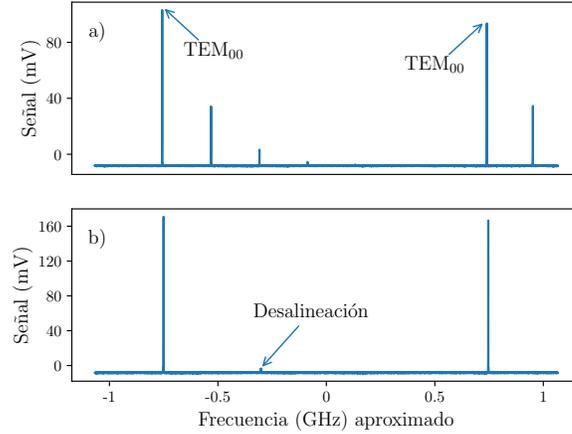


Figura 5.12: Señal de transmisión de la cavidad para el haz de 960 nm. a) Se observan dos modos fundamentales contiguos y modos de mayor orden debido a desalineaciones. b) Después de alinear el haz se continúa observando una excitación del 2.75 % respecto al modo fundamental.

#### 5.4.2. Rango espectral libre

Se compararon dos métodos para medir el rango espectral libre. El primero se basó en utilizar bandas laterales para fijar una relación entre el voltaje del piezo y la frecuencia del láser. El segundo método aprovecha el hecho de que al modular el láser con una frecuencia  $\nu_{\text{FSR}}/2$  las bandas laterales de dos resonancias contiguas se traslapan.

Utilizando la señal de transmisión de la cavidad de un haz alineado se puede conocer el rango espectral libre al medir la diferencia en frecuencia entre dos modos fundamentales consecutivos. Al generar bandas laterales se establece una referencia en frecuencia a partir de la cual se escala de forma lineal el eje horizontal utilizando un ajuste de funciones Lorentzianas para determinar la posición relativa de los picos de transmisión como se muestra en la figura 5.13. De esta forma se puede calcular de forma sencilla cualquier diferencia en frecuencia entre cualesquiera dos puntos de la señal de transmisión.

Con esta técnica se obtiene un rango espectral libre de:

$$\nu_{\text{FSR, piezo}} = 1.643511 \text{ GHz} \pm 3 \text{ kHz}, \quad (5.13)$$

que corresponde a una distancia entre los espejos de:

$$d_{\text{piezo}} = 91.20489 \text{ mm} \pm 0.09 \mu\text{m}. \quad (5.14)$$

Con estos valores medidos se tiene un error porcentual de 10.31 % en la medición del rango espectral libre y 8.79 % en la distancia entre los espejos respecto a sus valores teóricos (ver sub-

sección 5.1.2). Las incertidumbres asociadas a estas mediciones solo reflejan la exactitud con la que se determina la posición de los picos de transmisión debido al ajuste realizado. Esta técnica presenta una falla importante: el piezo que selecciona la frecuencia de emisión de los láseres no tiene una respuesta lineal ya que presenta histéresis y arrastre. Escalar de forma lineal la señal de transmisión introduce errores considerables que no son fáciles de contabilizar pues no se tiene caracterizado por completo la respuesta del piezo en la región de operación para las mediciones. Es posible eliminar estos efectos no lineales utilizando un sistema de retroalimentación, pero esto implica desarrollar los componentes electrónicos y añadirlos al sistema que ya se ha construido (ver [48]).

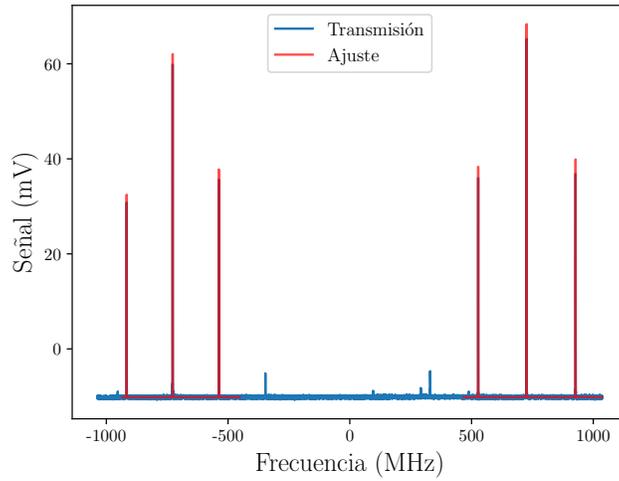


Figura 5.13: Señal de transmisión medida utilizada para medir el rango espectral libre usando bandas laterales generadas con una frecuencia  $f_{\text{dif}} = 200$  MHz para escalar el eje horizontal.

Se optó por otra forma de medir el rango espectral libre exenta de los problemas inherentes al piezo. Modular la luz a una frecuencia  $f_{\text{dif}}$  con el modulador electro-óptico genera dos bandas laterales con frecuencias  $(q)\nu_{\text{FSR}} \pm f_{\text{dif}}$  donde  $q$  es un número entero. Al aumentar progresivamente la frecuencia de modulación la bandas laterales con frecuencia  $(q)\nu_{\text{FSR}} + f_{\text{dif}}$  y  $(q + 1)\nu_{\text{FSR}} - f_{\text{dif}}$  se acercarán hasta encontrarse en la frecuencia  $\nu_{\text{FSR}}/2$  como se muestra en la figura 5.14. Una vez que se establece gráficamente el punto donde las bandas laterales se traslapan se puede determinar  $\nu_{\text{FSR}}$  con una precisión limitada por la resolución del generador de frecuencias y por el ancho de las bandas laterales sin suponer un comportamiento lineal del cristal piezoeléctrico.

Utilizando este método se encontró que el valor del rango espectral libre para la cavidad de referencia utilizada es de:

$$\nu_{\text{FSR,bl}} = 1.49670 \text{ GHz} \pm 0.02 \text{ MHz}, \quad (5.15)$$

que corresponde a una distancia entre los espejos igual a:

$$d_{bl} = 100.151 \text{ mm} \pm 1 \mu\text{m}. \quad (5.16)$$

De la misma forma se midió la separación entre dos modos contiguos dando como resultado:

$$\Delta\nu_{l,m,q} = 219.49 \text{ MHz} \pm 0.02 \text{ MHz}. \quad (5.17)$$

Con esta técnica se tiene un error porcentual de 0.01 % en el rango espectral libre, 0.01 % en la distancia entre los espejos y 0.06 % en la distancia entre dos modos contiguos respecto a sus valores teóricos (ver subsección 5.1.2). En este caso las incertidumbres en las mediciones están asociadas al mínimo orden en frecuencia que modifica el valor máximo de la superposición de las bandas laterales. Estos valores son cercanos a los valores teóricos calculados en la subsección 5.1.2.

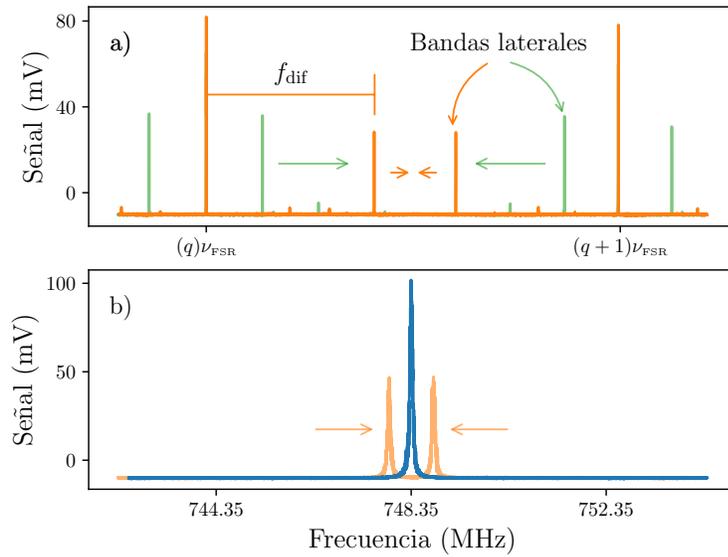


Figura 5.14: Señal de transmisión medida utilizada para medir el rango espectral libre por medio de caminar las bandas laterales.

### 5.4.3. Fineza

Se compararon dos métodos para medir la fineza de la cavidad. El primero se basó en utilizar bandas laterales para fijar una relación entre el voltaje del piezo y la frecuencia del láser con el fin de determinar el ancho completo a media altura del modo fundamental. En el segundo método se mide el tiempo de vida de los fotones en la cavidad.

Se utilizó la señal de transmisión para determinar la fineza de la cavidad a través de la medición del ancho completo a media altura del modo fundamental. Igual que en la subsección anterior, se generaron bandas laterales para establecer una relación de frecuencia a través de la cual se escala el eje horizontal de forma lineal. Un ajuste Lorentziano se realiza para determinar la posición de los picos y el ancho completo a media altura del modo fundamental a partir del cual se calcula la fineza (ver ecuación 4.46).

Para minimizar los errores introducidos por la no linealidad del piezo que se mencionaron en la subsección anterior se utilizó un voltaje de escaneo con poca amplitud. Los datos se tomaron en la parte central del tiempo de escaneo tratando de colocarse en una zona localmente lineal. En la figura 5.15 se muestran las señales de transmisión medidas y los ajustes para los haces de 780 nm y 960 nm. Los valores medidos son los siguientes:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{FWHM},780} &= 169.0 \text{ kHz} \pm 0.2 \text{ kHz} \implies \mathcal{F}_{780,\text{piezo}} = 8850 \pm 1 \times 10^1 \\ \nu_{\text{FWHM},960} &= 118.8 \text{ kHz} \pm 0.1 \text{ kHz} \implies \mathcal{F}_{960,\text{piezo}} = 12600 \pm 1 \times 10^1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Las incertidumbres asociadas a estas mediciones solo reflejan la exactitud con la que se determina la posición de los picos de transmisión y el ancho completo a media altura debido al ajuste realizado sin tomar en cuenta los errores introducidos por las no linealidades del piezo. La fineza medida para el láser de 780 nm tiene un error porcentual de 35 % mientras que para el láser de 960 nm se tiene un error porcentual de 36 % respecto a sus valores estimados (ver subsección 5.1.3).

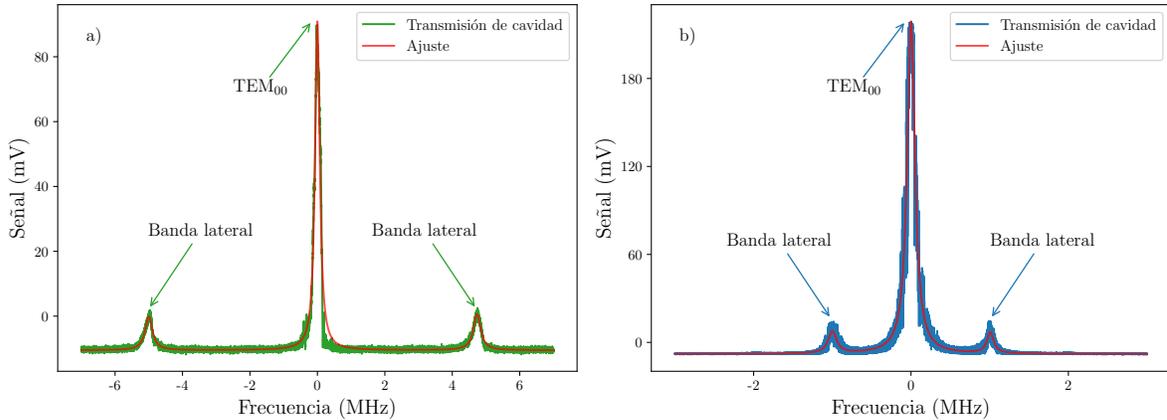


Figura 5.15: Señal de transmisión medida para determinar la fineza de la cavidad utilizando bandas laterales como referencia de frecuencia para escalar el eje horizontal. a) El haz de 780 nm es modulado con una frecuencia  $f_{\text{dif}} = 5$  MHz. b) El haz de 960 nm es modulado con una frecuencia  $f_{\text{dif}} = 1$  MHz.

Una segunda técnica se utilizó para medir la fineza a través de medir el tiempo de vida de los fotones dentro de la cavidad. Con los láseres anclados se observa la señal de transmisión de la cavidad que corresponde a una señal dc diferente de cero mientras se suma un pulso cuadrado de 1 Vpp de amplitud a la salida de la retroalimentación rápida lo que provoca que el láser se desancla abruptamente y se observa el decaimiento del modo fundamental como se observa en la figura 5.16.

Esta técnica está exenta de los errores introducidos por las no linealidades del piezo pues la señal que se observa sólo depende de qué tan rápido se puede desanclar el láser y no depende del voltaje de escaneo del piezo. Utilizar la salida de la retroalimentación rápida para desanclar el láser asegura que la frecuencia del láser saldrá rápidamente de resonancia. Al ajustar la función  $f(t) = a \exp(-t/\tau_f) + b$  se obtiene el valor del tiempo de vida de los fotones en la cavidad. Usando la ecuación 4.55 se calcula la fineza a partir del tiempo de vida medido y con la ecuación 4.46 se estiman los anchos completos a media altura. Los valores son los siguientes:

$$\begin{aligned} \tau_{f,780} &= 0.9911 \mu\text{s} \pm 0.5 \text{ ns} \implies \mathcal{F}_{780,\tau} = 9319 \pm 5 \implies \nu_{\text{FWHM},780} = 160.60 \text{ kHz} \pm 0.09 \text{ kHz} \\ \tau_{f,960} &= 1.4489 \mu\text{s} \pm 0.7 \text{ ns} \implies \mathcal{F}_{960,\tau} = 13617 \pm 7 \implies \nu_{\text{FWHM},960} = 109.91 \text{ kHz} \pm 0.06 \text{ kHz}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Las incertidumbres asociadas a estas mediciones solo reflejan la exactitud con la que se determina  $\tau_f$  debido al ajuste realizado. En este caso se tiene un error porcentual de 42 % para el haz de 780 nm y de 31 % para el haz de 960 nm respecto a sus valores estimados (ver subsección 5.1.3). Estos errores porcentuales son altos a pesar de que las no linealidades del piezo no juegan un papel en esta medición. Los anchos completos a media altura medidos no son un límite de resolución de la frecuencia de referencia puesto que el anclaje se realiza en el máximo del pico.

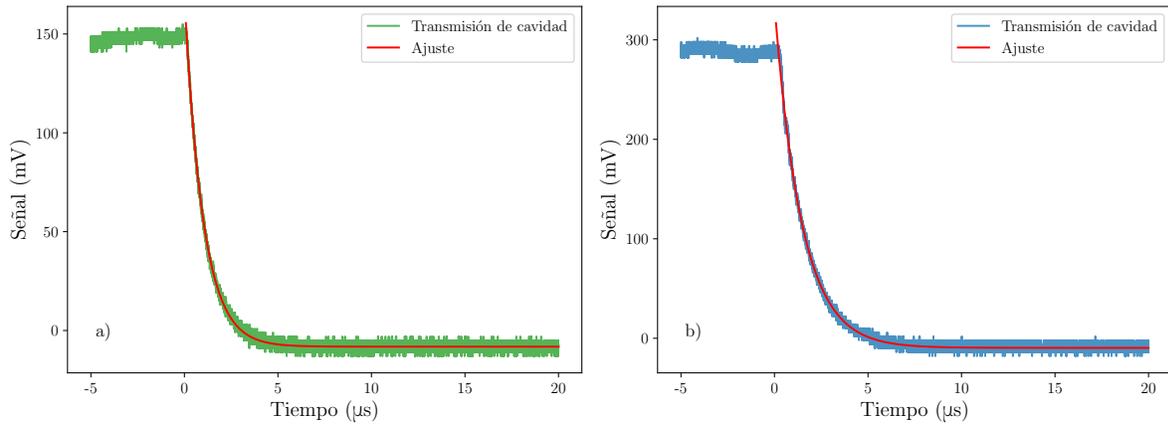


Figura 5.16: Señal de transmisión medida para determinar la fineza de la cavidad a través de determinar el tiempo de vida de los fotones dentro de la cavidad. a) Láser de 780 nm. b) Láser de 960 nm.

Con ambos métodos de medición se encontró una fineza mayor a la estimada para el haz de 780 nm. Dado que la fineza caracteriza las pérdidas de la cavidad el valor estimado tomando únicamente la reflectividad de los espejos debería ser una cota superior pues no se toma en cuenta las pérdidas por calentamiento de los espejos debido a la luz o las pérdidas por vibraciones mecánicas; sin embargo, para 780 nm se midió una fineza superior. Una razón por la cual se pudo medir un valor superior es que el valor nominal de reflectividad proporcionado por el fabricante es una cota inferior, pero esta podría ser mayor. Aunado a esto, la reflectividad se especifica para 780.00 nm pero en el laboratorio se puede diferir en algunas centésimas de nanómetro de esta longitud de onda donde el valor puede ser mayor.

A través de ambas técnicas se encontró que la fineza medida para el haz de 960 nm es menor que la fineza estimada. Esto concuerda con la idea de que la fineza estimada por la ecuación 4.46 es una cota superior. Los valores medidos pueden estar relacionados a pérdidas adicionales en la cavidad como calentamiento de los espejos y vibraciones mecánicas. Aunado a esto se podría estar en un rango de frecuencias para las cuales la reflectividad de los espejos fuera menor.

#### 5.4.4. Control de temperatura

Para asegurar que el espaciador de ULE se encuentre a la temperatura en la cual su coeficiente de expansión térmica es prácticamente cero se utilizó un controlador comercial de temperatura que implementa una ley de control PID. Se midió la temperatura de la cámara de vacío con un termistor durante el proceso de estabilización. El controlador sube la temperatura que inicialmente está aproximadamente en 20 °C hasta alcanzar  $T_c = 30.5$  °C. La medición se muestra en la figura 5.17. No se observaron fluctuaciones significativas a lo largo de varias horas.

#### 5.4.5. Estabilidad de la cavidad

Para medir la estabilidad de la cavidad se midió la frecuencia de un batido óptico entre el láser de 780 nm anclado a la cavidad y otro de los láseres del laboratorio anclado a la referencia atómica producida por una espectroscopía de absorción saturada. En el batido se sobreponen los dos haces de tal forma que el campo eléctrico en un solo punto de detección se puede expresar como:

$$\mathbf{E}(t) = \hat{\varepsilon}_1 E_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{\varepsilon}_2 E_2 \cos(\omega_2 t), \quad (5.20)$$

donde  $\hat{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  son los vectores de polarización,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las frecuencias angulares de los campos sobrepuestos y que se consideran diferentes para este propósito. Considérese un detector que responde a la densidad de energía local que es proporcional al cuadrado del campo:

$$E^2(t) = E_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + E_2^2 \cos^2(\omega_2 t) + 2\hat{\varepsilon}_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2 E_1 E_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t), \quad (5.21)$$

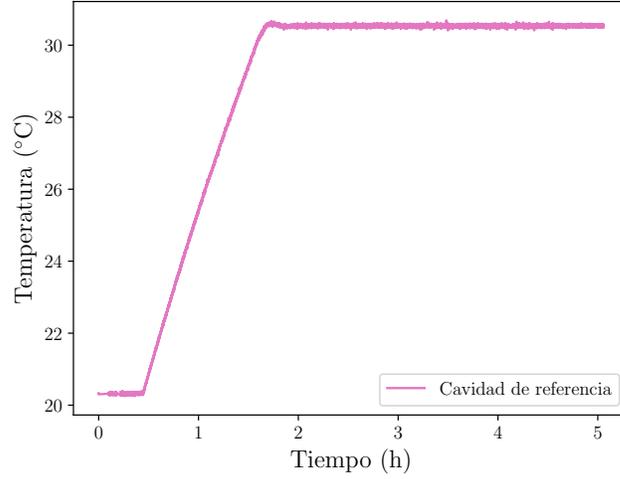


Figura 5.17: Temperatura de la cavidad de referencia. El controlador comercial estabiliza la temperatura alrededor de 30.5 °C.

utilizando algunas identidades trigonométricas se puede escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$E^2(t) = \frac{1}{2}E_1^2 [1 + \cos(\omega_1 t)] + \frac{1}{2}E_2^2 [1 + \cos(\omega_2 t)] + \hat{\varepsilon}_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2 E_1 E_2 [\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]. \quad (5.22)$$

Se sabe que los detectores disponibles en el laboratorio no son capaces de responder a frecuencias tan altas como  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  y  $\omega_1 + \omega_2$ . De esta forma la salida del detector es proporcional al promedio temporal de la ecuación anterior sobre el tiempo de respuesta del detector:

$$\langle E^2(t) \rangle = \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2 + \hat{\varepsilon}_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2 E_1 E_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t). \quad (5.23)$$

Al medir la señal de salida del detector utilizando un analizador de espectros se encuentra un máximo en la frecuencia que corresponde a la diferencia de frecuencias entre los dos láseres al realizar el ajuste  $f(x) = -a(x - b)^2 + d$  como se muestra en la figura 5.18. Cuando se mide la posición de este pico a lo largo del tiempo se obtiene una medición indirecta de las fluctuaciones que pueden tener los láseres como se muestra en las figuras 5.19 y 5.20.

Con el objetivo de entender el origen de las fluctuaciones en frecuencia del batido se midió la temperatura de la cavidad. Utilizando la ecuación 5.1 se estimó la desviación en frecuencia debido al cambio en la distancia  $d$  entre los espejos de la cavidad causado por las variaciones en temperatura y se comparó con las fluctuaciones en frecuencia del batido. Los resultados de la medición se muestran en la figura 5.19. Se puede deducir de la gráfica que la desviación medida

no esta correlacionada con la desviación estimada por lo que las fluctuaciones en frecuencia no corresponden a cambios en longitud de la cavidad debidos a las variaciones en temperatura.

Una segunda medición se realizó al monitorear la temperatura de la celda de espectroscopía junto con las desviaciones en frecuencia del batido. Los resultados se muestran la figura 5.20 y aparentemente existe una correlación entre estas dos variables; sin embargo, estos resultados no son concluyentes debido a que el tiempo de muestreo es corto. Se puede inferir que la correlación existe pues la susceptibilidad lineal de la nube de rubidio, cuya parte imaginaria esta relacionada con la absorción del medio y este a su vez determina el punto de anclaje del láser, depende linealmente de la densidad numérica de átomos en la celda de espectroscopía (como analogía ver ecuación 1.47) que a su vez depende de la temperatura. En el futuro cercano del laboratorio se planea hacer esta misma medición pero con un tiempo de muestreo mucho mayor para obtener resultados más definitivos.

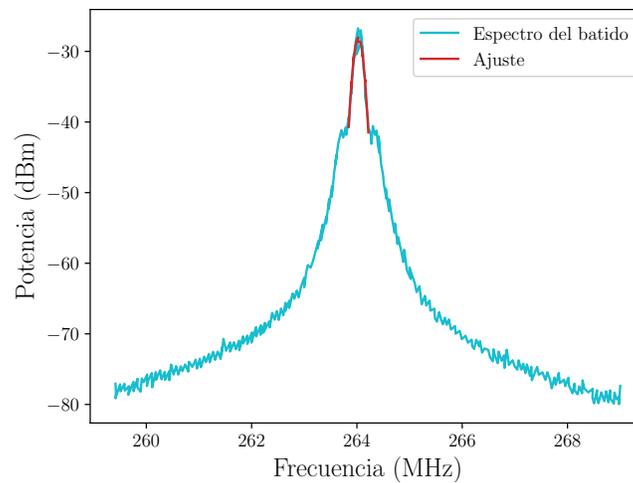


Figura 5.18: Batido de frecuencias medido con un analizador de espectros.

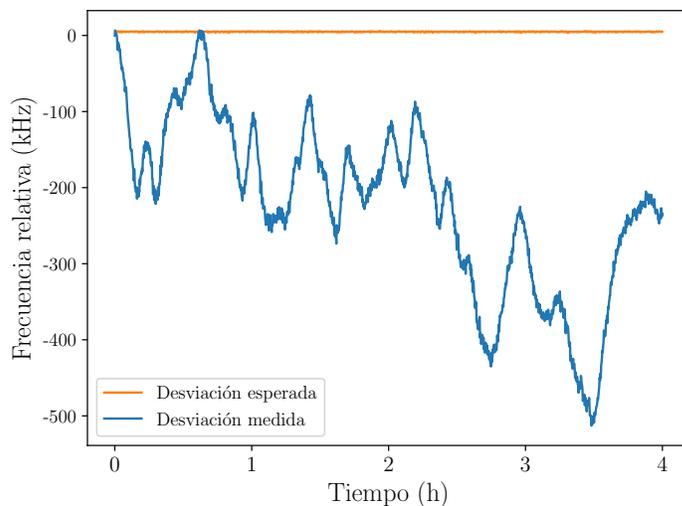


Figura 5.19: Medición de la estabilidad de la cavidad. Se compara la desviación del batido de frecuencias con la desviación estimada por el cambio en la distancia entre los espejos de acuerdo con el cambio en temperatura medida de la cavidad.

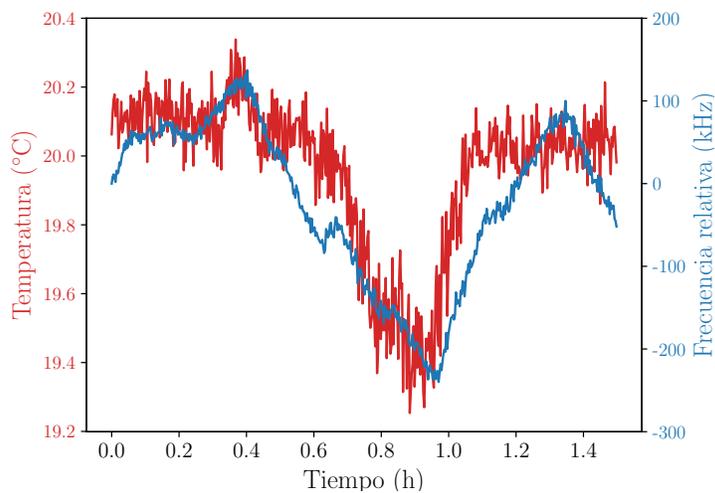


Figura 5.20: Medición de la estabilidad de la cavidad. Se compara la desviación del batido de frecuencias con la temperatura medida de la celda de espectroscopía.

### 5.4.6. Optimización del anclaje

Para optimizar la estabilidad del anclaje de los dos láseres se observó la transformada de Fourier de la señal de transmisión de la cavidad. Utilizando la transformada rápida de Fourier se implementó computacionalmente un analizador de espectros capturando la traza medida en un osciloscopio, de esta forma se puede analizar el rango completo de operación de los sistemas de retroalimentación con una resolución variable a bajas y altas frecuencias, algo que no se podía lograr con el analizador de espectros comercial disponible en el laboratorio. La transmisión de la cavidad con los láseres anclados es una excelente señal para analizar las componentes de ruido que dominan el anclaje pues es electrónicamente independiente del sistema. El objetivo es modificar las ganancias del sistema de retroalimentación en sus diferentes regiones de frecuencia para disminuir la amplitud de las componentes de Fourier del ruido como se muestra en la figura 5.21. Para establecer el piso del ruido hay que tener en cuenta que el detector utilizado tiene un ruido natural que representa el mínimo nivel de ruido que se puede medir cuando el anclaje es óptimo. Para este caso se considera que el piso está dado por la señal de transmisión de la cavidad cuando el láser se encuentra fuera de resonancia pues en dicha región no se tiene sensibilidad a ninguna componente del ruido del haz excepto por el ruido del detector.

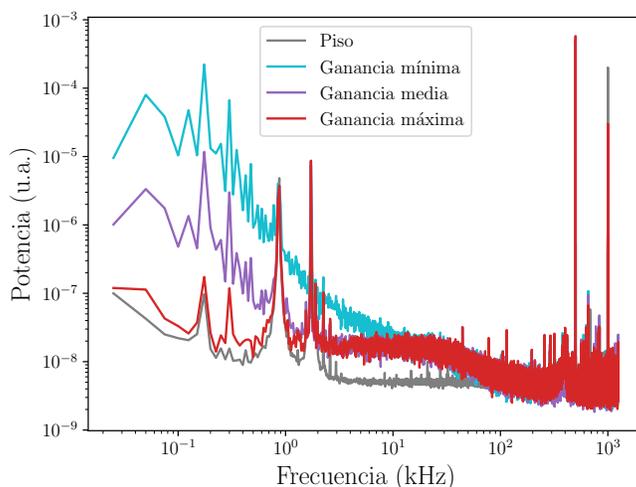


Figura 5.21: Espectrograma de la señal de transmisión de la cavidad. Se observa cómo disminuye la amplitud de las componentes de ruido de baja frecuencia al aumentar la ganancia del integrador del sistema de retroalimentación rápido para el láser de 780 nm.

Una buena forma de optimizar el anclaje a frecuencias bajas es observar el comportamiento del sistema a perturbaciones acústicas o mecánicas, una ganancia excesivamente alta volverá inestable al sistema. La respuesta del sistema de retroalimentación a altas frecuencias depende fuertemente de la calidad de la señal de error. Una señal de error ruidosa con gran amplitud

volverá muy inestable al sistema en las partes derivativas incluso cuando se baje la ganancia del sistema. En este sentido los parámetros de amplitud y compensación, offset por su traducción del inglés, de la señal de error son cruciales para lograr un anclaje con mayor ancho de banda.

## Capítulo 6

---

---

# Conclusiones y perspectivas

---

---

6.1 Conclusiones . . . . .	97
6.2 Detección de átomos de Rydberg . . . . .	98
6.3 Medición del ancho de línea . . . . .	100

En este último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo y los experimentos que quedan por hacer en el futuro cercano del Laboratorio de Optica Cuántica de Rydberg.

### 6.1. Conclusiones

Se construyó un sistema de láseres para generar excitaciones de Rydberg en átomos de rubidio por medio de una excitación de dos fotones. El sistema permite llevar al átomo del estado base  $5S_{1/2}$  al estado intermedio  $5P_{3/2}$  usando un primer fotón con longitud de onda de 780 nm generado por un láser de diodo en la configuración cat-eye. Un segundo fotón con longitud de onda de 480 nm, generado a través del segundo armónico de un láser de diodo de 960 nm en la configuración Littrow, lleva al átomo del estado  $5P_{3/2}$  al estado de Rydberg  $nS/nD$  con  $n \geq 40$ .

Se estabilizó térmicamente una cavidad óptica montada en un espaciador de ULE para obtener una referencia en frecuencia ultra estable. Como parte de la caracterización de dicho resonador óptico se midió el rango espectral libre obteniendo  $1.49670 \text{ GHz} \pm 0.02 \text{ MHz}$  y una separación entre dos modos contiguos de  $219.49 \text{ MHz} \pm 0.02 \text{ MHz}$ , así mismo se midió la fineza para 780 nm y 960 nm resultando en  $9319 \pm 5$  y  $13617 \pm 7$  respectivamente, con anchos completos a media altura de los picos de transmisión de  $160.60 \text{ kHz} \pm 0.09 \text{ KHz}$  para 780 nm y  $109.91 \text{ kHz} \pm 0.06 \text{ kHz}$  para 960 nm, de tal forma que se tiene una cavidad de alta fineza para ambas longitudes de onda.

Se implementaron dos sistemas de retroalimentación para estabilizar la frecuencia de cada láser usando la cavidad ultra estable y de alta fineza por medio de la técnica Pound-Drever-Hall. Retroalimentación lenta con un ancho de banda de aproximadamente 10 kHz controla la respuesta del piezo en la cavidad externa de los láseres y retroalimentación rápida de hasta 10 MHz controla la corriente que alimenta al diodo. Estos sistemas aprovechan la alta fineza de la cavidad para reducir el ancho de línea del espectro de emisión de los láseres. La configuración electrónica de los sistemas de retroalimentación permite anclar al láser de 780 nm hasta 200 MHz de separación de cualquier modo fundamental de la cavidad mientras que el láser de 960 nm se puede anclar en todo el rango espectral libre permitiendo excitar cualquier estado de Rydberg con  $n \geq 40$ .

Finalmente se determinó la estabilidad en tiempos largos de la cavidad midiendo la frecuencia de un batido óptico entre el láser de 780 nm anclado a la cavidad y un láser anclado a una referencia atómica obteniendo fluctuaciones de hasta 500 kHz. Se encontró que dichas variaciones podrían provenir del láser anclado a los átomos de rubidio al medir las fluctuaciones de temperatura tanto de la cavidad de referencia como de la celda de espectroscopía.

## 6.2. Detección de átomos de Rydberg

Con el sistema para generar átomos de Rydberg terminado solo resta hacer un experimento para detectarlos. En esta sección se describe la estrategia para medir los primeros átomos de Rydberg del Laboratorio de Óptica Cuántica de Rydberg a través del fenómeno de EIT descrito en la subsección 1.2.3. Aquí se asume el esquema de excitación en átomos de rubidio elegido en la subsección 3.2.2.

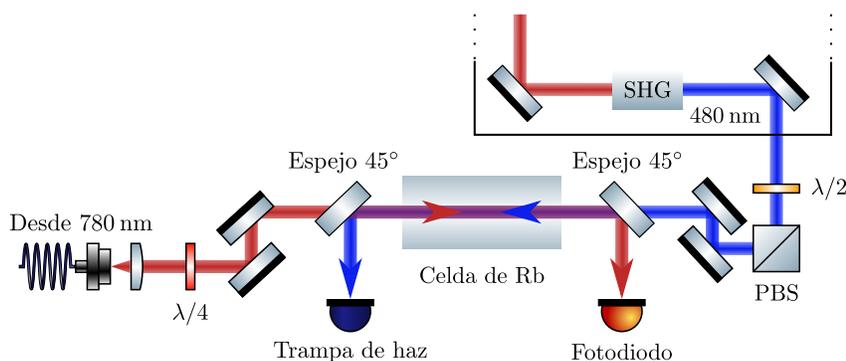


Figura 6.1: Esquema del montaje óptico para la generación y detección de átomos de Rydberg usando una celda con  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$  en estado gaseoso a temperatura ambiente.

Se hacen incidir dos haces colimados de 780 nm y 480 nm de forma contrapropagante en una nube de átomos de rubidio a temperatura ambiente como se muestra en la figura 6.1. La transmisión del haz de prueba se detecta en el fotodiodo, su polarización puede variar entre

circular y lineal usando la placa retardadora de onda de  $\lambda/4$ . Los dos espejos de  $45^\circ$  separan a los haces, uno de ellos transmite luz de 780 nm y refleja 480 nm, el otro hace lo contrario. El haz de control deberá tener una cintura mayor que el haz de prueba para aprovechar al máximo todos los átomos que llegan a un primer estado excitado.

El láser de 780 nm se escanea en frecuencia y es resonante a la transición  $5S_{1/2}(F = 3) \rightarrow 5P_{3/2}(F')$  creando un perfil de absorción Doppler [15]. La frecuencia del láser de 480 nm se sintoniza según el estado de Rydberg que se quiera excitar midiendo su longitud de onda con un medidor de onda comercial, al interactuar con la nube atómica surge el fenómeno de EIT creándose ventanas de transmisión en las frecuencias de resonancia de los estados hiperfinos del estado  $5P_{3/2}$  evidenciando que una excitación de Rydberg ha sido generada. En la figura 6.2<sup>1</sup> se muestra el resultado de este experimento obtenido por A.K. Mohapatra, T.R. Jackson y C.S. Adams [10] en el caso en que se sintoniza el láser de control a la transición  $5P_{3/2}(F') \rightarrow 44D_{5/2}/44D_{3/2}$ . El espectro contiene seis líneas de transmisión correspondiente a las transiciones entre los estados hiperfinos  $F = 2, 3$  y 4 del estado  $5P_{3/2}$  y los dos estados finos  $44D_{5/2}/44D_{3/2}$ .

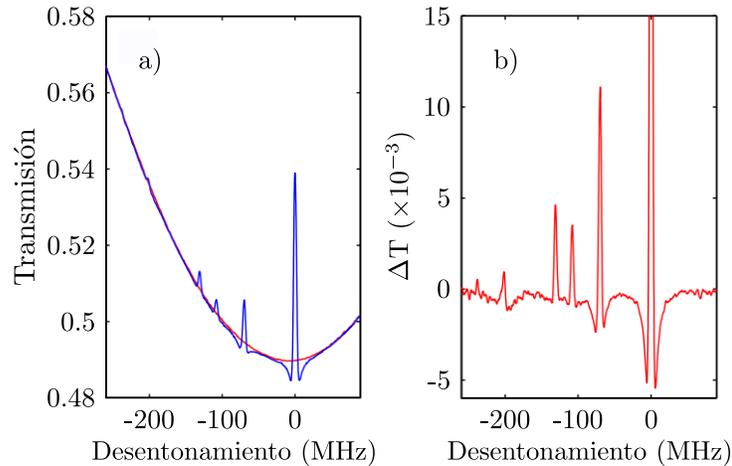


Figura 6.2: a) Señal de transmisión del haz de prueba como función de su desintonamiento respecto a la resonancia  $5S_{1/2}(F = 3) \rightarrow 5P_{3/2}(F')$ , la señal roja es con el haz de control fuera de resonancia y en azul cuando es resonante con la transición  $5P_{3/2}(F') \rightarrow 44D_{5/2}/44D_{3/2}$ . b) El cambio en la transmisión dado por la diferencia entre las dos curvas de a). Se observan seis resonancias.

A través de este sencillo montaje óptico es posible comprobar la existencia de excitaciones de Rydberg. Se planea que en cuanto se reanuden actividades del Laboratorio de Óptica Cuántica de Rydberg se elabore dicho esquema experimental.

<sup>1</sup>Reproducido con permiso de A. K. Mohapatra, T. R. Jackson y C. S. Adams, Physical Review Letters, volumen 11, páginas 1-4, 2007. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.113003>. Derechos de autor 2020 por American Physical Society.

### 6.3. Medición del ancho de línea

Esta es una medición que no está en los planes del Laboratorio de Óptica Cuántica de Rydberg en el corto plazo, pero sería interesante hacer. Como se describió a lo largo de todo el trabajo un ancho de línea de unos pocos kHz o sub-kHz es necesario para excitar estados de Rydberg. Conocer el ancho de línea de los láseres asegura que el sistema funciona correctamente.

Se plantean dos métodos para medir el ancho de línea:

- Medición heterodyna a través de un batido con un segundo láser
- Medición auto heterodyna

Estos métodos traducen las fluctuaciones en fase de los láseres que afectan el espectro de emisión en fluctuaciones de intensidad.

La **medición heterodyna a través de un batido con un segundo láser** es relativamente sencilla, la luz anclada a la cavidad se mezcla con luz de otro láser que se encuentre cerca de resonancia y con la misma polarización. El espectro resultante del batido será igual a la convolución de los espectros de ambos láseres [49]. Esto significa que el ancho de línea del espectro del batido siempre estará limitado por el láser con mayor ancho de línea de tal forma que para poder caracterizar el ancho del espectro de emisión del láser anclado a la cavidad, ya sea de 780 nm o 960 nm, se requerirá de otro con menor ancho de línea. Esto ya supone un problema pues en el laboratorio no se cuenta con otra fuente de luz coherente con un espectro tan delgado.

La **medición auto heterodyna** soluciona la necesidad de un segundo láser con menor ancho de línea. Este método funciona bajo el mismo principio que el anterior pero se utiliza un batido con la luz del mismo láser. El haz es dividido en dos ramas a una de las cuales se le aplica una modulación en frecuencia con un AOM mientras que a la otra se le hace pasar por una fibra óptica. La modulación en frecuencia permite construir un patrón de batido pues de otra forma se tendría la mayor intensidad con una frecuencia igual a cero (ver subsección 5.4.5); sin embargo, como ambos haces provienen del mismo láser, las fluctuaciones en fase estarían perfectamente correlacionadas y no se observaría ningún ensanchamiento del espectro. Para solucionar esto se pasa el segundo haz por la fibra óptica ya que, en el límite en que el tiempo de retraso al viajar por la fibra es mayor que el tiempo de coherencia de la luz (ver subsección 2.2.2), se producen dos haces completamente descorrelacionados y se aplica la misma teoría que antes. El problema de este método es que para obtener un retraso mayor que el tiempo de coherencia las fibras ópticas deben ser de aproximadamente diez kilómetros de longitud.

Como se mencionó antes, estas mediciones no son indispensables ya que al medir los estados de Rydberg con EIT se obtiene una confirmación del correcto funcionamiento del sistema; sin embargo, como parte de la caracterización sería interesante medir los anchos de línea para los dos láseres.

## Apéndice A

---

---

# Transformación del Hamiltoniano al marco rotante

---

---

Para deducir la forma que toma el Hamiltoniano en el modelo del átomo de dos niveles al pasar al marco rotante (ver sección 1.1) es necesario hacer una transformación unitaria.

Supóngase una matriz unitaria arbitraria  $U$  que induce la transformación  $|\tilde{\psi}\rangle = U|\psi\rangle$ , se desea que el Hamiltoniano original  $H$  y el transformado  $\tilde{H}$  cumplan la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle & \text{(A.1a)} \\ i\hbar\partial_t|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle, & \text{(A.1b)} \end{cases}$$

Lo que se busca ahora es la regla de transformación que cumple el Hamiltoniano para pasar de un sistema a otro utilizando la matriz unitaria  $U$ . Al tomar la ecuación A.1a y sustituir el estado transformado se encuentra la siguiente expresión:

$$i\hbar\partial_t|\tilde{\psi}\rangle + i\hbar U\partial_t U^\dagger|\tilde{\psi}\rangle = UHU^\dagger|\tilde{\psi}\rangle. \quad \text{(A.2)}$$

Se sustituye la relación  $\partial_t(UU^\dagger) = (\partial_t U)U^\dagger + U\partial_t U^\dagger = 0$  en la ecuación anterior para hallar la ecuación:

$$i\hbar\partial_t|\tilde{\psi}\rangle = (UHU^\dagger + i\hbar(\partial_t U)U^\dagger)|\tilde{\psi}\rangle. \quad \text{(A.3)}$$

Finalmente, al identificar los términos correspondientes en la ecuación del Hamiltoniano transformado A.1b se obtiene la expresión de la transformación unitaria dependiente del tiempo para el Hamiltoniano:

$$\tilde{H} = UHU^\dagger + i\hbar(\partial_t U)U^\dagger. \quad \text{(A.4)}$$

En el átomo de dos niveles la matriz de transformación unitaria se propone de la siguiente

manera:

$$U = \exp(i\omega t |e\rangle \langle e|), \quad (\text{A.5})$$

Se sabe que la exponencial de una matriz  $A$  se puede escribir como  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$ , de esta forma se obtiene el estado del sistema en el marco rotante:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}\rangle &= U |\psi\rangle \\ &= \exp(i\omega t |e\rangle \langle e|) (c_g |g\rangle + c_e |e\rangle) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_g \\ c_e \end{pmatrix} \\ &= c_g |g\rangle + \tilde{c}_e |e\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Por otra parte, a partir de la ecuación A.4 el Hamiltoniano atómico pasa a ser:

$$\tilde{H}_A = -\hbar\Delta |e\rangle \langle e|. \quad (\text{A.7})$$

Nótese que  $|e\rangle$  sigue siendo un estado propio del Hamiltoniano atómico con un valor propio  $\hbar\omega_0 - \hbar\omega = -\hbar\Delta$ . La transformación del marco rotante tiene el efecto de disminuir la energía del estado excitado por un factor de  $\hbar\omega$ .

Para el Hamiltoniano de interacción se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{int} &= -\mathbf{d}^{(+)} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^{(-)} - \mathbf{d}^{(-)} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^{(+)} \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma + \sigma^\dagger), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

aquí se han definido las amplitudes del campo estacionario como  $\tilde{E}^{(\pm)} := e^{\pm i\omega t} E^{(\pm)}$ . Al hacer la transformación al marco rotante se remueve toda la dependencia temporal explícita, por lo que el problema será más fácil de resolver. La representación matricial del Hamiltoniano completo en la base  $|g\rangle, |e\rangle$  se ve de la siguiente forma:

$$\tilde{H} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega/2 \\ \Omega/2 & -\Delta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

## Apéndice B

---

---

# Dinámica en el átomo de dos niveles

---

---

B.1	Oscilaciones de Rabi . . . . .	103
B.1.1	Interacción resonante . . . . .	103
B.1.2	Interacción cerca de resonancia . . . . .	105
B.2	Estados vestidos . . . . .	107

### B.1. Oscilaciones de Rabi

Para conocer la dinámica del átomo de dos niveles en el marco de referencia rotante se deben resolver las ecuaciones 1.21. A continuación se resuelven estas ecuaciones en el caso en resonancia y fuera de ella.

#### B.1.1. Interacción resonante

Encontrarse en resonancia significa que  $\Delta = \omega - \omega_0 = 0$ , es decir, el campo eléctrico porta exactamente la energía requerida para excitar al átomo. En este caso las ecuaciones acopladas se reducen a:

$$\begin{aligned}\partial_t c_g &= -i \frac{\Omega}{2} \tilde{c}_e \\ \partial_t \tilde{c}_e &= -i \frac{\Omega}{2} c_g,\end{aligned}\tag{B.1}$$

estas ecuaciones se pueden desacoplar al derivarlas y sustituir las variables en las ecuaciones originales para obtener:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 c_g &= -\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 c_g \\ \partial_t^2 \tilde{c}_e &= -\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \tilde{c}_e.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Cada una de estas ecuaciones tiene la forma de un oscilador armónico simple de frecuencia  $\Omega/2$ . La solución general de estas ecuaciones esta dada por:

$$\begin{aligned}c_g(t) &= c_g(0) \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i\tilde{c}_e(0) \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ \tilde{c}_e(t) &= \tilde{c}_e(0) \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - ic_g(0) \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right).\end{aligned}\tag{B.3}$$

Para examinar estas soluciones supóngase que el átomo se encuentra en el estado base al tiempo inicial por lo que  $c_g(t=0) = 1$  y  $\tilde{c}_e(t=0) = 0$ . Las ecuaciones quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}c_g(t) &= \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ \tilde{c}_e(t) &= -i \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right).\end{aligned}\tag{B.4}$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar al átomo en los estados será:

$$\begin{aligned}P_g(t) &= |c_g(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) = \frac{1 + \cos \Omega t}{2} \\ P_e(t) &= |\tilde{c}_e(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) = \frac{1 - \cos \Omega t}{2}.\end{aligned}\tag{B.5}$$

En estas ecuaciones se puede apreciar la importancia de la frecuencia de Rabi ya que la población de los estados oscila con una frecuencia angular  $\Omega$  como se muestra en la figura B.1. A este fenómeno se le conoce como oscilaciones de Rabi.

Nótese que las oscilaciones tienen un periodo  $T = 2\pi/\Omega$  por lo que al encender el láser un tiempo  $T/2$  el argumento del coseno en las ecuaciones de evolución se evaluaría como  $\Omega(T/2) = \pi$  y un átomo que se encontraba en el estado base pasa a un estado excitado con probabilidad uno, a este tipo de pulso se le llama pulso  $\pi$ . Por otra parte si se enciende el campo durante un tiempo  $T/4$  el argumento del coseno tomaría el valor  $\Omega(T/4) = \pi/2$  y en este caso un átomo que se encontraba en estado base termina en una superposición de estado base y excitado, a este tipo de pulso se le llama pulso  $\pi/2$ .

Debido a que se asumió que el campo tiene una amplitud constante  $E_0$  los pulsos estudiados aquí son pulsos cuadrados; sin embargo, este análisis es válido para pulsos más realizables que pueden tener una amplitud de campo variable en el tiempo. En dicho caso la frecuencia de Rabi

misma es variable en el tiempo y es posible definir un pulso  $\pi$  como cualquier pulso que tenga un área  $\pi$ , es decir:

$$\int \Omega(t) dt = \pi, \quad (\text{B.6})$$

lo mismo ocurriría para un pulso  $\pi/2$  o de cualquier otra duración.

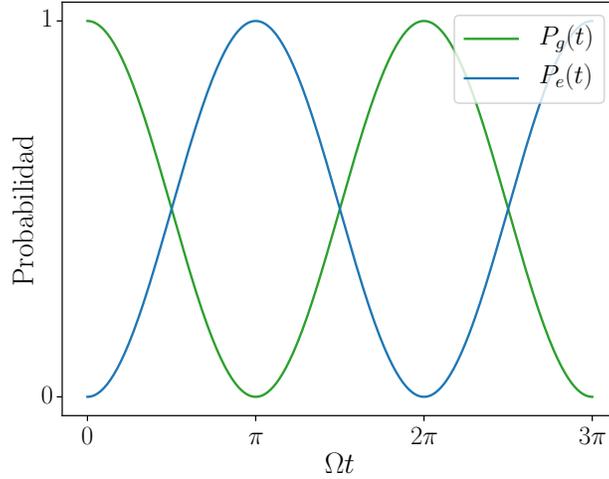


Figura B.1: Dinámica de la población de los estados base y excitado en una interacción resonante para el átomo de dos niveles comenzando con un átomo en el estado base. Se observan las oscilaciones de Rabi.

### B.1.2. Interacción cerca de resonancia

Si ahora se toma  $\Delta \neq 0$  se deben resolver las ecuaciones 1.21 completas. Siguiendo el mismo proceso de derivación y sustitución como en el caso pasado se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( \partial_t^2 - i\Delta \partial_t + \frac{\Omega^2}{4} \right) c_g &= 0 \\ \left( \partial_t^2 - i\Delta \partial_t + \frac{\Omega^2}{4} \right) \tilde{c}_e &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

la solución general de estas ecuaciones se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_g(t) &= e^{i\Delta t/2} \left[ c_g(0) \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right) - \frac{i}{\tilde{\Omega}} [\Delta c_g(0) + \Omega \tilde{c}_e(0)] \sin\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right) \right] \\ \tilde{c}_e(t) &= e^{i\Delta t/2} \left[ \tilde{c}_e(0) \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right) + \frac{i}{\tilde{\Omega}} [\Delta \tilde{c}_e(0) - \Omega c_g(0)] \sin\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde  $\tilde{\Omega}$  es la frecuencia de Rabi generalizada:

$$\tilde{\Omega} := \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}. \quad (\text{B.9})$$

De nuevo, para examinar estas ecuaciones considérese el caso en que el átomo comienza en el estado base. La solución general es entonces:

$$\begin{aligned} c_g(t) &= e^{i\Delta t/2} \left[ \cos\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\tilde{\Omega}} \sin\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right) \right] \\ \tilde{c}_e(t) &= -ie^{i\Delta t/2} \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \sin\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

por lo tanto, la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado será:

$$P_e(t) = \frac{\Omega^2}{\tilde{\Omega}^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{\Omega}t}{2}\right) = \frac{\Omega^2}{\tilde{\Omega}^2} \left( \frac{1 - \cos \tilde{\Omega}t}{2} \right). \quad (\text{B.11})$$

En la figura B.2 se muestra la dinámica de esta probabilidad. Nótese que las oscilaciones de Rabi ahora ocurren a la frecuencia de Rabi generalizada  $\tilde{\Omega} \geq \Omega$  y el número de oscilaciones crece conforme aumenta el desintonamiento. Además, se observa que la amplitud de las oscilaciones se reduce conforme el desintonamiento se hace más grande.

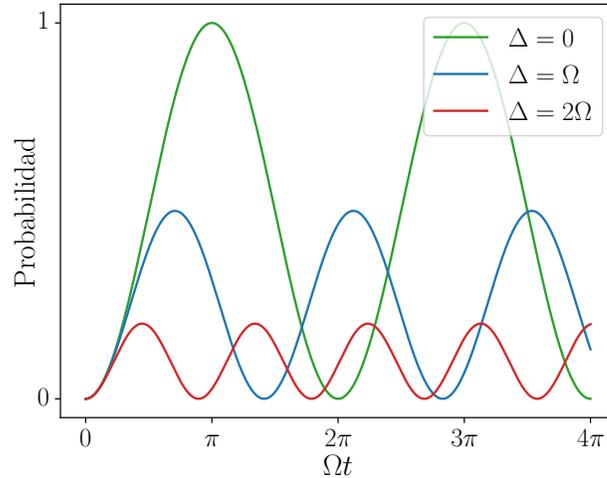


Figura B.2: Dinámica de la población del estado excitado en una interacción cerca de resonancia para el átomo de dos niveles comenzando con un átomo en el estado base.

## B.2. Estados vestidos

Al observar las oscilaciones de Rabi se hace evidente que los vectores propios  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  no son los correctos para describir al sistema acoplado; sin embargo, se pueden encontrar los valores propios del Hamiltoniano presentado en la ecuación 1.22:

$$E_{\pm} = -\frac{\hbar\Delta}{2} \pm \frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2}. \quad (\text{B.12})$$

El acoplamiento con el campo provoca un cruce evitado en la estructura de los niveles energéticos del átomo, es decir, en ausencia de campo eléctrico ( $\Omega = 0$ ) las energías de los estados base y excitado son  $E_g = 0$  y  $E_e = -\hbar\Delta$  respectivamente, niveles que se cruzan cuando  $\Delta = 0$ . El acoplamiento del campo eléctrico ( $\Omega > 0$ ) rompe la degeneración como se puede ver en la figura B.3.

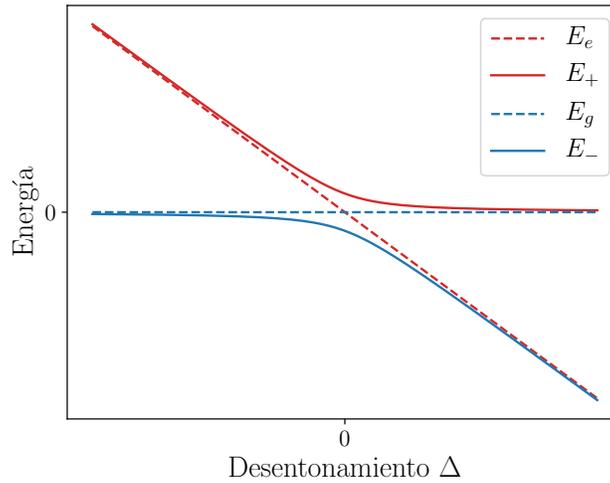


Figura B.3: Estructura de los niveles energéticos en función del desintonamiento para un átomo de dos niveles. Se aprecia el cruce evitado de los niveles base y excitado debido al acoplamiento con el campo.

Los vectores propios estarán dados por una rotación efectiva de los estados desacoplados:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \sin \theta |g\rangle + \cos \theta |e\rangle \\ |-\rangle &= \cos \theta |g\rangle - \sin \theta |e\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

estos son llamados los estados vestidos del átomo y por convención  $|+\rangle$  tiene una mayor energía.

Además,  $\theta$  es conocido como el ángulo de Stückelberg y se define por:

$$\tan 2\theta = -\frac{\Omega}{\Delta} \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{B.14})$$

En el límite cuando el desentonamiento es grande ( $\Delta \gg \Omega$ ) el acoplamiento es pequeño y se pueden aproximar los estados como los vectores propios “desnudos” sin acoplamiento; sin embargo, cerca de resonancia los estados se mezclan y las energías son desplazadas.

---

---

# Bibliografía

---

---

- [1] Ofer Firstenberg y col. «Attractive photons in a quantum nonlinear medium». En: *Nature* 502.7469 (2013), págs. 71-75.
- [2] Daniel Tiarks y col. «Single-photon transistor using a Förster resonance». En: *Physical Review Letters* 113.5 (2014), págs. 1-5.
- [3] W. Chen y col. «All-Optical Switch and Transistor Gated by One Stored Photon». En: *Science* 341.6147 (ago. de 2013), págs. 768-770.
- [4] H. Gorniaczyk y col. «Single-photon transistor mediated by interstate Rydberg interactions». En: *Physical Review Letters* 113.5 (2014), págs. 1-5.
- [5] O Firstenberg, C S Adams y S Hofferberth. «Nonlinear quantum optics mediated by Rydberg interactions». En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 49.15 (2016), pág. 152003.
- [6] K. M. Birnbaum y col. «Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom». En: *Nature* 436.7047 (2005), págs. 87-90.
- [7] E. Vetsch y col. «Optical interface created by laser-cooled atoms trapped in the evanescent field surrounding an optical nanofiber». En: *Physical Review Letters* 104.20 (2010), págs. 1-4.
- [8] M. D. Lukin y col. «Dipole blockade and quantum information processing in mesoscopic atomic ensembles». En: *Physical Review Letters* 87.3 (2001), págs. 37901–1–37901-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.037901.
- [9] Michael Fleischhauer y Jonathan P Marangos. «Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media». En: *Reviews of Modern Physics* 77. Abril (2005), págs. 633-673.
- [10] A. K. Mohapatra, T. R. Jackson y C. S. Adams. «Coherent optical detection of highly excited Rydberg states using electromagnetically induced transparency». En: *Physical Review Letters* 98.11 (mar. de 2007), págs. 1-4.
- [11] Y. O. Dudin y A. Kuzmich. «Strongly interacting Rydberg excitations of a cold atomic gas». En: *Science* 336.6083 (2012), págs. 887-889.

- [12] Thibault Peyronel y col. «Quantum nonlinear optics with single photons enabled by strongly interacting atoms». En: *Nature* 488.7409 (2012), págs. 57-60. DOI: 10.1038/nature11361.
- [13] D. Maxwell y col. «Storage and control of optical photons using Rydberg polaritons». En: *Physical Review Letters* 110.10 (2013), págs. 1-5.
- [14] Daniel A. Steck. *Quantum and Atom Optics*. disponible en línea en <http://steck.us/teaching>, 2007, revisión 0.12.6 del 23 de abril 2019.
- [15] C.J. Foot. *Atomic Physics*. 1.<sup>a</sup> ed. Oxford, 2005. ISBN: 0-19-850695-3.
- [16] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. 3.<sup>a</sup> ed. Oxford, 2000. ISBN: 0-19-850177-3.
- [17] H.K. Woodgate. *Elementary Atomic Structure*. 2.<sup>a</sup> ed. Oxford, 1980. ISBN: 0-19-851156-6.
- [18] H.J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1*. 1.<sup>a</sup> ed. Springer, 1999. ISBN: 978-3-642-08133-0.
- [19] L. Vestergaard y col. «Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas». En: *Nature* 397. February (1999), págs. 594-598.
- [20] E. Brion, L. H. Pedersen y K. Molmer. «Adiabatic elimination in a lambda system». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40.5 (2007), págs. 1033-1043.
- [21] A. E. Siegman. *Lasers*. 1.<sup>a</sup> ed. University Science Books, 1986. ISBN: 0-935702-11-5.
- [22] Daniel A. Steck. *Classical and Modern Optics*. disponible en línea en <http://steck.us/teaching>, 2006, revisión 1.7.5 del 3 de octubre 2019.
- [23] A. S. Arnold, J. S. Wilson y M. G. Boshier. «A simple extended-cavity diode laser». En: *Review of Scientific Instruments* 69.3 (1998), págs. 1236-1239.
- [24] «A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics». En: *Optics Communications* 117.5-6 (1995), págs. 541-549.
- [25] Sebastian D. Saliba y col. «Mode stability of external cavity diode lasers». En: *Applied Optics* 48.35 (2009), págs. 6692-6700.
- [26] B.E.A Saleh y M.C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 2.<sup>a</sup> ed. Wiley, 2007. ISBN: 978-0-471-35832-9.
- [27] Gianni Di Domenico, Stéphane Schilt y Pierre Thomann. «Simple approach to the relation between laser frequency noise and laser line shape». En: *Applied Optics* 49.25 (2010), pág. 4801.
- [28] C. S. Adams, J. D. Pritchard y J. P. Shaffer. «Rydberg atom quantum technologies». En: (2019). URL: <http://arxiv.org/abs/1907.09231>.
- [29] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2.<sup>a</sup> ed. Pearson, 2005. ISBN: 0-13-191175-9.

- [30] C. Cohen-Tannoudji. *Quantum mechanics*. 2.<sup>a</sup> ed. Wiley-Interscience, 1977. ISBN: 0-471-16432-1.
- [31] T. F. Gallagher. *Rydberg Atoms*. 1.<sup>a</sup> ed. Cambridge, 1994. ISBN: 0-521-38531-8.
- [32] Alpha Gaëtan y col. «Observation of collective excitation of two individual atoms in the Rydberg blockade regime». En: *Nature Physics* 5.2 (2009), págs. 115-118. DOI: 10.1038/nphys1183.
- [33] Daniel A. Steck. *Rubidium 85 D Line Data*. disponible en línea en <http://steck.us/alkalidata>, 2019, revisión 2.2.1 del 21 de Noviembre 2019.
- [34] Daniel A. Steck. *Rubidium 87 D Line Data*. disponible en línea en <http://steck.us/alkalidata>, 2019, revisión 2.2.1 del 21 de Noviembre 2019.
- [35] Robert Löw y col. «An experimental and theoretical guide to strongly interacting Rydberg gases». En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 45.11 (2012).
- [36] Sebastian Weber y col. «Calculation of Rydberg interaction potentials». En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 50.13 (jul. de 2017), pág. 133001.
- [37] John Bechhoefer. «Feedback for physicists : A tutorial essay on control». En: *Reviews of Modern Physics* 77. Julio (2005), págs. 783-836.
- [38] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. 7.<sup>a</sup> ed. Pearson, 2010. ISBN: 978-84-8322-660-5.
- [39] W.S. Levine et al. *Control system fundamentals*. 2.<sup>a</sup> ed. CRC Press, 2011. ISBN: 978-1-4200-7363-8.
- [40] H. Kogelnik y T. Li. «Laser Beams and Resonators». En: *Proceedings of the IEEE* 54.10 (1966), págs. 1312-1329.
- [41] D Z Anderson. «Alignment of resonant optical cavities.» En: *Applied optics* 23.17 (1984), págs. 2944-2949.
- [42] Miguel A. Bandres y Julio C. Gutiérrez-Vega. «Ince–Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators». En: *Journal of the Optical Society of America A* 21.5 (2004), pág. 873.
- [43] R.W.P Drever et al. «Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator». En: *Applied Physics B* 105.31 (1983), págs. 97-105.
- [44] Eric D. Black. «An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization». En: *American Journal of Physics* 69.1 (2002), págs. 79-87.
- [45] H. Stoehr y col. «Diode laser with 1 Hz linewidth». En: *Optics Letters* 31.6 (2006), pág. 736.

- 
- [46] J. Alnis y col. «Subhertz linewidth diode lasers by stabilization to vibrationally and thermally compensated ultralow-expansion glass Fabry-Pérot cavities». En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 77.5 (2008), págs. 1-9.
- [47] Jürgen Appel, Andrew MacRae y A. I. Lvovsky. «A versatile digital GHz phase lock for external cavity diode lasers». En: *Measurement Science and Technology* 20.5 (mayo de 2009), pág. 055302.
- [48] Hewon Jung, Jong Youp Shim y Dae Gab Gweon. «New open-loop actuating method of piezoelectric actuators for removing hysteresis and creep». En: *Review of Scientific Instruments* 71.9 (2000), págs. 3436-3440.
- [49] Moshe Nazarathy y col. «Spectral Analysis of Optical Mixing Measurements». En: *Journal of Lightwave Technology* 7.7 (1989), págs. 1083-1096.