



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
Maestría en Ciencias (Física)

**“Herencia de estructura con haces de Mathieu vía  
mezclado de cuatro ondas en Rb”**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
JORGE GERARDO ACOSTA MONTES

TUTOR PRINCIPAL:  
DANIEL SAHAGÚN SÁNCHEZ  
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
ALFRED BARRY UREN CORTÉS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

JESÚS GARDUÑO MEJÍA  
INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO, 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

El apoyo de mis padres en todos los sentidos, ha sido una constante en mi vida. El agradecerles en mi tesis no basta para mostrarles mi aprecio. El agradecimiento más grande se los ofrezco a ellos, gracias.

Al Dr. Daniel Sahagún por permitirme ser miembro del laboratorio, por su paciencia y disponibilidad para ayudarme en la maestría, en el experimento de esta tesis, y en la revisión del manuscrito.

A la Dra. Yaneth Torres por proporcionarme a mí, y a todos los miembros del grupo: atención, ayuda y consejos cuando nos sentíamos desorientados dentro o fuera del laboratorio.

A la Dra. Rocío Jáuregui la cual me orientó, y puso un rumbo a mi proyecto de tesis. Sin ella, no habría sido posible la realización de este proyecto.

Al Dr. Isaac Pérez quien me dejó participar en las reuniones de sus estudiantes. En las cuales siempre me dio consejos, me hizo ver los fallos en mi trabajo, y me mostró cuando mis argumentos no eran sólidos.

A mis compañeros Adrian, Dieguito, Luis, Irvin, Diegote e Yves, por su amistad, y por crear un ambiente productivo pero también muy grato para trabajar. En la lista de compañeros también incluyo a la Dra. Nieves Arias quien me acompañó cuando obtuve los resultados de esta tesis.

A mis amigos de Uruguay # 205 Javier, Ángel, Esme, Felipe, Fernanda y Sam que me han acompañado en todo el tiempo en el que he estado en la maestría. Ha sido muy divertido.

También quiero agradecer a María por ser una invaluable amiga en estos últimos dos años.

No menos importante es agradecer a los proyectos PAPIIT IA103216 y IN108018, al programa de becas de posgrado CONACyT, y al Proyecto Interno del Instituto de Física: “Correlaciones Cuánticas: Teoría y Experimento”.

# Resumen

En este trabajo se realiza una descripción teórica y experimental de los haces de Mathieu, y se describe un experimento para la conversión en frecuencia de un haz vía mezclado de cuatro ondas en rubidio. El mezclado de cuatro ondas aquí empleado se basa en una estructura de diamante de los niveles del rubidio. En este mezclado de cuatro de ondas se emplean dos haces de bombeo, y se generan dos haces de decaimiento. Los haces de bombeo excitan las transiciones  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2}$ . El haz de bombeo de la transición  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$  es Gaussiano, y el haz de la transición  $5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2}$  es de Mathieu. La estructura de este último se generó con un modulador espacial de luz. El decaimiento de los átomos excitados en el estado  $5D_{5/2}$  al estado base  $5S_{1/2}$  se da en dos pasos. Los dos decaimientos producen luz paramétrica colimada, una en el infrarrojo lejano, y la otra en el azul. La luz en el infrarrojo no es detectada pero se observa herencia de estructura entre el haz de Mathieu, y el haz azul. La herencia se da tanto en intensidad como en fase. La herencia de fase permite la transferencia de vórtices del haz de Mathieu hacia el haz azul, y por ello se puede transmitir momento angular orbital. La presencia de vórtices en el haz azul fue confirmada mediante un interferómetro de Michaelson que produce un patrón de interferencia, en donde los vórtices toman la forma de tenedores.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Descripción de la tesis . . . . .	2
<b>1. Haces Invariantes</b>	<b>3</b>
1.1. Descripción de los haces adifraccionales . . . . .	3
1.2. Helmholtz-Gauss . . . . .	5
1.3. Haces de Mathieu . . . . .	6
1.3.1. Relación de haces de Mathieu con estados de mínima incertidumbre . . . . .	8
1.3.2. Vórtices en haces de Mathieu . . . . .	9
1.4. Haces vectoriales . . . . .	12
<b>2. Generación de Haces de Mathieu</b>	<b>16</b>
2.1. Generación de un haz Bessel de orden cero . . . . .	16
2.2. Modulador Espacial de Luz . . . . .	17
2.3. Arreglo Experimental . . . . .	19
2.4. Caracterización del arreglo experimental . . . . .	20
<b>3. Propagación de los haces</b>	<b>22</b>
3.1. Simulación de haces escalares . . . . .	22
3.1.1. Aproximación de la transformada de Fourier por transformadas discretas . . . . .	23
3.1.2. Óptica de Fourier . . . . .	25
3.1.3. Simulación . . . . .	29
3.2. Vórtices . . . . .	33
<b>4. Herencia de Estructura</b>	<b>38</b>
4.1. Átomo de rubidio . . . . .	38
4.2. Mezclado de cuatro ondas . . . . .	39
4.3. Momento angular orbital . . . . .	40
4.4. Arreglo experimental . . . . .	40
4.4.1. Espectroscopía de los haces de bombeo . . . . .	41
4.4.2. Generación de luz paramétrica . . . . .	44
4.5. Transferencia en intensidad . . . . .	45
4.6. Transferencia en fase . . . . .	47
<b>5. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>49</b>
<b>A. Funciones de Mathieu</b>	<b>51</b>
A.1. Coeficientes en Haces Helicoidales . . . . .	53
<b>B. Potenciales de Hertz</b>	<b>55</b>
B.1. Transformaciones de norma . . . . .	57



# Introducción

La interacción de átomos con luz ha sido fundamental para entender con mayor profundidad la estructura atómica. Uno de los primeros efectos de la luz sobre átomos en ser descubiertos fue la saturación de transiciones atómicas. Este fenómeno fue conocido incluso antes de la invención del láser [1]. El estudio de luz sobre gases atómicos condujo al desarrollo de técnicas de espectroscopía que permitieron distinguir niveles atómicos [2]-[3]. Los gases atómicos constituyen un campo fértil para el estudio de procesos de óptica no lineal, algunos ejemplos incluyen pero no se limitan a: dispersión Raman [4], procesos de mezclado de ondas [5] y efecto Kerr [6]. En esta tesis se realiza un experimento con un proceso de mezclado de cuatro ondas.

El avance en la comprensión de los fenómenos de interacción de luz con átomos generalmente se basó en experimentos donde se incidía un haz Gaussiano sobre un medio atómico, y las características relevantes de la luz se remitían a su frecuencia, potencia y tamaño del haz. Sin embargo también es posible utilizar luz con una estructura diferente a la de un haz Gaussiano, y así explotar la geometría de estos haces estructurados. En [7] D. McGloin y K. Dholakia proponen utilizar haces estructurados para generar guías de ondas para átomos y trampas dipolares. También proponen a la luz estructurada como una herramienta para aumentar la eficiencia de procesos no lineales.

La luz posee momento lineal, y por ello momento angular [8], más aún Allen, Beijersbergen, Spreeuw, y Woerdman probaron que es posible tener un momento angular independiente de la polarización de la luz [9], este momento se le conoce como momento angular orbital (OAM). El estudio experimental de la interacción de luz con OAM y átomos no tardó en llegar, por ejemplo en [10] se utiliza por primera vez luz con OAM como bombeo en un gas atómico. En [11] se recapitulan varias aplicaciones y propuestas en física atómica para la luz estructura con OAM, entre las que se encuentran: trampas para átomos neutros, rotación de átomos y condensados de Bose-Einstein, y cambios en las reglas de selección. Además se puede generar entrelazamiento en mas de una variable con OAM, lo cual es importante en información cuántica [12].

El OAM en los haces se puede presentar a través de vórtices ópticos [13] que son defectos en la fase  $f$  de un haz. La fase de un vórtice satisface:

$$\oint \nabla f \cdot dl = 2\pi m, \quad (1)$$

por ello un vórtice es un punto en un frente de onda en el cual es posible construir un circuito alrededor del vórtice en el cual se recorran  $m$ -veces todos los valores de fase  $[0, 2\pi)$ . La presencia de vórtices induce OAM [14], y desde hace poco más de 30 años se han desarrollado técnicas experimentales para imprimir vórtices en haces de luz [15].

Las imágenes siempre han actuado como un medio de comunicación, y su estudio ha sido fundamental para el desarrollo de la óptica. En esta tesis se describe la herencia de estructura de un haz infrarrojo hacia un haz azul, lo cual es un caso particular de transferencia de imágenes entre haces. La transferencia de imágenes ha sido probada de forma experimental con gases atómicos en [16]. La motivación para la transferencia reside en la capacidad de transmitir información mediante imágenes [17]. Los haces que se utilizan para la transferencia de estructura pueden contar con momento angular, y por ello también es posible transferir momento angular

[18]. La herencia de OAM también se usa como un mecanismo para distinguir los procesos no lineales que ocurren en un gas atómico [19].

En este trabajo se utilizan los haces de Mathieu, los cuales pertenecen a una categoría de haces invariantes, es decir haces que retienen su forma y tamaño al propagarse [20]. Los haces de Mathieu son una elección interesante pues tal vez puedan usarse para inducir estados de mínima incertidumbre en la relación de ángulo-momento angular [21].

## Descripción de la tesis

La tesis comienza con una descripción de los haces invariantes. En el primer capítulo se describen algunas propiedades de los haces de Mathieu. Se justifica su uso en esta tesis, y se muestra que un tipo de haces de Mathieu poseen vórtices.

El segundo capítulo habla sobre la generación experimental de los haces de Mathieu. En la realidad no se pueden generar haces de Mathieu con todas las propiedades de los haces invariantes, sin embargo es posible aproximarlos experimentalmente. Se describe el arreglo experimental, y se caracterizan sus elementos.

El tercer capítulo describe simulaciones numéricas de los haces descritos en el capítulo dos. El objetivo de la simulación es brindar información cualitativa de la forma de los haces a lo largo de su propagación. Se incluye un método para la detección de vórtices. El método se detalla tanto de forma teórica como experimental.

En el cuarto capítulo se escribe acerca del experimento de mezclado de cuatro ondas. Se muestra el arreglo experimental que conjunta el mezclado de cuatro ondas, y la generación de haces Mathieu. Se muestra la herencia de estructura en intensidad y en fase de un haz de Mathieu que actúa como un haz de bombeo hacia uno de los haces de decaimiento. La herencia permite convertir vórtices de una frecuencia a otra. La presencia de vórtices en uno de los haces de decaimiento fue corroborada con el método de detección de vórtices descritos en el capítulo tres.

Al final de la tesis se muestran los resultados y conclusiones más relevantes, así como un apéndice de las funciones de Mathieu las cuales modelan a los haces de Mathieu, un apéndice acerca de los potenciales de Hertz los cuales sirven para describir una versión vectorial de los haces de Mathieu. Los haces vectoriales tienen una estructura de polarización local. En el último apéndice se realiza una descripción del efecto Faraday en haces vectoriales.



# Capítulo 1

## Haces Invariantes

Este capítulo es una breve descripción teórica de los haces invariantes, con énfasis en los haces de Mathieu. Se comienza hablando de los haces invariantes ante propagación, o también llamados haces adifraccionales. Los haces invariantes no son físicamente realizables, pero se pueden asemejar por haces Helmholtz-Gauss; este tipo de haces son haces invariantes apodizados en un haz Gaussiano. En este capítulo también se describen dichos haces.

Los haces de Mathieu son un tipo de haces invariantes. Se describen los tres tipos de haces de Mathieu: par, impar e helicoidales, además se muestra que los haces helicoidales presentan vórtices ópticos. Se escogió trabajar con haces de Mathieu ya que las funciones de Mathieu describen estados cuánticos de mínima incertidumbre en la relación ángulo-momento angular. Al final del capítulo se presenta una forma vectorial de los haces. Un haz vectorial es aquel con una estructura de polarización no local.

### 1.1. Descripción de los haces adifraccionales

La difracción es un fenómeno ondulatorio que se presenta en la interferencia de ondas. Max Born y Emil Wolf [22] en el contexto de una onda electromagnética la definen como la desviación del comportamiento geométrico de un rayo. La difracción se manifiesta cuando un frente de onda es obstruido parcialmente por un objeto, lo que produce regiones de interferencia constructiva y destructiva.

En 1987 Durnin [20], introdujo de forma controversial haces “adifraccionales” en los cuales el patrón de intensidad de un haz es el mismo en cualquier plano perpendicular al eje de propagación del haz. En este caso, el concepto de difracción se generaliza para considerar todo fenómeno en el cual se encuentre presente la interferencia de ondas. Cualquier onda se puede considerar como una suma de ondas planas, por ello la propagación de un haz constituido por al menos dos ondas planas se convierte en un problema de difracción. Como ejemplo, la divergencia en un haz Gaussiano propagándose en el vacío se entiende como un fenómeno debido a la difracción de sus ondas constituyentes. En el caso de los haces adifraccionales se considera que la suma de las ondas planas que los forman es tal que cancela los efectos que producen un cambio en forma o tamaño.

Los haces adifraccionales se conocen como PIOF por sus siglas en inglés, y existen cuatro familias. Todos tienen características en común como: presentan componentes longitudinales y transversales, poseen una estructura en el espacio de Fourier similar, la misma forma en su componente longitudinal, entre otras.

Los PIOFs satisfacen la ecuación de onda. En adelante se consideran PIOFs monocromáticos cuya dependencia temporal es sinusoidal con frecuencia  $\omega$  de la forma  $e^{i\omega t}$ . Al proponer una solución a la ecuación de onda como un producto entre una parte espacial  $\Phi$  y una temporal  $e^{i\omega t}$ , la ecuación de onda se reduce a la de Helmholtz  $(\nabla + k)\Phi = 0$ . Los haces invariantes se

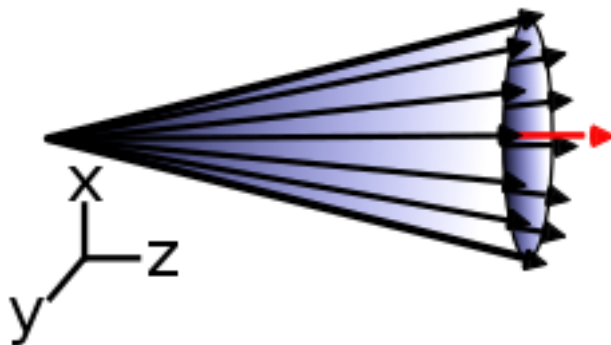
separan en partes transversales y longitudinales. La dependencia de  $\Phi$  en su parte longitudinal es de la forma  $e^{ik_z z}$ , se asignó el eje  $\hat{z}$  como el eje de propagación, y a  $k_z$  el vector de propagación. Con esta elección de forma se asegura que la potencia del haz es independiente de la propagación. Para encontrar la forma de los haces, se resuelve la ecuación de Helmholtz al dividirla en parte transversal y longitudinal  $e^{ik_z z}$ . La ecuación de Helmholtz se puede separar en 11 sistemas coordenados, sin embargo solo los sistemas: cartesiano, cilíndrico, parabólico cilíndrico, y elíptico cilíndrico ofrecen la separación cuya componente longitudinal sea de la forma requerida  $e^{ik_z z}$  [23]. Estos 4 sistemas dan origen a 4 familias de haces adifraccionales: ondas planas, haces Bessel, haces parabólicos, y haces de Mathieu. Los haces Bessel y los de Mathieu reciben dichos nombres pues las funciones que resuelven la ecuación de Helmholtz son funciones de Bessel y funciones de Mathieu (ver apéndice) respectivamente.

En [24] J. Gutiérrez propone una forma de tratar con los haces adifraccionales, basada en la transformada de Fourier de los haces. Su propuesta se basa en soluciones a la ecuación de Helmholtz de la forma [25]:

$$u_I(x, y, z) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} A(\phi) \exp[ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)] d\phi, \quad (1.1)$$

la transformada de Fourier de una onda plana en un plano perpendicular a su eje de propagación es punto ubicado en un anillo de radio  $k_\perp/2\pi$  con  $k_\perp$  el vector transversal de propagación. Por ello, la ecuación 1.1 se interpreta como la suma de ondas planas en el espacio de Fourier, pesadas por una distribución angular  $A(\phi)$ .

Dado que las magnitudes de los vectores de propagación transversal  $k_\perp$  y longitudinal  $k_z$  son las mismas para todas las ondas planas que constituyen al haz adifraccional entonces los vectores de propagación de dichas ondas se encuentran en un cono de altura  $k_z$  y radio  $k_\perp$ , véase la figura 1.1. Lo cual constriñe a la transformada de Fourier de PIOF a ser un anillo de radio  $k_\perp/2\pi$ .



**Figura 1.1:** Representación de los vectores de propagación de las ondas planas que forman a un haz ideal. Los vectores en negro son los vectores de propagación de las ondas planas, y el vector en rojo es el vector de la suma de dichos haces. Este vector indica la dirección de propagación longitudinal, se ha escogido un sistema coordenado en el que la componente longitudinal se encuentre sobre el eje  $z$ .

Cuando la distribución angular  $A(\phi)$  es una delta de Dirac, la ecuación 1.1 conduce a una onda plana [24]. Si  $A(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(\phi - 2\pi/N)$  el haz adifraccional es una suma discreta de ondas planas, si  $A(\phi) = e^{in\phi}$  se producen haces de Bessel de orden  $n$ , y cuando  $A(\phi) = \{ce(\phi, q), se(\phi, q), ce(\phi, q) + ise(\phi, q)\}$  se producen haces de Mathieu. Las funciones  $\{ce(\phi, q), se(\phi, q)\}$  son funciones de Mathieu. Recuérdese que los haces de Mathieu se obtienen al separar la ecuación de Helmholtz en un sistema elíptico, el parámetro  $q$  define la elipticidad de los haces.

Los haces adifraccionales no pueden ser generados experimentalmente, ya que al integrar la potencia del haz en todo el espacio esta diverge. Dicho de otro modo se requeriría de energía

infinita para poder generarlos. La imposibilidad de generar haces invariantes de forma experimental no es un hecho sorprendente, pues desde los libros de texto de óptica [22],[26] es conocida la imposibilidad de generar ondas planas. A pesar de ello, los haces se pueden aproximar en el laboratorio al modular un PIOF con un haz gaussiano. Este tipo de haces reciben el nombre de Helmholtz-Gauss.

La suma de dos o más haces adifraccionales no necesariamente produce un haz adifraccional, es decir en general la superposición de dos haces invariantes no genera un haz invariante, mas la suma de funciones de distribución angular  $A(\phi)$  en 1.1 si genera haces invariantes.

## 1.2. Helmholtz-Gauss

Los haces adifraccionales producidos experimentalmente están modulados por una curva Gaussiana, dado que los láseres que se utilizan para producirlos tienen esta forma. Estos haces reciben el nombre de “Helmholtz-Gauss”, pues en su descripción matemática son el producto de un haz adifraccional que obedece la ecuación de Helmholtz, y una curva Gaussiana.

Un haz Helmholtz-Gauss  $U$  se constituye de una suma de ondas planas  $u$  moduladas por un haz Gaussiano, la suma de las ondas planas se pesa contra la distribución angular  $A(\phi)$  de un haz ideal:

$$U(x, y, z) = \int_0^{2\pi} A(\phi)u(x, y, z)d\phi, \quad (1.2)$$

la suma de ondas planas  $u$  debe satisfacer la ecuación de Helmholtz, y además debe cumplir como condición inicial ser el producto de una onda plana y un haz Gaussiano de cintura  $\omega$ . Se busca que el haz se asemeje a un haz invariante por lo que también se pide a  $u$  una dependencia en el eje de propagación  $z$  de la forma  $\exp(ik_z z)$ . En resumen  $u$  debe cumplir:

$$u(x, y, 0) = e^{-\frac{r^2}{\omega^2}} e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (1.3)$$

$$u(x, y, z) = e^{ik_z z} \Psi(x, y, z), \quad (1.4)$$

con  $r$  la coordenada radial polar. En [27] se encuentra la forma explícita de  $u$  y  $U$ , al encontrar una expresión para  $\Psi(x, y, z)$ . Para ello se propone un Ansatz para  $\Psi$  que resuelva la ecuación de Helmholtz. Se aplican las condiciones 1.3,1.4, y se sustituye  $u$  en 1.2. El Ansatz está dado por:

$$\Psi(x, y, z) = \exp[iP(z)] \exp\left[\frac{ikr^2}{2q(z)}\right] \exp\left[i\left(\frac{k_x x}{\mu(z)} + \frac{k_y y}{\mu(z)}\right)\right], \quad (1.5)$$

el Ansatz se inspira en un haz Gaussiano. Al aplicar el Ansatz se obtienen las expresiones para  $P(z), q(z), \mu(z)$ . Consiguiendo así:

$$u(x, y, z) = \exp\left(-i\frac{\kappa z}{\mu}\right) \frac{\exp(ikz)}{\mu} \exp\left(-\frac{r^2}{\mu\omega^2}\right) \exp\left[i\left(\frac{k_x x}{\mu} + \frac{k_y y}{\mu}\right)\right], \quad (1.6)$$

$$U(x, y, z) = \exp\left(-i\frac{\kappa z}{\mu}\right) \frac{\exp(ikz)}{\mu} \exp\left(-\frac{r^2}{\mu\omega^2}\right) W\left(\frac{x}{\mu}, \frac{y}{\mu}, k_{\perp}\right), \quad (1.7)$$

donde se introdujeron  $\kappa = k_{\perp}^2 (2k)^{-1}, \mu = 1 + izz_R^{-1}$ , y el rango de Rayleigh  $z_R = k\omega^2/2$ . En haces Gaussianos la cintura del haz incrementa conforme este se propaga,  $\mu$  se interpreta como la función cuya norma determina dicho incremento. Es decir  $\omega(z) = \omega|\mu|$ . El rango de Rayleigh es la distancia en la cual el área de la sección transversal se duplica. La sección transversal es un círculo de radio  $\omega$ . La función escalar  $W(x, y, k_{\perp})$  describe un haz invariante ideal arbitrario, por ejemplo en el caso de haces Bessel,  $W(x, y, k_{\perp})$  está dada por funciones de Bessel.

El espectro angular de un haz (la función  $A(\phi)$  en la ecuación 1.1 es el espectro angular de un haz ideal) consiste en realizar una transformada de Fourier al haz en el plano transversal a su

propagación. Dada la ecuación 1.2 notesé que el espectro angular  $\tilde{u}$  de un haz Helmholtz-Gauss  $U$  está dado por:

$$\tilde{u} = \int_0^{2\pi} A(\phi)\mathfrak{F}(u)d\phi, \quad (1.8)$$

con  $\mathfrak{F}(u)$  la transformada de Fourier de  $u$  en las coordenadas  $x, y$ . La transformada  $\mathfrak{F}(u)$  tiene la forma:

$$\mathfrak{F}(u) = D(z) \exp\left(-\frac{\omega^2\mu}{4}\rho^2\right) \exp\left[\frac{\omega^2}{4\pi}(k_x\mu + k_y\nu)\right], \quad (1.9)$$

$$D(z) = \frac{\omega^2}{2} \exp\left(-\frac{1}{4}k_\perp^2\omega^2\right) \exp(ikz), \quad (1.10)$$

donde  $\mu$  y  $\nu$  son las variables en el espacio de frecuencias, y  $\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ . Al realizar la integral de la ecuación 1.8 se encuentra que la magnitud de  $\tilde{u}$  es proporcional a:

$$\exp\left(-\frac{\omega^2\mu}{4}\rho^2\right) \exp\left[\frac{\omega^2}{2}k_t\rho\right], \quad (1.11)$$

la amplitud de la expresión inmediata anterior es proporcional a:

$$\exp\left[-\frac{1}{4}\omega^2(\rho - k_t)^2\right], \quad (1.12)$$

lo cual quiere decir, que el espectro angular se verá de forma intensa en un anillo de radio  $k_\perp$ , y la intensidad del anillo decae de forma Gaussiana. En [27], se establece como convención un grosor de anillo de  $4/\omega$ . En los límites del anillo la intensidad ha decaído de forma proporcional a  $e^{-1}$  con respecto al centro del anillo. El resultado anterior se puede entender como la convolución del espectro angular de un haz invariante ideal, es decir un anillo de grosor infinitesimal con una Gaussiana.

### 1.3. Haces de Mathieu

Los haces de Mathieu fueron introducidos de forma teórica [24] y experimental [28] por J. Gutiérrez en el 2000. Los haces tienen una geometría elíptica e hiperbólica, pues son soluciones a la ecuación de Helmholtz en el sistema elíptico cilíndrico. Los haces de Mathieu se pueden considerar como una generalización de los haces con simetría circular (haces Bessel), ya que la forma elíptica de los haces se puede llevar al caso límite cuando las elipses se convierten en círculos. más aún, el campo eléctrico tiende al campo de un haz Bessel en el proceso de transformar elipses en círculos.

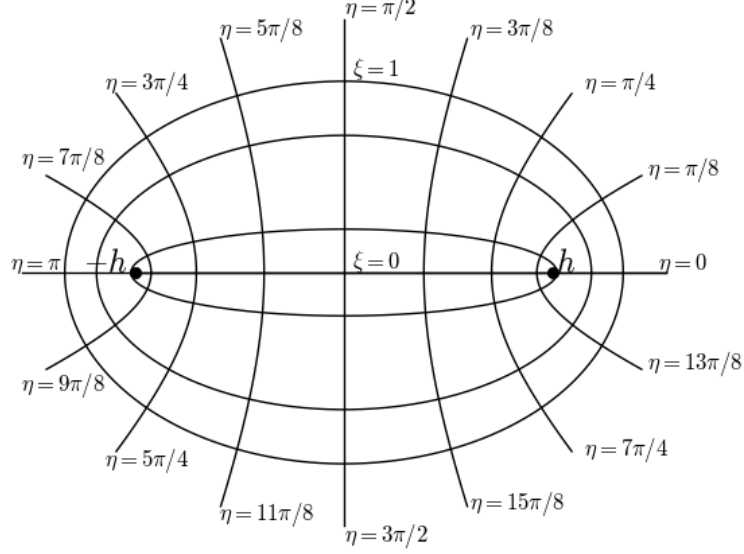
La relación entre coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  y elípticas cilíndricas  $(\xi, \eta, z)$  es:

$$\begin{aligned} x &= h \cosh \xi \cos \eta, \\ y &= h \sinh \xi \sin \eta, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Las superficies con  $\xi$  constante describen elipses con focos en  $-h, h$ , y aquellas con  $\eta$  constante son hipérbolas. Los rangos de las nuevas variables son  $\xi \in [0, \infty)$ ,  $\eta \in (0, 2\pi)$  y  $z \in (-\infty, \infty)$ . La variable  $\xi$  juega el rol de una variable radial, y  $\eta$  el de una variable angular. El sistema coordenado se ilustra en la figura 1.2.

Para obtener la forma de los haces se supone un haz monocromático  $e^{i\omega t}$ , y una dependencia longitudinal  $e^{ik_z z}$ . La forma de la sección transversal  $\zeta$ , se obtiene al resolver la ecuación de Helmholtz en las coordenadas transversales  $(\xi, \eta)$  [29]:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + 2q[\cosh(2\xi) - \cos(2\eta)]\zeta = 0, \quad (1.14)$$



**Figura 1.2:** Corte transversal del sistema de coordenadas elíptico cilíndrico. Las coordenadas de este sistema son  $(\xi, \eta, z)$ . El eje  $\hat{z}$  es ortogonal al corte y se orienta hacia fuera de la página. La coordenada  $\xi$  toma el papel de una coordenada radial, y  $\eta$  la de una coordenada angular.

el parámetro  $q$  determina la elipticidad de los haces, y está dado por  $q = k_{\perp}^2 h^2 / 4$ . Siendo  $k_{\perp}$  el vector de propagación transversal. Al aplicar separación de variables  $\zeta = H(\eta)\Xi(\xi)$  se obtienen la ecuación de Mathieu y la ecuación de Mathieu modificada:

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + (a - 2q \cos(2\eta))H = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} - (a - 2q \cosh(2\xi))\Xi = 0, \quad (1.16)$$

el parámetro  $a$  es la constante de separación. Puesto que  $\eta$  se comporta como una variable angular se toman soluciones periódicas de la ecuación 1.15. De otra forma el campo eléctrico sería diferente al rotar por un vuelta a  $\eta$ . El conjunto de soluciones se limita a tres tipos:

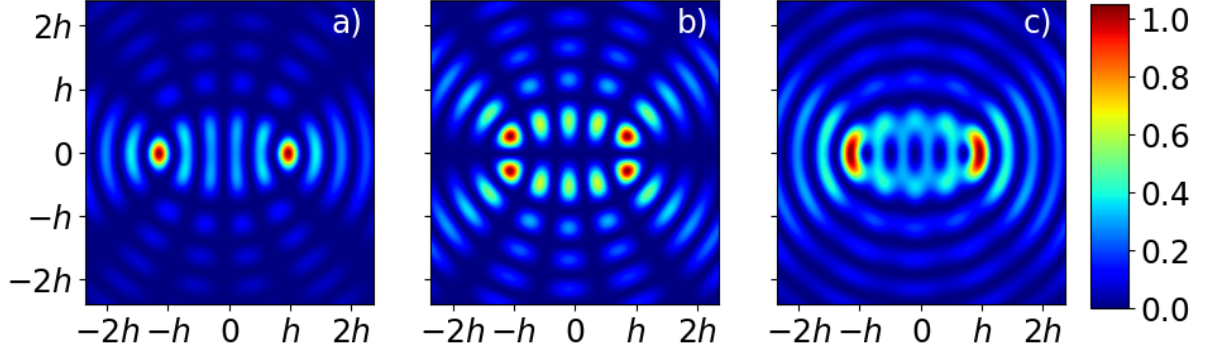
$$\zeta = C e_m(\xi, q) c e_m(\eta, q), \quad (1.17)$$

$$\zeta = S e_m(\xi, q) s e_m(\eta, q), \quad (1.18)$$

$$\zeta = \mathcal{A}_m(q) C e_m(\xi, q) c e_m(\eta, q) + i \mathcal{B}_m(q) S e_m(\xi, q) s e_m(\eta, q), \quad (1.19)$$

las funciones  $c e_m$  y  $s e_m$  son el coseno y seno elíptico, ambas funciones también se conocen como funciones de Mathieu.  $C e_m$  y  $S e_m$  son el coseno y seno elíptico modificado de orden  $m$ , o también llamadas funciones de Mathieu modificadas. Las expresiones 1.17-1.19 también se obtienen al sustituir  $A(\phi) = \{c e_m(\phi, q), s e_m(\phi, q), c e_m(\phi, q) + i s e_m(\phi, q)\}$  en 1.1. En el apéndice de funciones de Mathieu se describen algunas propiedades de las funciones de Mathieu, y se definen los coeficientes  $\mathcal{A}_m(q)$  y  $\mathcal{B}_m(q)$ .

Los haces con la estructura de 1.17 se conocen como Mathieu pares, pues las funciones de  $C e_m$  y  $c e_m$  son funciones pares. De manera análoga se definen a 1.18 como Mathieu impares. Ambas soluciones forman ondas estacionarias. Por otro lado, a los haces descritos por 1.19 se les conocen como haces helicoidales, y son ondas viajeras [30], es decir si se realiza un corte



**Figura 1.3:** Corte transversal de haces de Mathieu de orden 5. La figura a) muestra un haz par, la b) un haz impar y c) es un haz helicoidal. La barra de color muestra la intensidad del campo eléctrico normalizado. Los ejes coordenados están en escala de la distancia entre los focos de las elipses  $h$ .

transversal del haz el campo eléctrico parece que se mueve hacia el centro del haz, ó que se mueve desde el centro hacia afuera.

En la figura 1.3 se muestran haces de Mathieu de cada variedad. Los haces son de orden 5. Las figuras a) y b) son un haz par y uno impar, y la figura c) es un haz helicoidal. En las figuras a), b) se puede distinguir el orden del haz, pues existen 5 hipérbolas donde la intensidad del campo eléctrico es cero. Esto ocurre dado que las regiones con  $\eta$  constante definen hipérbolas, y tanto  $ce_m(\eta, q)$  como  $se_m(\eta, q)$  presentan  $m$  ceros en el intervalo de  $[0, 2\pi]$  [29]. Así mismo hay regiones elípticas donde el campo vale cero, y es por ello que los haces exhiben una forma elíptica. En los haces impares existe una recta horizontal con intensidad de campo cero que atraviesa el centro del haz, pues  $se_m(\eta, q)$  es impar alrededor de  $\eta = 0$  y  $\eta = \pi$ . En la figura 1.2 se aprecia que  $\eta = 0$  y  $\eta = \pi$  representan al eje x. La aparición de esta recta permite distinguir la paridad de los haces.

Por otro lado, en el haz helicoidal se observa que los ceros de  $ce_m(\eta, q)$  y  $se_m(\eta, q)$  son en general distintos, pues no existen hipérbolas de intensidad cero. Los ceros de las funciones de Mathieu modificadas  $Ce_m(\xi, q)$  y  $Se_m(\xi, q)$  se encuentran más cercanos que los ceros de  $ce_m(\eta, q)$  y  $se_m(\eta, q)$ , resultando así en elipses de intensidad cero en haces helicoidales.

### 1.3.1. Relación de haces de Mathieu con estados de mínima incertidumbre

Al igual que existe una relación de incertidumbre entre posición y momento lineal, existe una relación de incertidumbre entre estados descritos por una variable angular y momento angular. El interés inicial para estudiar haces de Mathieu en esta tesis surgió ya que los estados que minimizan la relación de incertidumbre entre ángulo y momento angular son funciones de Mathieu, por lo cual se conjetura que los haces de Mathieu podrían ser útiles para realizar mediciones de precisión.

Considérese un sistema en el cual las rotaciones están descritas por un ángulo  $\phi$ . El sistema puede ser una partícula moviéndose en un círculo, o un rotor rígido entre otros. Clásicamente este sistema se puede describir en el espacio fase por las coordenadas  $\phi$  y el momento angular  $L$ . Este par de coordenadas obedecen el paréntesis de Poisson:

$$\{\phi, L\} = 1, \quad (1.20)$$

por lo que se espera que una versión cuantizada de dichas variables obedezca la relación de conmutación:

$$[\phi, L] = i\hbar, \quad (1.21)$$

la cuantización de una variable angular ofrece ciertas dificultades, pues la función de ángulo es necesariamente discontinua ó multivaluada. En el primer caso hay una transición discontinua cuando el ángulo se aproxima a  $2\pi$ , pues al llegar a  $2\pi$  la función tomaría el valor de cero; en el otro caso a un mismo valor  $\phi$  le corresponderían una infinidad de valores  $\phi + 2\pi n$  con  $n$  un entero. Una forma de solucionar dicho problema es tomar funciones que sean periódicas y diferenciables con periodo  $2\pi$ , como propuesta en [31] se buscan funciones como el seno y el coseno.

El espacio fase de un sistema en el cual existe una rotación en un plano se describe por dos variables: ángulo  $\phi \in [0, 2\pi)$  y momento angular  $L \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto el espacio fase es isomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Cualquier transformación en dicho espacio se puede descomponer como rotaciones  $R(\alpha)$  y traslaciones  $T_z(t)$ :

$$R(\alpha) = e^{i\alpha z} \quad (1.22)$$

$$T_z(t) = z + t \quad (1.23)$$

con  $\alpha \in [0, 2\pi)$  y  $t \in \mathbb{C}$ . Las rotaciones se generan a través del operador de momento angular  $L$  y las traslaciones por medio del momento lineal canónico  $X$ , en este caso dicho momento no corresponde con el momento lineal. Un estudio completo del espacio fase solo requiere concentrarse en  $L$  y  $X$ . Dado que se busca aprovechar la naturaleza del sistema bajo estudio (rotaciones en un plano), es conveniente definir el operador  $R^2 = X_1^2 + X_2^2$ , los subíndices 1, 2 indican dos dirección en el plano, y construir operadores similares al seno y al coseno.

$$C = \frac{X_1}{\sqrt{R^2}}, \quad S = \frac{X_2}{\sqrt{R^2}}, \quad C^2 + S^2 = 1, \quad (1.24)$$

y además notese que se cumplen los conmutadores:

$$\frac{1}{\hbar}[L, C] = iS, \quad \frac{1}{\hbar}[L, S] = -iC, \quad [C, S] = 0. \quad (1.25)$$

Si se define un operador exponencial  $E = C + iS$ , entonces este se encuentra sujeto a:

$$[E, L] = \hbar E. \quad (1.26)$$

Cualquier par de operadores  $A, B$  obedecen una relación de incertidumbre Heisenberg-Robertson  $(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$ , en este caso:

$$(\Delta L)^2(\Delta E)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}|\langle E \rangle|^2. \quad (1.27)$$

En realidad no se puede satisfacer la igualdad en 1.27, pero Sánchez-Soto en [21] muestra que existen estados que minimizan el lado izquierdo de 1.27. Tales estados se encuentran dados por funciones de Mathieu  $ce_{2m}$  o  $se_{2m}$ .

### 1.3.2. Vórtices en haces de Mathieu

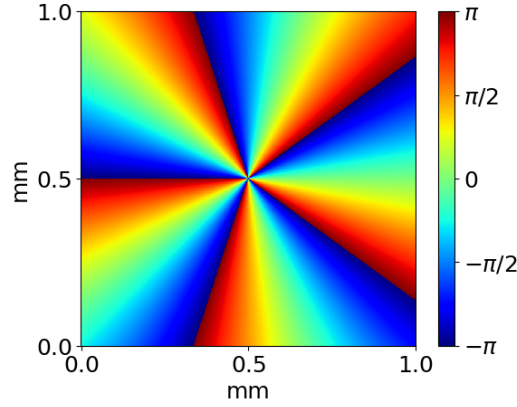
Una singularidad óptica en fase o vórtice óptico es un punto alrededor del cual hay un defecto en la fase. Los vórtices ópticos prometen ser una valiosa herramienta en el desarrollo tecnológico, pues la luz estructurada que contiene los vórtices es muy sensible a cambios en el medio de propagación [32], también es posible generar estados entrelazados a través de luz con vórtices [12]. El campo electromagnético de una singularidad satisface [13]:

$$\oint \nabla f \cdot dl = 2\pi m, \quad (1.28)$$

donde  $f$  es la fase del campo y  $m$  es un entero conocido como la carga topológica. En esencia, la fase del campo eléctrico gira alrededor de una singularidad y  $m$  es un indicador del número de vueltas que la fase ha cambiado.

La intensidad del campo en los vórtices ópticos es necesariamente cero, pues la fase no se puede definir en dichos puntos. En caso de que la intensidad fuese distinta de cero, entonces la fase tendría un valor definido lo cual es contradictorio. En consecuencia la búsqueda de vórtices, se reduce a los puntos en los cuales el campo es cero. Sin embargo, intensidad cero es solo una condición necesaria mas no suficiente.

El campo eléctrico  $E(r, \theta)$  en el plano donde se encuentra un vórtice, y alrededor de este mismo toma la forma  $E(r, \theta) \approx r^m e^{im\theta}$ . En la figura 1.4 se exhibe la fase del campo del vórtices. La singularidad mostrada tiene carga topológica 5, como se puede corroborar en la fase de la singularidad.



**Figura 1.4:** Se ilustra la fase de una singularidad óptica con carga topológica 5. El campo se ha aproximado por  $E(r, \theta) \approx r^5 e^{i5\theta}$ . La singularidad se localiza en el centro de la imagen, y su intensidad es cero. La barra de color se corresponde con la fase.

Tanto los haces de Mathieu pares como impares están modelados por funciones reales de variables reales, por tanto el gradiente de su fase no toma todas las direcciones posibles, y por ello ambos tipos de haces carecen de vórtices ópticos. Sin embargo, los haces helicoidales si presentan vórtices [30]. Para desarrollar una mejor intuición sobre la ubicación de los ceros en el campo, recuérdese que los haces de Mathieu son soluciones a la ecuación de Helmholtz en el sistema elíptico cilíndrico, con coordenadas  $\xi, \eta, z$ . Las regiones con  $\xi$  constante son elipses, y las regiones con  $\eta$  constante son hipérbolas, véase la figura 1.2. La relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas 1.13 implica :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{h^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{h^2 \sinh^2 \xi} &= 1, \\ \frac{x^2}{h^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{h^2 \sin^2 \eta} &= 1. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Las funciones de Mathieu de orden  $m$  presentan  $m$  ceros en el intervalo  $[0, \pi]$ , y tienden a agruparse alrededor de  $\pi/2$  [29]. En [30] se estudian los vórtices en el eje principal de un haz de Mathieu helicoidal de orden  $m$ . El eje principal es la región  $\xi = 0$ , y es una línea recta sobre el eje de las  $x$  que va de  $-h$  a  $h$ . Sobre el eje, la parte imaginaria del haz helicoidal es cero, pues  $Se(\xi = 0, q) = 0$ , por ello los ceros del haz sobre el eje se encuentran donde la parte real también es cero. Usando las ecuaciones 1.29 se deduce que los ceros se encuentran en  $x = h \cos \eta_i$  con  $\eta_i$  uno de los  $m$  ceros de  $ce_m(\eta, q)$ .

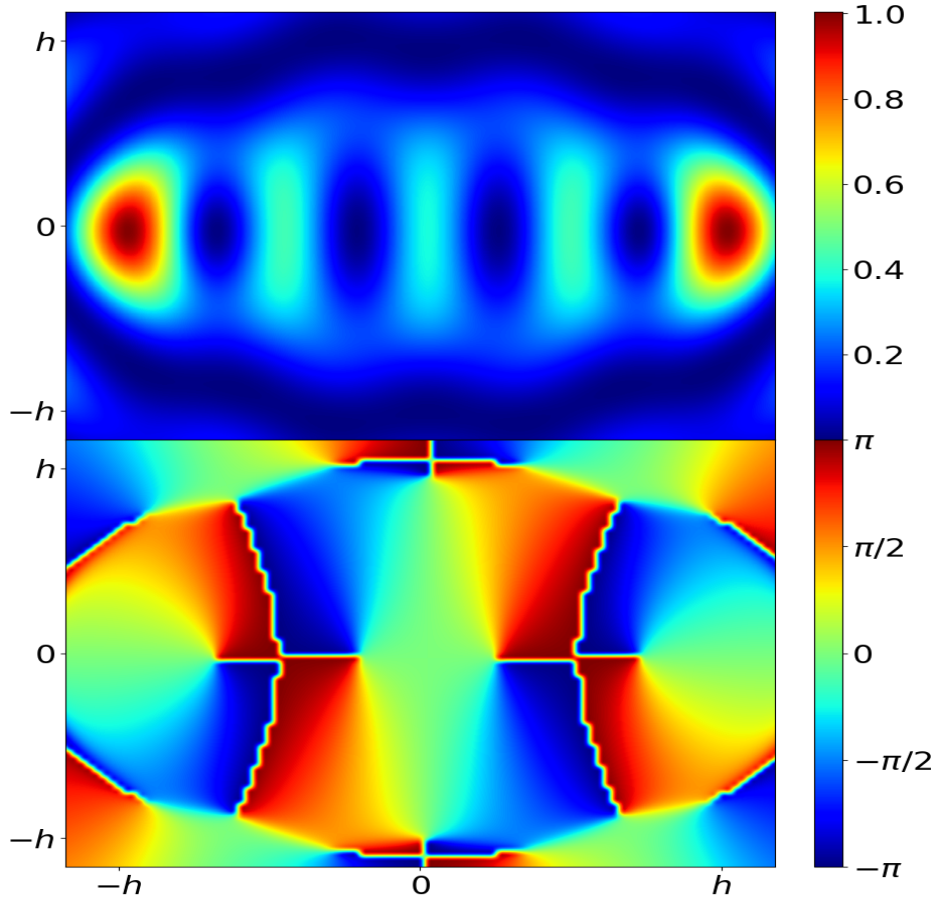
Fuera del eje central, las posibles familias de vórtices se presentan en puntos en elipses. Dichas elipses se determinan por las  $\xi$  tales que son ceros de las funciones de Mathieu modificadas  $Ce_m(\xi, q)$ ,  $Se_m(\xi, q)$ , y los puntos que pueden presentar vórtices se encuentran al intersecar



la elipse con un hipérbola que a su vez está determinada por los ceros de  $se_m(\eta, q)$ ,  $ce_m(\eta, q)$  respectivamente.

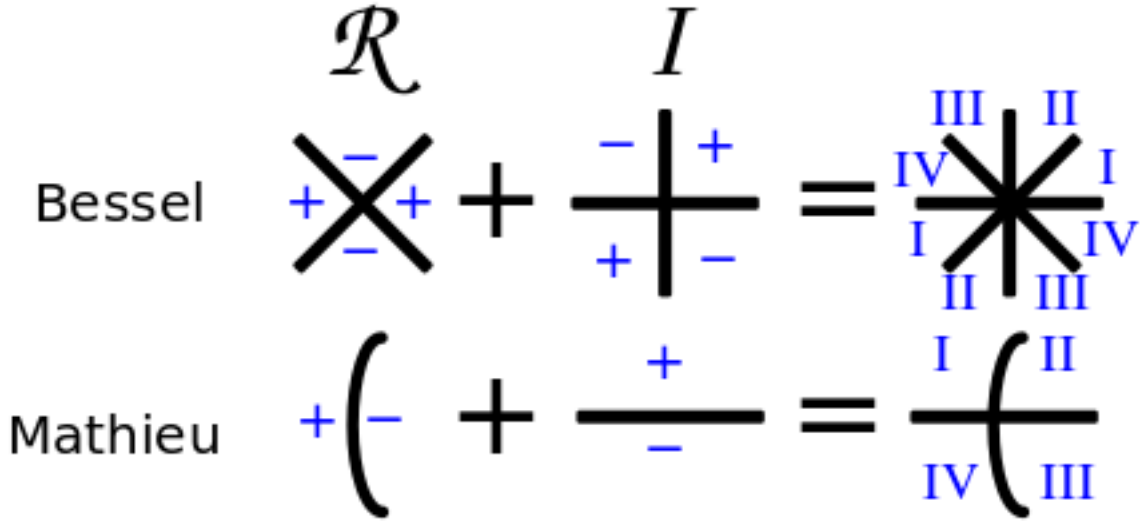
Para determinar si los puntos en los cuales el campo es cero son vórtices, se realiza la integral de contorno 1.28.

En la figura 1.5 se puede ver un haz de Mathieu helicoidal de orden 4 con 4 singularidades en el eje principal. Nótese que las singularidades en el eje principal aparecen en las regiones donde el campo eléctrico es cero, es decir en las regiones de azul oscuro en la figura superior. Para detectar visualmente una singularidad, hay que encontrar un punto en la figura de fase donde se presenten todos los valores de fase alrededor de un punto.



**Figura 1.5:** Se muestra un haz Mathieu helicoidal de orden 4. En la figura superior se ilustra la intensidad del campo eléctrico normalizada. En el eje principal hay 4 regiones oscuras cada región contiene un vórtice. En la figura inferior se muestra la fase del haz, en esta figura se aprecian las 4 singularidades.

Todas las singularidades en los haces de Mathieu, al menos en el eje central y en el límite  $q < m^2/2 - 1$  [30] tienen carga topológica 1. En la figura 1.6 se ilustra por que en los haces de Mathieu los vórtices tienen carga unitaria. Para explicar la carga en los haces de Mathieu, primero explico la carga topológica en un haz Bessel. La forma de un haz Bessel de orden  $m$  está dada por  $J_m(k_\perp r)e^{im\theta}$ , con  $(r, \theta)$  las coordenadas polares en un plano transversal al eje de propagación del haz, y  $k_\perp$  el vector transvesal de propagación del haz. Los haces Bessel tienen una singularidad en el origen. La fase de un haz Bessel de orden  $m$  en el círculo con centro el origen del sistema coordenado, y como radio la primera  $r_0 > 0$  tal que  $J_m(k_\perp r_0) = 0$  está determinada por la función  $e^{im\theta}$ . La función  $e^{im\theta}$  se descompone en sus partes real e imaginaria como  $e^{im\theta} = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta)$ , entonces los ceros reales de  $e^{im\theta}$  forman rayos que salen del origen, y tienen ángulos de inclinación  $n\pi/2m$  con  $n$  un entero impar. Similarmente los ceros imaginarios son rayos que salen del origen. Nótese que entre dos rayos que representen los ceros reales de



**Figura 1.6:** Se ilustra la magnitud de la carga topológica en un haz Bessel, y en un haz de Mathieu. En las figuras se muestran de forma individual la parte real, y la parte imaginaria de las funciones que modelan a los haces. La parte real está bajo un columna encabezada por una  $\mathcal{R}$ , y la parte imaginaria está encabezada por una  $\mathcal{I}$ . En las partes reales e imaginarias se muestran en negro los ceros de dichas regiones. Los signos  $+$ ,  $-$  indican el signo de la región. La última columna muestra la fase de los haces. Los números romanos indican el cuadrante de fase en el plano complejo.

$e^{im\theta}$ , siempre hay un rayo de ceros imaginarios. Así mismo entre dos rayos de ceros imaginarios hay un rayo de ceros reales. Entonces la fase del haz en un región entre un rayo real y un rayo imaginario, se encontrará necesariamente en uno y solo uno de los cuadrantes del plano complejo. Las regiones entre rayos reales e imaginarios tienen forma de cono, obsérvese en 1.6 que la fase de los conos se recorre de forma antihoraria.

En el caso de haces Bessel de orden  $m$ , nótese que en cualquier circuito que en su interior contenga al origen recorre todos los valores de fase  $m$  veces, y por ello un haz Bessel de orden  $m$  tiene un vórtice de carga topológica  $m$ . En un haz de Mathieu, al menos en el eje central y en el límite  $q < m^2/2 - 1$  no se pueden producir vórtices de carga topológica mayor a 1, ya que las regiones que definen los ceros reales  $ce_m(\xi, q)$  son ramas de hipérbolas, y en el eje central la parte imaginaria es cero. La intersección entre una rama de una hipérbola, y el eje central produce 4 regiones en donde todos los puntos de cada región tienen una fase que está en un uno y solo uno de los cuadrantes del plano complejo. En consecuencia si se forma un vórtice este a lo más tendrá carga unitaria.

## 1.4. Haces vectoriales

La polarización en los haces invariantes hasta ahora descritos es aproximadamente global, es decir para cualquier punto en un frente de onda el campo eléctrico apunta en la misma dirección. Sin embargo, existen soluciones a las ecuaciones de Maxwell en donde la polarización es dependiente de la posición. Los haces con dicha estructura de polarización se conocen como haces vectoriales [33]. Es posible generalizar los haces Helmholtz-Gauss a su análogo vectorial [34]. Los haces con una estructura de polarización no homogénea pudiesen tener aplicaciones en: espectroscopía, almacenamiento súper denso de información y fabricación de estructuras en la escala nanométrica [35].

A continuación se introduce una generalización vectorial de los haces invariantes, que sigue el mismo formalismo utilizado en [36], para describir haces Bessel vectoriales. En dicho artículo se resuelven las ecuaciones de Maxwell de forma exacta por medio de los potenciales de Hertz

$\Pi_e, \Pi_m$  (ver el apéndice “Potenciales de Hertz”) [37]. Los potenciales de Hertz están asociados a los modos transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM). En este formalismo se asigna la misma dependencia funcional a cada modo, pero se brinda la libertad de pesar los modos de forma distinta.

Supóngase ahora un haz vectorial cuya dirección de propagación se encuentra sobre un vector  $u$ . Si ambos potenciales de Hertz  $\Pi_e, \Pi_m$  se alinean en dicha dirección, y se escoge un sistema coordenado cartesiano donde el eje  $\hat{e}_z$  coincida con  $u$  entonces los vectores  $\Pi_e, \Pi_m$  se pueden reescribir en términos de potenciales escalares  $\Pi_1, \Pi_2$  como  $\Pi_e = \mu\Pi_1\hat{e}_z$ , y  $\Pi_m = \epsilon\Pi_2\hat{e}_z$ . Ambos potenciales escalares satisfacen la ecuación de onda:

$$\nabla^2\Pi_i - \epsilon\mu\ddot{\Pi}_i = 0, \quad (1.30)$$

donde  $\epsilon, \mu$  son la permitividad y permeabilidad del vacío. Para generalizar haces invariantes escalares a vectoriales se elige  $\Pi_1 = \alpha\Psi_m$ , y  $\Pi_2 = \beta\Psi_m$  donde  $\alpha, \beta$  son constantes que determinan el peso que se le asigna a los modos TE y TM respectivamente,  $c$  es la velocidad de la luz, y

$$\Psi_m = W(x, y)e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (1.31)$$

donde  $W(x, y)$  es una función que satisface la ecuación de Helmholtz, y es tal que constituye la estructura de un haz adifraccional. Por ejemplo se pueden utilizar funciones de Mathieu para producir haces vectoriales de Mathieu pares, impares y helicoidales. En concreto se utilizan las funciones de Mathieu  $W(x, y) = Ce(\xi)ce(\eta), Se(\xi)se(\eta)$  ó  $\mathcal{A}_m(q)Ce_m(\xi, q)ce_m(\eta, q) + i\mathcal{B}_m(q)Se_m(\xi, q)se_m(\eta, q)$ .

Los campos eléctrico  $E$  y de inducción magnética  $B$  se relacionan con los potenciales de acuerdo a [37]:

$$\begin{aligned} E &= \epsilon^{-1}\nabla(u \cdot \nabla\Pi_1) - \mu\ddot{\Pi}_1 u - (\nabla\dot{\Pi}_2) \times u, \\ B &= \nabla(u \cdot \nabla\Pi_2) - \mu\epsilon\ddot{\Pi}_2 u + \mu(\nabla\dot{\Pi}_1) \times u. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Al sustituir los potenciales se obtiene:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(i\epsilon^{-1}k_z \frac{\alpha}{c^2} + \omega \frac{\beta}{c^2})(\partial_x + i\partial_y)\Psi_m(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) + \frac{1}{2}(i\epsilon^{-1}k_z \frac{\alpha}{c^2} - \omega \frac{\beta}{c^2})(\partial_x - i\partial_y)\Psi_m(\hat{e}_x - i\hat{e}_y) + \\ &\quad k_{\perp}^2 \frac{\alpha}{\epsilon c^2} \Psi_m \hat{e}_z, \\ B &= \frac{1}{2}(ik_z \frac{\beta}{c} - \omega\mu \frac{\alpha}{c^2})(\partial_x + i\partial_y)\Psi_m(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) + \frac{1}{2}(ik_z \frac{\beta}{c} + \omega\mu \frac{\alpha}{c^2})(\partial_x - i\partial_y)\Psi_m(\hat{e}_x - i\hat{e}_y) + \\ &\quad k_{\perp}^2 \frac{\beta}{c} \Psi_m \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Obsérvese que no se ha utilizado la forma de la función  $\Psi_m$ , por lo que la expresión anterior sirve para describir cualquier haz invariante. En la tabla 1.1 se muestra como se transforma el operador  $\partial_x \pm i\partial_y$  en los sistemas coordenados relevantes para los haces adifraccionales.

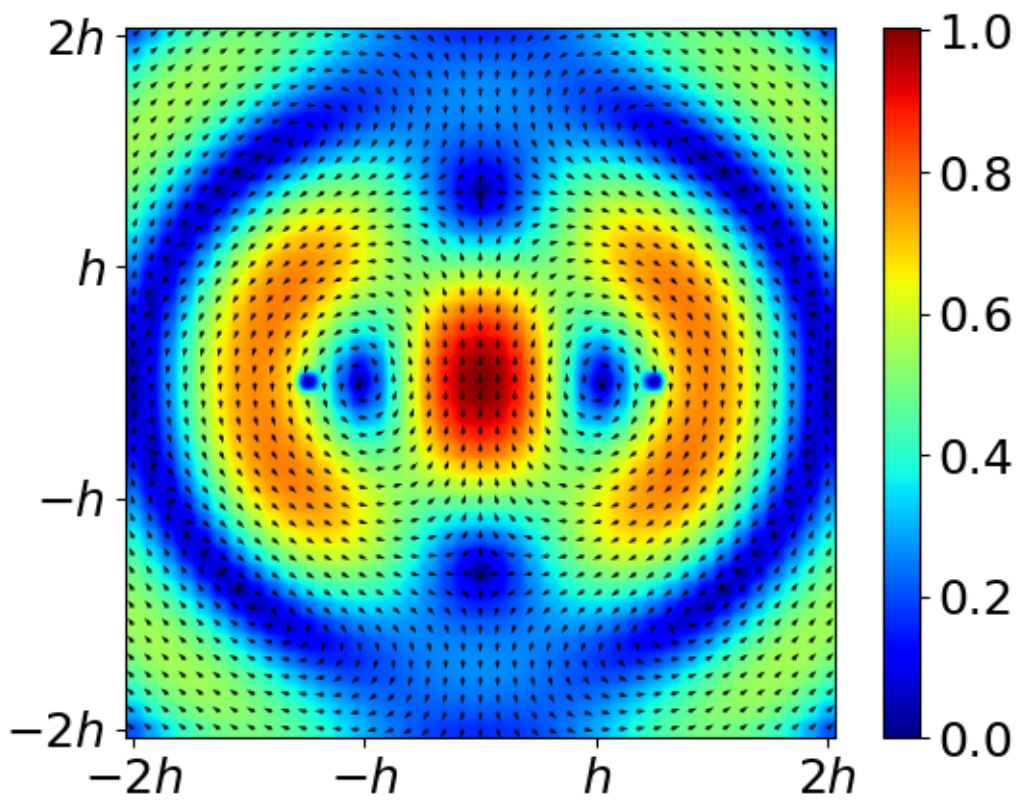
La figura 1.7 es un corte transversal del campo eléctrico de un haz de Mathieu vectorial. La gráfica se obtiene al fijar la coordenada  $z$  en la ecuación 1.33. Los colores indican la intensidad del campo normalizado, mientras que las flechas indican la polarización. En la figura es posible observar singularidades en polarización [38], es decir puntos sobre los cuales la orientación del campo eléctrica no esta bien definida.

En [39] S. Hacyan y R. Jáuregui prueban que los haces Bessel vectoriales modelados por la ecuación 1.33 exhiben efecto Faraday cuando los haces se encuentran en presencia de un campo magnético externo y se propagan por un medio girotrópico. Sin embargo este fenómeno no descansa en la estructura particular de los haces de Bessel. La misma descripción del efecto Faraday se puede realizar con cualquier tipo de haz invariante vectorial generalizado a través de la ecuación 1.33 (ver apéndice “Efecto Faraday”). En [40] se muestra un experimento donde

Haz	Sistema Coordenado	Coordenadas	$\partial_x \pm i\partial_y$
Ondas Planas	Cartesiano	$x$ $y$	$\partial_x \pm i\partial_y$
Bessel	Cilíndrico	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$	$e^{\pm i\theta} (\partial_r \pm \frac{i}{r} \partial_\theta)$
Mathieu	Elíptico cilíndrico	$x = h \cosh \xi \cos \eta$ $y = h \sinh \xi \sin \eta$	$\frac{csch(\xi \mp i\eta)}{h} (\partial_\xi \pm i\partial_\eta)$
Parabólico	Parabólico cilíndrico	$x = (u^2 - v^2)/2$ $y = uv$	$\frac{u \pm iv}{u^2 + v^2} (\partial_u \pm i\partial_v)$

**Cuadro 1.1:** En esta tabla se muestran las 4 familias de haces adifraccionales, y como se transforma el operador diferencial con el cual se obtiene la propagación en el medio

se produce efecto Faraday en un gas atómico. La rotación en ese experimento es cuatro órdenes de magnitud más grande que la que se produciría en cristales, por ello existe la posibilidad de hacer magnetometría con gases atómicos. Queda la duda de si el uso de haces vectoriales podría incrementar el efecto, y que se pudiesen utilizar para detectar inhomogeneidades en el campo magnético.



**Figura 1.7:** Haz de Mathieu vectorial par de orden  $m = 1$ ,  $q = 2$ . El color en la figura indica la intensidad del campo, y las flechas la orientación de la polarización. Al igual que en las singularidades de fase, la singularidad en polarización se ubica en los ceros del campo.

# Capítulo 2

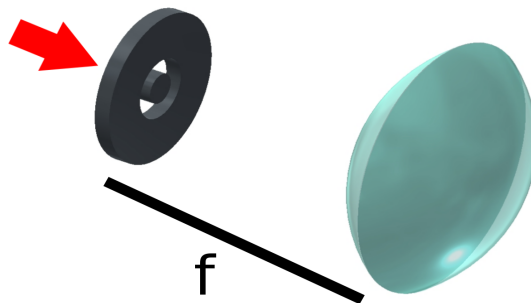
## Generación de Haces de Mathieu

En este capítulo se describe la generación experimental de haces de Mathieu mediante un modulador espacial de luz (SLM). El capítulo comienza con una explicación del método aquí usado para la generación de haces invariantes. El método es una generalización del método de Durnin [20] para producir un haz Bessel de orden cero. Además se ilustra el funcionamiento de un SLM; se detalla el arreglo experimental para producir haces de Mathieu; y se muestra como el arreglo puede ser usado para caracterizar la luz y los elementos ópticos utilizados.

### 2.1. Generación de un haz Bessel de orden cero

La primera realización experimental de un haz invariante, se dio con Durnin [20], al producir haces de Bessel de orden cero. En este capítulo se describe una forma de generar haces de Mathieu, y tal forma es una generalización directa del método de Durnin. El método para producir haces de Mathieu aquí descrito se tomó de [41]. Sin embargo, tal método es aplicable para cualquier tipo de haz invariante.

El espectro angular (transformada de Fourier transversal, en 3.15 se explicará con más detalle) de todo haz adifraccional se encuentra contenido en un anillo, véase la ecuación 1.12. En consecuencia, si se produce luz con la forma de un anillo, y una distribución angular de intensidades igual a la de un haz invariante, entonces basta hacer una transformada de Fourier a la luz para conseguir el haz invariante deseado. A modo didáctico, introduzco el experimento de Durnin para producir haces Bessel de orden cero. El sistema se ilustra en la figura 2.1.



**Figura 2.1:** Arreglo experimental para producir un haz Bessel de orden cero [20]. Sobre el filtro anular incide una onda plana. El filtro solo permite el paso de luz sobre un anillo. El anillo de luz experimenta una transformada de Fourier por la lente. En el plano focal de la lente se produce un haz Bessel de orden cero.

El espectro angular de un haz Bessel de orden cero es un anillo donde cada punto tiene

la misma intensidad. Por ello, para producir tal haz se puede usar una onda plana, y hacerla pasar por un filtro anular, es decir un obstáculo con forma de anillo, y después realizar una transformada de Fourier del haz. La transformada de Fourier se consigue al pasar el haz por una lente. Dado que se busca efectuar una transformada de Fourier sobre el anillo de luz, se coloca una lente de forma tal que el plano focal anterior de la lente coincida con el plano donde se encuentra el filtro. Finalmente, el haz adifraccional se forma en el plano focal posterior de la lente.

Para generar otros tipos de haces adifraccionales, se pueden usar variaciones del método anterior. La diferencia radica en preparar luz con una distribución de intensidades igual a la del espectro angular del haz invariante deseado. La forma de anillo se puede inducir al hacer pasar la luz por un filtro. Para dar la estructura del haz invariante se suelen utilizar moduladores espaciales de luz [42] u hologramas [43]. En este trabajo se utilizó un SLM.

Si el filtro se iluminase con una onda plana, el grosor del filtro en principio podría ser infinitesimal, pues el espectro angular del haz sería un anillo sin grosor. De forma realista, los láseres que se utilizan para producir los haces tienen un perfil Gaussiano. El intercambio de una onda plana por un haz Gaussiano impide la producción de haces invariantes ideales. En la sección (1.2) se escribió acerca de los haces Helmholtz-Gauss, este tipo de haces son aquellos que pueden ser generados experimentalmente. En los haces Helmholtz-Gauss, el espectro angular es un anillo que decae como una curva Gaussiana de forma radial. Es decir, se induce un grosor en el espectro angular, y por ello se requieren filtros anulares con grosor. A nivel experimental una lente produce una transformada de Fourier, en la cual las coordenadas en el espacio de Fourier se escalan por un factor  $2\pi/f\lambda$  con  $f$  la distancia focal de la lente y  $\lambda$  la longitud de onda [26]. En el primer capítulo se probó que el espectro angular de haz Helmholtz-Gauss tiene un radio de  $k_t$  y un grosor de  $4/\omega$ . Por ello, una lente produce anillos de radio  $k_t f \lambda / 2\pi$  y grosor  $2f\lambda/\omega\pi$ .

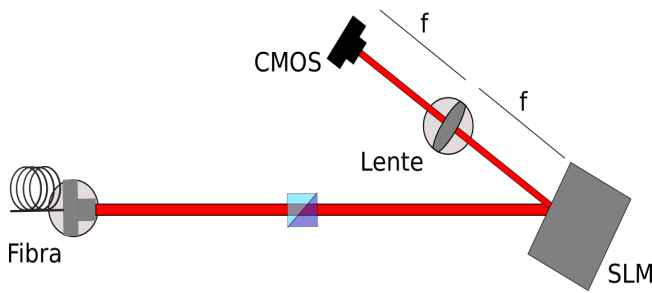
## 2.2. Modulador Espacial de Luz

El modulador espacial de luz, o SLM por sus siglas en inglés es un dispositivo cuyo propósito es cambiar la fase de la luz incidente. El SLM usado en este trabajo Hamamatsu LCOS-SLM X10468 es de reflexión, y está conformado por una pantalla de cristal líquido. Cada píxel de la pantalla tiene dos electrodos en forma de placas. Entre las placas se encuentran cristales líquidos birrefringentes en forma de elipsoides. Los ejes longitudinal y transversal de los cristales tienen distintos índices de refracción. Cuando se aplica un voltaje entre las placas, los cristales cambian su alineación, y con ello se cambia el índice de refracción de dicho píxel. Al regular el índice de refracción, es entonces posible controlar la fase de la luz que incide sobre dicho píxel. Para un análisis extenso sobre el tema se recomienda [44].

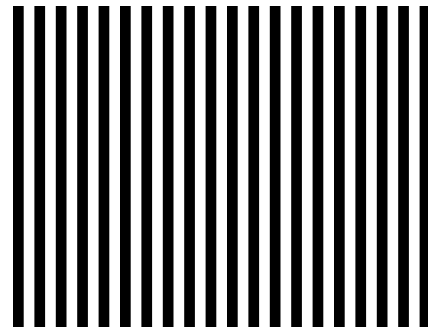
Como datos de entrada al SLM se le suministra la fase en cada píxel. En concreto, al SLM se le envían imágenes en escala de grises. Cada tono de gris representa una fase. El SLM usado utiliza imágenes de 8-bits, es decir la escala de grises se codifica en  $2^8 = 256$  tonos. Cada tono se identifica con un número entero entre 0 y 255. Sin embargo, no todos los tonos se utilizan en las imágenes enviadas al SLM, pues a partir de un valor en el tono digamos  $n$ , los tonos son equivalentes para el SLM. Es decir, para el SLM representa el mismo cambio de fase un píxel de la imagen enviada con un valor de  $m$  que uno con  $n + m$ . En consecuencia, las imágenes que se envíen al SLM es suficiente que sus píxeles tomen valores en el rango  $[0, n]$ .

El valor  $n$  depende de la longitud de onda a utilizar, en este trabajo se utiliza un láser de 776 nm. Para encontrar el número  $n$  se utilizó software desarrollado por Santiago Hernández [45] del grupo de Átomos Fríos del ICN. En la figura 2.2 se muestra el arreglo experimental para encontrar el número  $n$ .

Para calibrar el SLM se envía una imagen de muestra que actúa como una rejilla de difracción. La imagen de calibración es una serie de franjas oscuras y claras, ver figura 2.3. En la

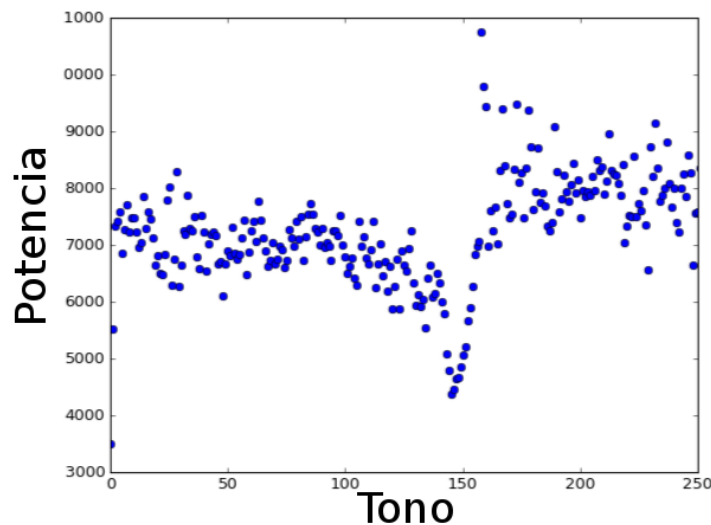


**Figura 2.2:** Se muestra el arreglo experimental para calibrar. El SLM opera con luz horizontalmente polarizada, por ello se coloca un divisor de haz polarizante antes del SLM. La imagen de calibración hace funcionar al SLM como una rejilla de difracción. El patrón de difracción es fotografiado y analizado.



**Figura 2.3:** Imagen de calibración en forma de franjas claras y oscuras. La imagen actúa como una rejilla de difracción.

figura 2.2 la lente transforma la luz modulada por el SLM en un patrón de intensidades. El patrón de intensidades corresponde con el patrón de difracción de una placa de varias rendijas, por ello el patrón exhibe ordenes de difracción, y cada orden toma la forma de una función  $\text{sinc}(r)$ .



**Figura 2.4:** Curva de calibración del SLM. El eje vertical es la suma de los valores de los píxeles en una región cuadrada alrededor del orden de difracción 1, y el eje horizontal representa el cambio de tono en las franjas claras de la imagen de calibración. El segundo mínimo en la potencia se corresponde con el número  $n$  buscado.

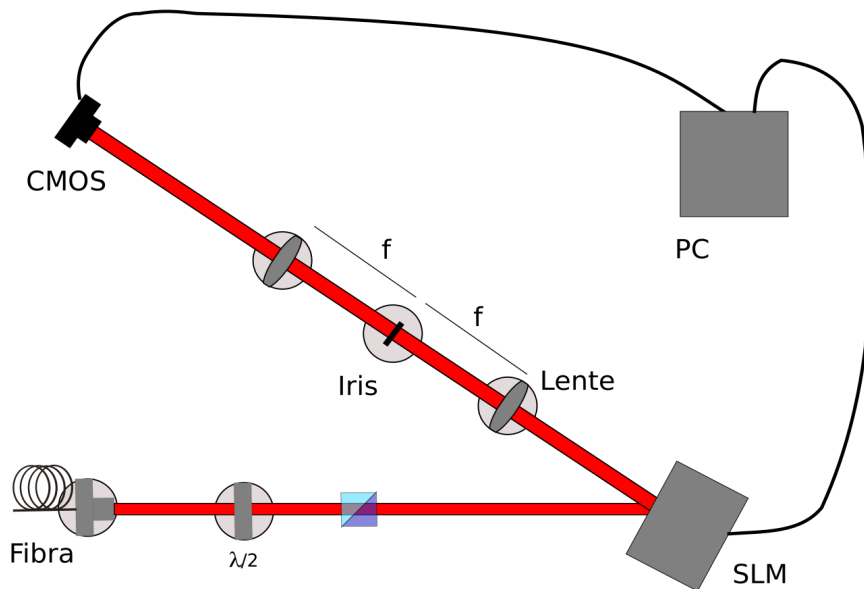
El procedimiento de calibración consiste en medir la potencia de un orden de difracción con distintas imágenes de calibración (figura 2.3). La diferencia entre las distintas imágenes de calibraciones es un cambio en una unidad de tono en el tono de las franjas claras. La primera imagen de calibración enviada es una imagen totalmente negra, es decir todos los píxeles tienen el tono negro representado por el entero 0; en la segunda imagen de calibración se forman franjas oscuras y claras, las franjas oscuras tienen un tono dado por el entero 0 y las claras por el entero 1; en la  $p$ -ésima imagen de calibración se tienen franjas oscuras y claras, las franjas oscuras tienen el tono dado por el entero 0 y las claras por el entero  $p$ .



El patrón de difracción producido por cada imagen de calibración es almacenado en una fotografía. En cada fotografía se mide la potencia del orden de difracción 1 al realizar una suma sobre los valores de los píxeles en una región cuadrada que enmarque al orden 1. Dado que para el SLM existe un tono que representa el mismo cambio de fase, entonces se espera que la potencia se comporte de forma periódica respecto al tono de las franjas claras. En la gráfica 2.4 se presenta la potencia del orden de difracción 1 contra el tono de las franjas claras. El periodo es el valor  $n$  buscado. Para luz de 776 nm se obtuvo  $n = 145$ .

## 2.3. Arreglo Experimental

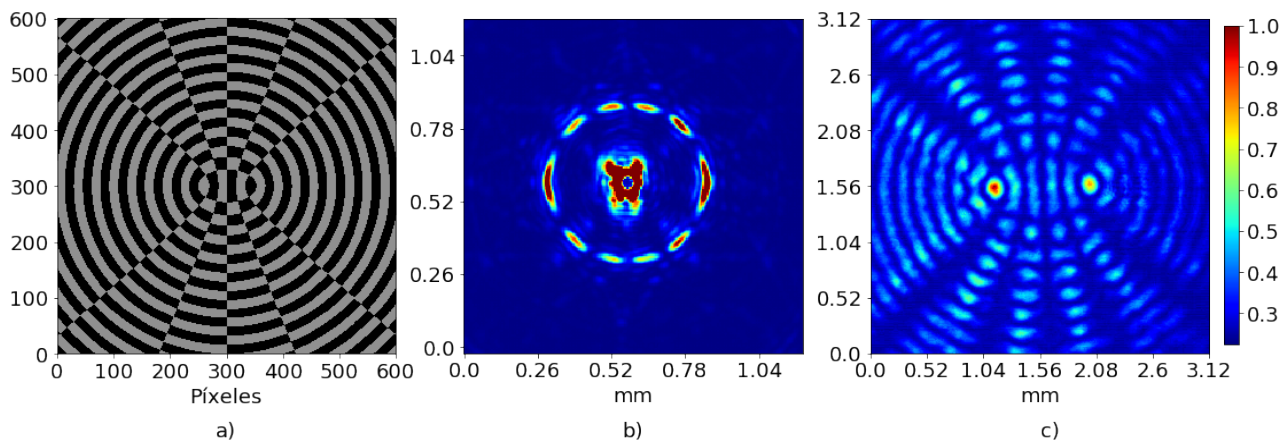
Con el SLM se puede dotar a un haz Gaussiano con la fase de un haz de Mathieu. La transformada de Fourier de este híbrido en el plano transversal a su propagación, es similar al espectro angular de un haz de Mathieu. La semejanza entre la transformada de Fourier, y el espectro angular se puede acrecentar al hacer pasar la transformada de Fourier por un filtro anular. Ya con el espectro angular se vuelve a efectuar una transformada de Fourier, logrando así un haz Helmholtz-Gauss. De forma experimental, la idea anterior queda plasmada en el arreglo 2.5.



**Figura 2.5:** Arreglo para la generación de haces de Mathieu. En el arreglo se generaliza la idea de Durnin para generar haces Bessel de orden 0 [20]. Con el SLM se imprime la fase de un haz de Mathieu. La luz es llevada a su espacio de Fourier por una lente. En el plano focal de la lente se coloca un iris para filtrar las frecuencias espaciales que no se encuentran en un haz de Mathieu. La luz regresa al espacio de configuraciones con una segunda lente, y al regresar ya se asemeja a un haz de Mathieu.

La fibra óptica conduce luz láser de 776 nm. El SLM opera con luz linealmente polarizada en la dirección horizontal, y es por ello que se coloca una placa  $\lambda/2$  y un cubo divisor de haz polarizante para asegurar que sobre el SLM solo incida luz con la polarización adecuada. El plano horizontal es el plano del montaje experimental. Para controlar al SLM se le envían imágenes a través de la computadora. Las imágenes reciben el nombre de máscaras de fase. Las máscaras aquí usadas son imágenes de  $792 \times 600$  píxeles ó de  $800 \times 600$ , generadas al calcular la fase de un haz de Mathieu. Cada píxel equivale a  $2 \mu\text{m}$ . La primera lente funciona como una transformada de Fourier que produce un patrón de intensidades parecido a un anillo. Se coloca un iris para filtrar la luz. La segunda lente efectúa otra transformada de Fourier para regresar el haz al espacio de posiciones. La forma de los haces es capturada con la cámara.

En la figura 2.6 se muestra una máscara de fase un haz de Mathieu par de orden 5 con un vector transversal  $k_{\perp} = 10 \text{ mm}^{-1}$ , la transformada de Fourier del haz que produce la máscara, y el haz de Mathieu resultante. La máscara de fase de la figura 2.6 a) es un ejemplo de una sección de las máscaras de fase enviadas al SLM. Las regiones en negro representan zonas en las que el haz tiene una fase 0, y las regiones en gris son zonas con fase  $\pi$ . La figura 2.6 b) fue tomada al colocar la cámara CMOS en el lugar del iris. En esta imagen se observa la utilidad de un filtro anular, pues el anillo es la única región que debería pasar tras filtrar la luz. La intensidad en el anillo es proporcional a  $ce_5(\theta)$  (véase la sección (1.3)) con  $\theta$  un ángulo polar cuyo eje tiene origen en el centro del anillo. El anillo tiene 10 zonas oscuras pues  $ce_5(\theta)$  tiene 10 ceros en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . La figura 2.6 c) es el haz de Mathieu resultante. Este haz está descrito por  $ASe_5(\xi)se_5(\eta)$  (véase la ecuación 1.17) con  $\xi, \eta$  en coordenadas elípticas cilíndricas. La constante  $A$  indica la intensidad del haz. La geometría elíptica del haz viene del factor  $Se_5(\xi)$  y la geometría hiperbólica de  $se_5(\eta)$ .



**Figura 2.6:** La figura a) muestra una máscara de fase de un haz par de orden 5, y vector  $k_{\perp} = 10 \text{ mm}^{-1}$ . Esta máscara es enviada al SLM. La máscara está ajustada a la calibración del SLM. La figura b) muestra el espectro angular producido por la máscara de la figura a), como se puede ver el espectro se parece a un anillo, las estructuras fuera del anillo son removidas con el iris. En el interior del anillo también hay estructura que debería ser removida. En el centro del anillo se observa luz no modulada por el SLM. En la figura c) se muestra el haz de Mathieu resultante al filtrar la luz en la imagen b). Las figuras b) y c) se encuentran graduadas por una escala de color. Ambas imágenes fueron normalizadas de forma independiente, por ello un mismo tono en dichas imágenes no se corresponde con la misma potencia. Sin embargo la escala de color permite conocer los cambios relativos de intensidad en cada imagen.

Para producir distintas máscaras de fase se escribió un programa para el control del SLM. Con el programa es posible generar los tres tipos de haces de Mathieu: par, impar y helicoidales. Con el programa se controla el orden del haz  $m$ , la separación entre los focos de las elipses del haz  $h$ , y el parámetro de elipticidad  $q$ .

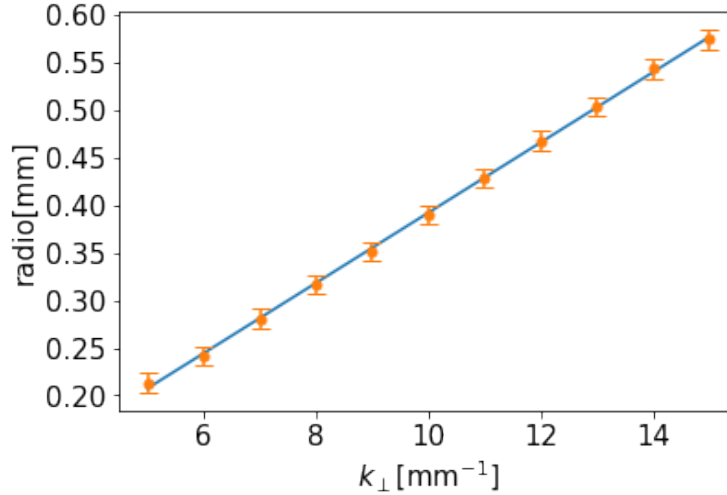
## 2.4. Caracterización del arreglo experimental

El tamaño del radio exterior de los anillos en el espacio de Fourier de los haces de Mathieu (como aquel en la figura 2.6 b)) se encuentra dado por:

$$r = k_{\perp} f \lambda / 2\pi + f \lambda / \omega \pi, \quad (2.1)$$

el origen de esta fórmula se describió al final de la sección (2.1). Para verificar la validez de tal fórmula se tomaron fotografías de anillos de un haz par de orden 5 pero con diferentes

vectores transversales de propagación  $k_{\perp}$ . El radio exterior de los anillos fue medido en las fotografías y se encontró que los radios medidos y calculados diferían. La diferencia entre radio medido y calculado ocurre ya que la distancia focal de la lente se tomó como la distancia focal nominal proporcionada por el fabricante de la lente, en nuestro caso 300 mm. Para encontrar la distancia focal de la lente, y asegurar que el comportamiento del radio de los anillos va como en la ecuación 2.1, se realizó un ajuste lineal del radio contra el vector transversal de propagación. El ajuste se puede ver en la figura 2.7.



**Figura 2.7:** Se muestra un ajuste lineal al radio exterior de los anillos como función del vector transversal de propagación  $k_{\perp}$ . El ajuste lineal permite obtener la distancia focal de la lente, y la cintura Gaussiana del haz. La incertidumbre en el radio se tomó como un error con un tamaño de dos píxeles. Las fotografías de los anillos fueron tomadas con una cámara CMOS, donde cada píxel mide  $5.2 \mu\text{m}$ .

La pendiente de la recta del ajuste vale  $f\lambda/2\pi$ , dado que se conoce la longitud de onda es posible calcular la distancia focal  $f$ , obteniendo así  $f = 299.128 \pm 0.003 \text{ mm}$ . La ordenada al origen está dada por  $f\lambda/\omega\pi$  con la cual se obtiene una cintura  $\omega = 3.256 \pm 0.003 \text{ mm}$ . La cintura del haz fue medida de forma independiente al tomar una fotografía del haz sin estructura, y ajustarle una curva Gaussiana. En esta fotografía la cámara se ubicó en la posición de la primera lente en el arreglo 2.6. Con el ajuste Gaussiano se obtuvo una cintura de  $3.32 \pm 0.65 \text{ mm}$ , lo cual concuerda con el valor deducido del ajuste de los radios de los anillos.

# Capítulo 3

## Propagación de los haces

En este capítulo se busca conocer la forma que tendrán los haces generados experimentalmente conforme estos se propagan. La propagación de haces Helmholtz-Gauss fue totalmente descrita por Gutiérrez en [27], sin embargo los haces generados en el laboratorio son sólo una aproximación a los haces Helmholtz-Gauss, ya que no se está modulando la intensidad para generar los haces, y se está usando un iris en vez de un filtro anular. Con el fin de guiar y entender los experimentos realizados con los haces de Mathieu se realizaron simulaciones numéricas que describen la propagación de los haces experimentalmente generados al seguir un arreglo como el de la figura 2.5.

El capítulo inicia describiendo las simulaciones numéricas, se menciona la forma de aproximar transformadas de Fourier, se da un breve repaso de óptica de Fourier, y con ello se explican las simulaciones. Finalmente se describe un método para la detección de vórtices en haces helicoidales.

### 3.1. Simulación de haces escalares

La simulación de los haces se realiza mediante óptica de Fourier, y toma en cuenta los elementos del arreglo 2.5. La simulación comienza cuando la luz ha incidido sobre el SLM. Se asume un haz de entrada Gaussiano, con una función escalar  $\Psi = Ie^{-r^2/\omega^2}$ , donde  $I$  es una constante que determina la intensidad del haz,  $r$  es la coordenada radial transversal del haz, y  $\omega$  la cintura del haz. El SLM tiene el efecto de introducir una fase de forma puntual, por ello el modulador se simula al añadir una fase  $\phi(x, y)$  a  $\Psi$ . Las coordenadas  $x, y$  se refieren a un plano transversal al haz, con origen en el centro del haz. El SLM refleja la luz que incide sobre él, sin embargo no toda la luz es modulada, ya que una parte de la luz es reflejada antes de que el SLM cambie su fase. Las simulaciones sólo toman en cuenta la luz modulada. Dicha luz adquiere la forma  $e^{-r^2/\omega^2 + i\phi(x, y)}$ . La fase  $\phi(x, y)$  es de un haz de Mathieu ideal. La simulación se dividió en tres regiones cada región está determinada por los elementos que se encuentra la luz a su paso. La primera región va del SLM al iris, y toma en cuenta la lente entre el SLM y el iris; la segunda región va del iris a la segunda lente, y la tercer región va de la segunda lente al punto en el que se quiera conocer la forma del campo. La razón para introducir tres regiones es que cada región puede ser simulada al utilizar una transformada de Fourier. Antes de proseguir, introduzco la forma en la que en este trabajo se aproximan las transformadas de Fourier.

### 3.1.1. Aproximación de la transformada de Fourier por transformadas discretas

Dado que se realizarán simulaciones numéricas es relevante contar con una aproximación a la transformada de Fourier de una función  $f$ . La representación de  $f$  en una computadora es una colección de puntos  $\{\vec{x}_n\}$ , que se relacionan con un conjunto  $\{f(\vec{x}_n)\}$ . La colección de puntos  $\vec{x}_n$  se ordena con una etiqueta  $n$ . Si  $\{\vec{x}_n\}$  representa puntos en una dimensión,  $n$  es un entero, y los puntos se suelen ordenar como  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ . En dos dimensiones el espacio se representa por una matriz, y en este caso  $n$  es una pareja de enteros  $n = (a, b)$ . Los enteros  $a, b$  indican la posición en la matriz, la cual a su vez es una discretización del espacio. De forma análoga se procede con dimensiones superiores.

Dado que  $f$  se ha representado como un conjunto discreto, no es posible obtener una transformada de Fourier de  $f$  ó CFT (Continuous Fourier Transform). Sin embargo, se puede usar un análogo discreto de la transformada de Fourier DFT (Discrete Fourier Transform). En una dimensión, y para un conjunto de  $N$  datos  $x_n$  se define como:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i k \frac{n}{N}} x_n. \quad (3.1)$$

Una CFT puede aproximarse por medio de una DFT. Supongamos que se conoce  $f(x_n)$  donde  $\{x_n\}$  es un conjunto discreto de puntos equidistantes. La distancia entre cada punto es de  $1/F_s$ .  $F_s$  se conoce como la frecuencia de muestreo. Con lo cual:

$$\mathfrak{F}[f](K = \frac{k}{N}F_s) \approx \frac{1}{F_s} e^{2\pi i K x_0} F[k], \quad (3.2)$$

donde  $\mathfrak{F}[f]$  es la transformada de Fourier de  $f$ . La notación  $\mathfrak{F}[f](K = \frac{k}{N}F_s)$  representa la transformada de Fourier de  $f$  en el punto  $K = \frac{k}{N}F_s$ . Y  $F[k]$  es el  $k$ -ésimo elemento de la DFT de  $f(x_n)$ .

La aproximación anterior no permite tener un control en la precisión de la transformada una vez que la cantidad de puntos en el arreglo a transformar ha sido fijada. Al aproximar una CFT por una DFT se carece de control sobre la región en el espacio de Fourier en la que se ha transformado el arreglo original. Formalmente, si se conoce una función  $h$  en el intervalo  $[-a, a]$ , y se discretiza la función en  $m$  puntos, entonces la transformada de Fourier discreta de  $h$  representará al intervalo de puntos  $[-m/4a, m/4a]$  en el espacio de Fourier. Por lo tanto, la región en el espacio de Fourier crece con la cantidad de puntos  $m$ , sin embargo la DFT también tiene  $m$  elementos, por ello la resolución (cantidad de puntos por unidad de longitud) en el espacio de Fourier guarda una relación inversamente proporcional con el número de puntos  $m$ .

Como alternativa se puede aproximar una CFT a través de transformadas de Fourier fraccionales FrFT [46]. La transformada para un conjunto de  $N$  datos  $x_n$  está definida como:

$$G_k[x, \alpha] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i n k \alpha} x_n, \quad (3.3)$$

la FrFt es una generalización de la DFT. El parámetro  $\alpha$  es un número complejo, y en el caso de que  $\alpha = 1/N$  la FrFT se reduce a la DFT.

En [46] se propone utilizar la FrFT como una aproximación de la transformada de Fourier de una función  $f(x)$  cuando se conoce una discretización de  $m$  puntos de dicha función en el intervalo  $[-a/2, a/2]$ . Y los puntos en los cuales se conoce  $f$  de forma discreta, tienen la forma  $x_j = (j - m/2)\beta$  con  $\beta = a/m$ . Con tales condiciones la CFT se aproxima como:

$$\mathfrak{F}[f](K_n) \approx \beta e^{i\pi(n-N/2)N\delta} G_n[f(x_j) e^{i\pi j m \delta}, \delta], \quad (3.4)$$

donde  $K_n$  son puntos en el espacio de Fourier, y  $K_n = (n - m/2)\gamma$ . Donde  $\gamma$  es un parámetro libre, y por lo tanto puede seleccionarse para concentrarse en un intervalo específico del espacio de Fourier. El parámetro  $\delta$  se define como  $\delta = \beta\gamma$ , y es un parámetro adimensional que relaciona el ancho de la región del espacio de configuraciones a transformar con el ancho de la región del espacio de Fourier representada por la transformada. La FrFT puede ser calculada de forma eficiente por dos DFT vía dos FFT (Fast Fourier Transform). Aproximar la CFT por FrFT es conveniente, pues la introducción del parámetro  $\gamma$  trae asociada una mejor precisión, y la libertad de escoger la región del espacio de Fourier a aproximar [46].

En este trabajo se requiere de realizar transformadas de Fourier en dos dimensiones, pues se realizan transformadas de imágenes. Afortunadamente, la FrFT se puede generalizar a  $n$  dimensiones con relativa sencillez. A continuación, muestro como: generalizar a dos dimensiones, calcular la FrFT de dos dimensiones con DFT de dos dimensiones, y aproximar la CFT de dos dimensiones.

Defino la FrFT-2D como:

$$G_{k_1, k_2}[x; \alpha_1, \alpha_2] = \sum_{j_2=0}^{N_2-1} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} x_{j_1, j_2} e^{-2\pi i j_1 k_1 \alpha_1} e^{-2\pi i j_2 k_2 \alpha_2}, \quad (3.5)$$

con  $x$  una matriz. Para calcular la FrFT-2D de forma eficiente se utilizan dos matrices auxiliares  $y$  y  $z$ . Cada una de estas matrices tienen un tamaño  $2N_1 \times 2N_2$ , es decir el doble del tamaño en cada una de las dos direcciones de  $x$ . Ambas matrices son una generalización de los arreglos unidimensionales que se usan para calcular la FrFT. Al igual que los arreglos del caso unidimensional, las matrices se construyen para satisfacer las condiciones de una convolución circular de DFT (véase [47]). Se define  $y$  como:

$$y_{j_1, j_2} = \begin{cases} x_{j_1, j_2} e^{-i\pi(j_1^2 \alpha_1 + j_2^2 \alpha_2)} & \text{si } 0 \leq j_1 < N_1 \text{ y } 0 \leq j_2 < N_2, \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad (3.6)$$

la matriz  $z$  se define como:

$$z_{j_1, j_2} = \begin{cases} e^{i\pi(j_1^2 \alpha_1 + j_2^2 \alpha_2)} & \text{si } 0 \leq j_1 < N_1 \text{ y } 0 \leq j_2 < N_2 \\ e^{i\pi[(j_1 - 2N_1)^2 \alpha_1 + j_2^2 \alpha_2]} & \text{si } N_1 \leq j_1 < 2N_1 \text{ y } 0 \leq j_2 < N_2 \\ e^{i\pi[j_1^2 \alpha_1 + (j_2 - 2N_2)^2 \alpha_2]} & \text{si } 0 \leq j_1 < N_1 \text{ y } N_2 \leq j_2 < 2N_2 \\ e^{i\pi[(j_1 - 2N_1)^2 \alpha_1 + (j_2 - 2N_2)^2 \alpha_2]} & \text{si } N_1 \leq j_1 < 2N_1 \text{ y } N_2 \leq j_2 < 2N_2 \end{cases}, \quad (3.7)$$

con las matrices anteriores la FrFT-2D se calcula como:

$$G_{k_1, k_2}[x; \alpha_1, \alpha_2] = e^{-\pi i k_1^2 \alpha_1} e^{-\pi i k_2^2 \alpha_2} F^{-1}[F[y]F[z]], \quad (3.8)$$

donde  $F[\cdot]$  es la DFT-2D, el producto  $F[y]F[z]$  es punto a punto. El lado derecho de la ecuación 3.8 excede las dimensiones de  $G_{k_1, k_2}[x; \alpha_1, \alpha_2]$ , sin embargo la igualdad se da en los puntos en los cuales:  $0 \leq k_1 < N_1$  y  $0 \leq k_2 < N_2$ .

Ahora bien sea  $f$  una función  $f(x^1, x^2)$  con  $x^i$  un número real donde su rango es  $[-a_i/2, a_i/2]$ , y se ha discretizado por  $x_j^i = (j - N_i/2)\beta_i$  con  $\beta_i = a_i/N_i$ , y  $N_i$  la cantidad de puntos de la discretización. Entonces la CFT de  $f$  se puede aproximar por una FrFT-2D a través de:

$$\mathfrak{F}[f](K_{n_1}^1, K_{n_2}^2) \approx \beta_1 \beta_2 e^{i\pi(n_1 - N_1/2)N_1 \delta_1} e^{i\pi(n_2 - N_2/2)N_2 \delta_2} G_{n_1, n_2}[f(x_{j_1}^1, x_{j_2}^2) e^{i\pi j_1 N_1 \delta_1} e^{i\pi j_2 N_2 \delta_2}; \delta_1, \delta_2], \quad (3.9)$$

con  $K_{n_i}^i = (n_i - N_i/2)\gamma_i$ , y  $\delta_i = \beta_i \gamma_i$ .

### 3.1.2. Óptica de Fourier

Esta sección introduce la teoría necesaria para producir las simulaciones numéricas. Se comienza escribiendo acerca de la difracción de luz por un objeto, pues en este trabajo para producir haces de Mathieu, la luz atraviesa un iris. Y por tanto experimenta difracción. Se introduce el espectro angular  $A$  la cual es una función útil para describir la propagación de los haces en vacío. El arreglo experimental 2.5 también hace uso de lentes, el efecto de una lente sobre un haz también es tratado.

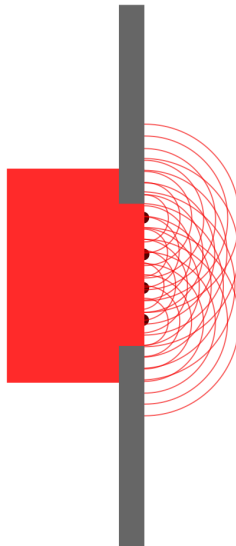
Cada una de las componentes del campo eléctrico en el vacío satisface la ecuación de onda. De aquí en adelante se estudiará una onda electromagnética de forma escalar. Es decir, se estudiará una función  $u(x, y, z, t)$  que satisfaga la ecuación de onda con las condiciones de frontera que obedece el campo. Por otro lado, si se asume que  $u$  es de la forma  $u = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ , con  $\omega$  la frecuencia de la onda, la ecuación de onda se convierte en la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0, \quad (3.10)$$

donde  $k = 2\pi\lambda^{-1}$  y  $\lambda$  la longitud de onda.

#### Difracción por un obstáculo

Cuando luz incide sobre un objeto se produce un patrón que está determinado por la forma del objeto, este fenómeno es conocido como difracción. Para notarlo, basta observar la sombra de un objeto iluminado. La difracción es una consecuencia de la interferencia entre las porciones de luz que logran sortear el objeto. Para predecir el patrón de difracción se utiliza el principio de Huygens-Fresnel, el cual dice que todo punto en un frente de onda, actúa como una fuente secundaria de ondas esféricas.



**Figura 3.1:** Principio Huygens-Fresnel. La luz incide sobre un objeto que bloquea su paso. Cada punto no obstruido en el plano del objeto obstructor es una fuente de ondas de esféricas.

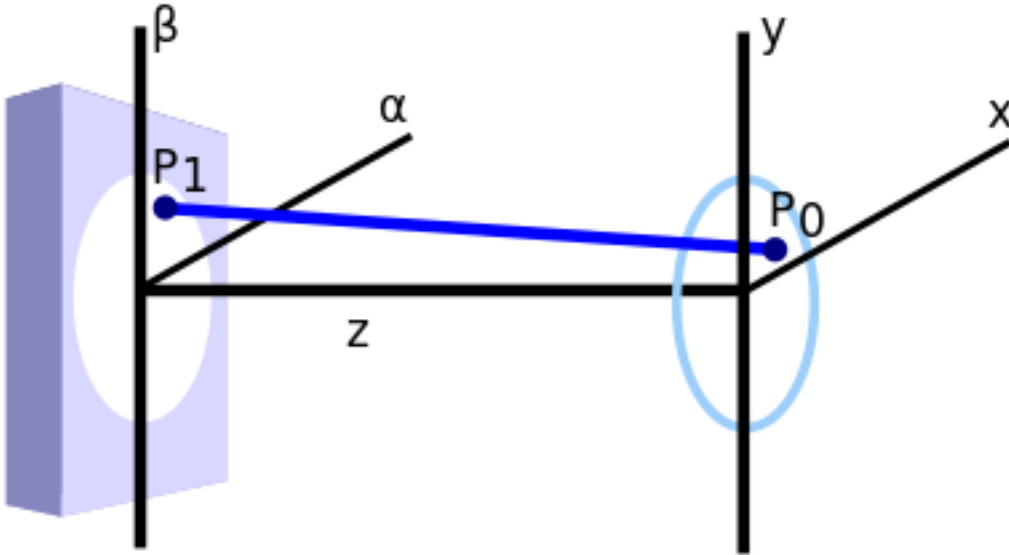
En la figura 3.1, se muestra de forma esquemática el principio Huygens-Fresnel. Si se supone ahora un obstáculo bidimensional como aquel en la figura 3.2, el campo sobre un punto  $P_0$  en un plano diferente al plano del obstáculo se encuentra dado por:

$$U(P_0) = \int \int_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr}}{r} ds, \quad (3.11)$$

la integral se realiza sobre la superficie  $\Sigma$  del objeto que permite el paso de la luz, y  $r$  es la distancia entre el punto  $P_1$  en el plano de integración y  $P_0$ . Sin embargo, la integral 3.11 no reproduce resultados experimentales. Lo cual conduce a modificar el principio de Huygens-Fresnel. Nótese que si el principio de Huygens-Fresnel fuese cierto de la forma en la que lo he enunciado, entonces las ondas secundarias se propagarían en todas las direcciones, y por ello las ondas secundarias también emitirían luz en la dirección inversa a la de propagación. Dicho fenómeno no se observa en la naturaleza. Para corregir ese defecto, se introduce una función que regula la intensidad de las ondas secundarias de acuerdo a su dirección [26].

$$U(P_0) = \frac{z}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr}}{r} \cos\theta ds, \quad (3.12)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector normal a la superficie del objeto y la dirección de  $r$ . La ecuación 3.12 pueden ser obtenida de forma rigurosa, al encontrar un propagador para la función de onda. Para facilitar el cálculo de la integral 3.12, se aproxima que la distancia entre obstáculo y plano de observación es mucho más grande que la distancia entre el punto observado y centro del plano de observación  $z \gg x^2 + y^2$ , véase la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Difracción por un objeto. En el frente de onda que deja pasar el objeto cada punto es una onda esférica secundaria. En la figura se muestra la contribución de la onda secundaria con origen el punto  $P_1$  sobre el punto  $P_0$ . Las coordenadas en el plano del objeto son  $\alpha, \beta$ , y las coordenadas en el plano de observación son  $x, y$ .

La cual conduce a la aproximación:

$$r \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \alpha}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - \beta}{z} \right)^2 \right], \quad (3.13)$$

con lo cual:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int \int_{-\infty}^{\infty} [U(\alpha, \beta) e^{\frac{ik}{2z}(\alpha^2+\beta^2)}] e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\alpha+y\beta)} d\alpha d\beta. \quad (3.14)$$

### Espectro Angular

Una manera alternativa de lidiar con la difracción y propagación de una onda es analizar desde el espacio de Fourier de la onda. Esta alternativa puede simplificar las ecuaciones de



propagación. El objetivo de este método es encontrar como cambia la onda en el espacio de Fourier conforme la onda se propaga. Con este fin se define el espectro angular de un frente de onda  $U(x, y, z)$  como:

$$A(f_X, f_Y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-i2\pi(f_X x + f_Y y)} dx dy, \quad (3.15)$$

en el capítulo 1 se muestra que la elección de distintos espectros angulares  $A$  da origen a las distintas familias de haces invariantes. En todos los haces invariantes el espectro angular es un anillo.

Para obtener  $U$  a partir de  $A$  se requiere realizar una transformada de Fourier inversa. Dado que  $U$  satisface la ecuación de Helmholtz 3.10, entonces  $A$  obedece la ecuación de Helmholtz en su componente de propagación  $z$ :

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \lambda^2(f_X^2 + f_Y^2))A = 0, \quad (3.16)$$

con lo cual:

$$A = A(f_X, f_Y, 0) e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \sqrt{1 - \lambda^2(f_X^2 + f_Y^2)} z}. \quad (3.17)$$

En óptica de Fourier se asume que  $\lambda f_X \ll 1$  y  $\lambda f_Y \ll 1$ , esta aproximación nos dice que la propagación principalmente se produce en la dirección del eje  $z$ . Es decir, si el vector de propagación  $k$  se separa en sus componentes transversales  $k_t$  y longitudinales  $k_z$ , entonces  $k_z \gg k_t$ , esta aproximación se conoce como la aproximación paraxial. Con lo cual  $A$  toma la forma:

$$A \approx A(f_X, f_Y, 0) e^{-i\pi\lambda z(f_X^2 + f_Y^2)}, \quad (3.18)$$

donde se eliminó una fase global. Esto dice que la propagación en el vacío tiene el efecto de introducir una fase en el espacio de Fourier de la onda.

## Lentes

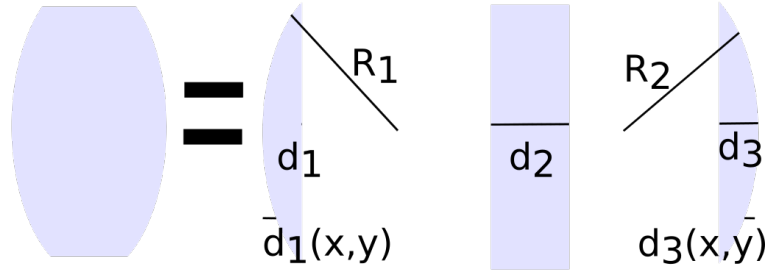
Una lente es un objeto con un índice de refracción diferente al medio en el cual se encuentra inmerso. Cuando una onda atraviesa un medio con un índice de refracción  $n$  experimenta un desfase con relación a la fase que tenía antes de entrar al medio. El desfase está dado por  $knd$  donde  $d$  es la distancia que ha viajado la onda en el medio con índice  $n$ . En otras palabras, un medio con un índice de refracción distinto altera el camino óptico viajado por la onda. El efecto de una lente es cambiar la fase de la onda. Sin embargo, la forma de lente hará que la fase cambie de forma distinta para diferentes puntos en el frente de onda.

En este resumen, únicamente analizaré el efecto de lentes con superficies esféricas, pues son las que se usaron para generar experimentalmente los haces de Mathieu. Por ejemplo, véase la lente biconvexa de la figura 3.3

Como sistema coordenado se elije un sistema cartesiano donde el eje  $\hat{z}$  coincide con el eje de la lente. De la figura 3.3 nótese que un rayo que incide en la lente, y es paralelo al eje de la lente, y pasa sobre un punto con coordenadas  $x, y$  recorre una distancia:  $l = d_1 - d_1(x, y) + d_2 + d_3 - d_3(x, y)$  dentro de la lente. Por convención, cuando un rayo se encuentra ante una superficie convexa se considera que su radio de curvatura es positivo, y cuando lo hace con una superficie cóncava negativo. De esta forma el radio  $R_1$  se toma como positivo y  $R_2$  como negativo. Con ello:

$$d_1(x, y) = R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2}, \quad (3.19)$$

$$d_2(x, y) = -R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2}. \quad (3.20)$$



**Figura 3.3:** Lente biconvexa. La lente se ha separada en tres partes, dos partes son cortes de superficies esféricas con radios  $R_1, R_2$ . La otra región es un paralelepípedo. La figura ilustra la distancia viajada dentro de la lente por un rayo paralelo al eje de la lente.

Por ello, el rayo cubre una distancia  $l$  sobre la lente de:

$$l = d - R_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) - R_2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right), \quad (3.21)$$

con  $d = d_1 + d_2 + d_3$ . Es común realizar la aproximación “paraxial”, es decir:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_j^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_j^2}, \quad (3.22)$$

con  $j = x, y$ . La aproximación paraxial quiere decir que se tiene un haz que diverge muy poco. Si la lente se coloca imaginariamente entre dos planos paralelos, perpendiculares al eje de la lente y tangentes a la superficie de la lente, entonces una onda experimenta un cambio de fase al propagarse entre los dos planos dado por:

$$\phi(x, y) = knl + k(d - l). \quad (3.23)$$

El efecto de la lente sobre el haz es introducir una fase  $e^{i\phi(x,y)}$ , sustituyendo 3.21 en 3.23, usando la aproximación paraxial y despreciando una fase global, es decir una fase que no depende de la posición se tiene que la fase es:

$$e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)}, \quad (3.24)$$

donde se definió la distancia focal  $f$  como:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.25)$$

### Una lente como una transformada de Fourier

Cuando un campo electromagnético ha atravesado una lente su estructura en el plano focal está íntimamente relacionado con la transformada de Fourier del campo. A continuación, se muestra la forma del campo en el plano focal. Para comenzar se analiza como se transforma el campo cuando este se conoce justo antes de entrar a la lente. Posteriormente se generaliza cuando se conoce el campo a una distancia arbitraria de la lente.

Sea  $U$  un frente de onda, justo antes de cruzar una lente con distancia focal  $f$ . Por la sección anterior sabemos que el campo justo después de la lente está dado por:

$$U'(x, y, 0) = U(x, y, 0)e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)}. \quad (3.26)$$

Para analizar como se ve el campo en el plano focal de la lente, se hace uso de la ecuación 3.14. Se esta suponiendo que la lente es obstáculo circular, pues un corte transversal de una lente esférica es un círculo. Combinando 3.26 y 3.14 y eliminando fases globales se tiene:

$$U(u, v, f) = \frac{e^{\frac{ik}{2f}(u^2+v^2)}}{i\lambda f} \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{\frac{-i2\pi}{\lambda f}(xu+yv)} dx dy. \quad (3.27)$$

En términos del espectro angular  $A$  de  $U$ , la expresión inmediata anterior se reescribe como:

$$U(u, v) = \frac{e^{\frac{ik}{2f}(u^2+v^2)}}{i\lambda f} A\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}, 0\right). \quad (3.28)$$

Por otro lado, si se conoce el campo a una posición  $d$  de la lente, entonces la propagación se encuentra al introducir una fase en el espectro angular como aquella de la ecuación 3.18. Introduciendo dicha fase en 3.28 se obtiene:

$$U(u, v) = \frac{e^{\frac{ik}{2f}(1-\frac{d}{f})(u^2+v^2)}}{i\lambda f} \int \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{\frac{-i2\pi}{\lambda f}(xu+yv)}, \quad (3.29)$$

en este caso el 0 en la coordenada en  $z$  se tomó en el plano donde se conoce el campo. Obsérvese que si el campo inicial está a una posición  $d = f$  entonces en el plano focal se observa la transformada de Fourier del campo.

### 3.1.3. Simulación

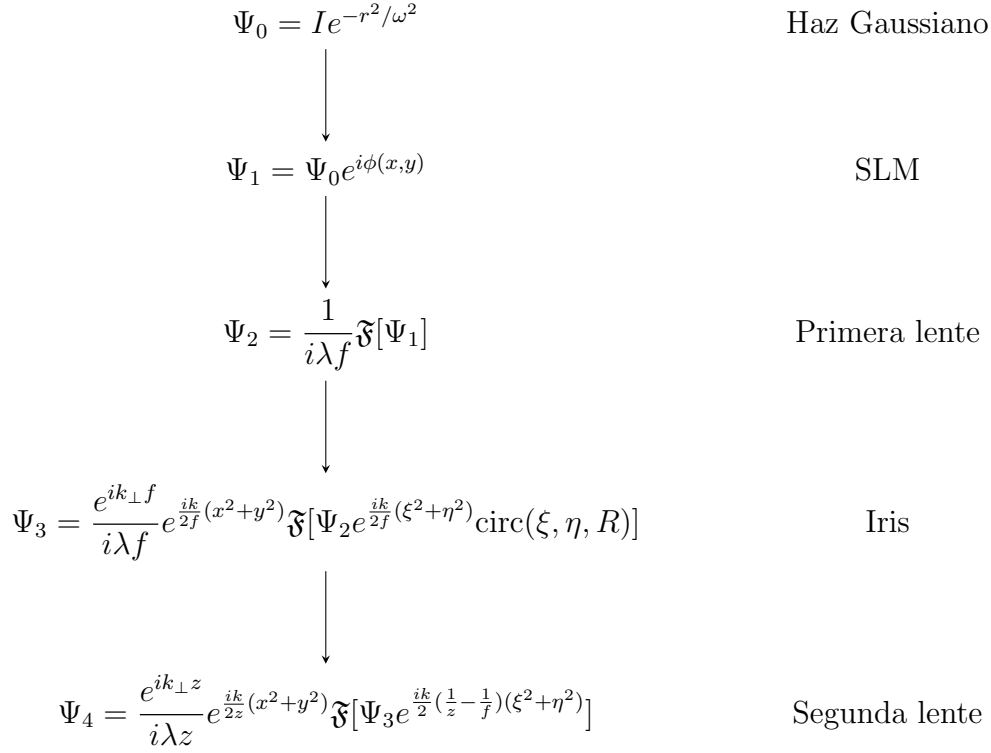
Se han simulado numéricamente los haces de Mathieu para tener predicciones acerca de la estructura espacial de los haces al generarlos experimentalmente mediante el arreglo 2.5. Las simulaciones están basadas en óptica de Fourier. Los pasos para propagar un haz se encuentran indicados en la figura 3.4:

Se comienza con un haz Gaussiano de cintura  $\omega$ , e intensidad  $I$ , y por tanto descrito por  $\Psi_0 = Ie^{-r^2/\omega^2}$ . Este haz incide sobre el SLM con el cual se imprime la fase  $\phi(x, y)$  de un haz de Mathieu. La función del haz se modifica a  $\Psi_1 = \Psi_0 e^{i\phi(x, y)}$ . En el siguiente paso, se propaga el haz del SLM hasta el plano focal de la primera lente. Las dos lentes del arreglo tienen una distancia focal  $f$ . Por la ecuación 3.29 el cambio sobre  $\Psi_1$  consiste en efectuar una transformada de Fourier sobre el haz,  $\Psi_2 = \frac{1}{i\lambda f} \mathfrak{F}[\Psi_1]$ . En el plano focal de la primera lente se coloca un iris para filtrar las frecuencias que no corresponden a las de un haz de Mathieu ideal. El iris se simula con una función  $\text{circ}(\xi, \eta, R)$ , esta función es cero para todo punto fuera de un círculo de radio  $R$ , y uno para todo punto dentro del círculo. En este caso,  $R$  se toma como el radio de la apertura del iris. Las coordenadas  $\xi, \eta$  son cartesianas; se usan las letras  $\xi, \eta$  para enfatizar que son coordenadas a transformar mediante la transformada de Fourier. En el siguiente paso de la simulación se propaga el haz desde que se encuentra en el iris hasta que llega a la segunda lente, para este paso hay que combinar los efectos de propagación en vacío, y difracción por un objeto (iris).

La propagación en vacío se encuentra al regresar al espacio de configuración el espectro angular propagado en la ecuación 3.18. En términos de un haz  $U(x, y, z_0)$  con su eje de propagación en la dirección  $\hat{z}$ , entonces  $U(x, y, z_1)$  con  $z_0 < z_1$  de acuerdo a la referencia [26] está dado por:

$$U(x, y, z_1) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathfrak{F}[U(\xi, \eta, z_0) e^{\frac{ik}{2z}(\xi^2+\eta^2)}], \quad (3.30)$$

con  $z = z_1 - z_0$ ,  $k$  el vector de propagación y  $\lambda$  la longitud de onda del haz. Aplicando la ecuación 3.30, y la difracción por el iris, el campo justo antes de incidir en la segunda lente



**Figura 3.4:** Se muestra el esquema aquí usado para simular el arreglo 2.5. Cada paso de la simulación está relacionado con un elemento óptico.

toma la forma:

$$\Psi_3 = \frac{e^{ik_{\perp}f}}{i\lambda f} e^{\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)} \mathfrak{F}[\Psi_2 e^{\frac{ik}{2f}(\xi^2+\eta^2)} \text{circ}(\xi, \eta, R)], \quad (3.31)$$

esta ecuación es la que se encuentra en el diagrama 3.4.

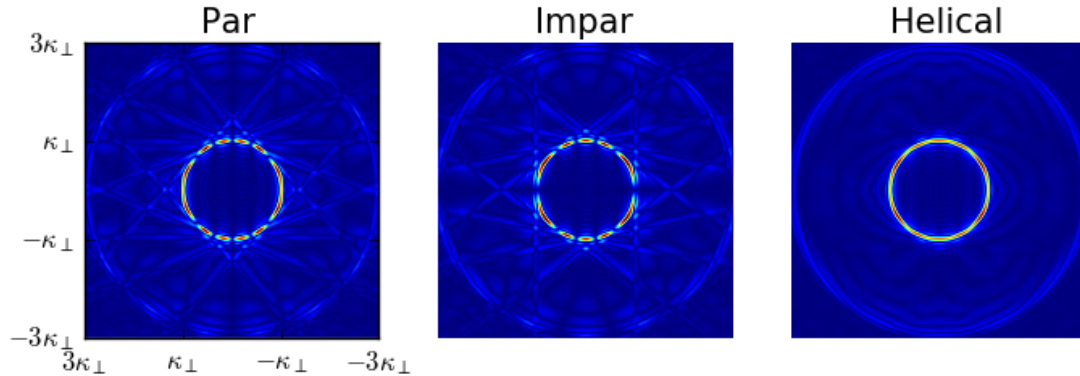
El ultimo paso de la simulación propaga el haz desde la segunda lente hasta una distancia arbitraria. Como ya se ha mencionado, el efecto de una lente sobre un haz es introducir un cambio de fase  $e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)}$ . Al tomar en cuenta dicho cambio de fase y la propagación en vacío se obtiene que un haz  $U(x, y, z_0)$  justo antes de una lente, cambia a un haz  $U(x, y, z_1)$  por:

$$U(x, y, z_1) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathfrak{F}[U(\xi, \eta, z_0) e^{\frac{ik}{2}(\frac{1}{z}-\frac{1}{f})(\xi^2+\eta^2)}], \quad (3.32)$$

la expresión anterior es usada en el paso final de la simulación.

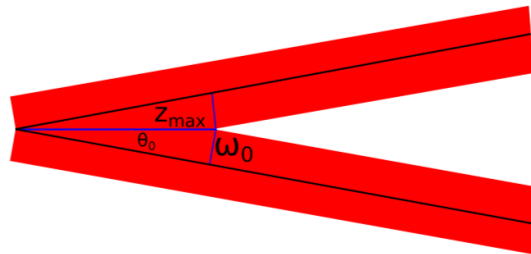
Los haces adquieren una forma de anillos concéntricos cuando van a pasar por el iris. Las simulaciones muestran que los anillos tienen un radio de  $(2n + 1)k_{\perp}/2\pi$  con  $n$  un entero. El único anillo que aparece en un haz ideal es aquel con  $n = 0$ , los demás anillos se originan por el haz Gaussiano que incidió sobre el SLM. Para asemejar al haz ideal se cierra el radio del iris para solo permitir el paso de dicho anillo. En el interior del anillo también existe estructura debida al haz Gaussiano que idealmente debería de ser removida. Con el iris no es posible quitar dicha estructura. En la figura 3.5 se muestran los anillos de un haz par, impar y uno helicoidal. La escala está dada por un número  $\kappa_{\perp}$ , este número se definió como  $\kappa_{\perp} = k_{\perp}/2\pi$ . Todos los anillos son de haces de orden 5. En la figura se muestran los anillos  $n = 0, 1$ . De ser un haz ideal, el interior del anillo  $n = 0$  aparecería totalmente oscuro. En los tres haces, el espectro angular está dado por funciones de Mathieu, respectivamente por:  $ce_m(\phi)$ ,  $se_m(\phi)$  y  $ce_m(\phi) + ise_m(\phi)$ , donde  $\phi$  es la variable angular en coordenadas polares en el espacio de Fourier del haz. En el caso de los haces par e impar es posible distinguir el orden del haz, pues las funciones  $ce_m, se_m$  poseen  $2m$  ceros en el rango  $[0, 2\pi)$ . más aún, como las funciones de Mathieu presentan paridad

bien definida, los ceros se presentan de forma simétrica alrededor del cero. Resultando así en  $2m$  zonas oscuras en los anillos de los haces de Mathieu. En la figura se pueden distinguir las 10 zonas oscuras de los anillos de los haces pares, e impares. Un anillo de un haz impar se distingue de uno par, pues el impar siempre presenta un cero en el ángulo  $\phi = 0$ .



**Figura 3.5:** Se muestran los anillos de los tres tipos de haces de Mathieu. Los anillos son el espectro angular de los haces. Los haces mostrados son de orden 5. La escala de las figuras, se encuentra en términos de la variable  $\kappa_{\perp} = k_{\perp}/2\pi$  con  $k_{\perp}$  el vector de propagación transversal.

Como ya se ha mencionado los haces producidos experimentalmente no son ideales, y por tanto sufren deformaciones que cambian la forma de los haces conforme estos se propagan. Los haces generados se asemejan a los Helmholtz-Gauss. Estos haces tampoco son adifraccionales en todo el espacio, pero son adifraccionales en una distancia  $z_{max}$  [48]. Se introduce esta cantidad pues define una unidad de distancia natural de propagación. Los haces Helmholtz-Gauss de los cuales un caso particular son los haces de Mathieu modulados por una Gaussiana, se componen de una suma de haces Gaussianos donde todos los haces Gaussianos tienen un vector de propagación  $\vec{k}$  de la misma magnitud, pero con diferentes direcciones. Si el haz Helmholtz-Gauss resultante tiene un vector de propagación orientado en la dirección  $\hat{e}$ , todos los vectores de propagación  $\vec{k}$  de los haces Gaussianos que conforman al haz Helmholtz-Gauss tienen una componente  $\vec{k}_e$  en la dirección  $\hat{e}$  de la misma magnitud. En consecuencia todos los vectores de propagación  $\vec{k}$  de los haces Gaussianos se ubican en un anillo alrededor del eje  $\hat{e}$ . En la figura 1.1 se ilustra el caso de un haz invariante ideal, y las componentes son ondas planas, en este caso se puede usar la misma figura pero sus componentes son ahora haces Gaussianos.



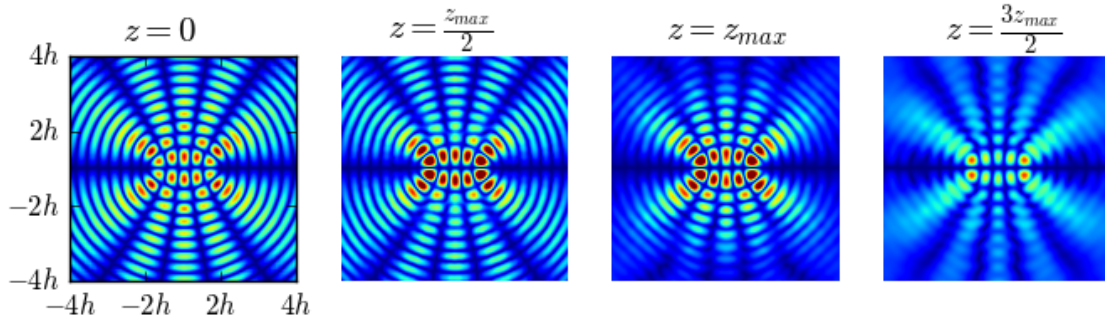
**Figura 3.6:** Traslapo de dos los haces Gaussianos componentes de un haz Helmholtz-Gauss. Mientras los dos haces se superponen se tiene un haz adifraccional. La distancia sobre la cual permanecen adifraccionales se conoce como  $z_{max}$ .

La adifraccionalidad de los haces Helmholtz-Gauss se pierde cuando los haces que los componen dejan de traslaparse. En la figura 3.6 se ilustra un haz Helmholtz-Gauss, el ángulo  $\theta_0$  es aquel entre  $k$  y  $k_{\perp}$ . Los haces en rojo son dos haces Gaussianos que componen al haz

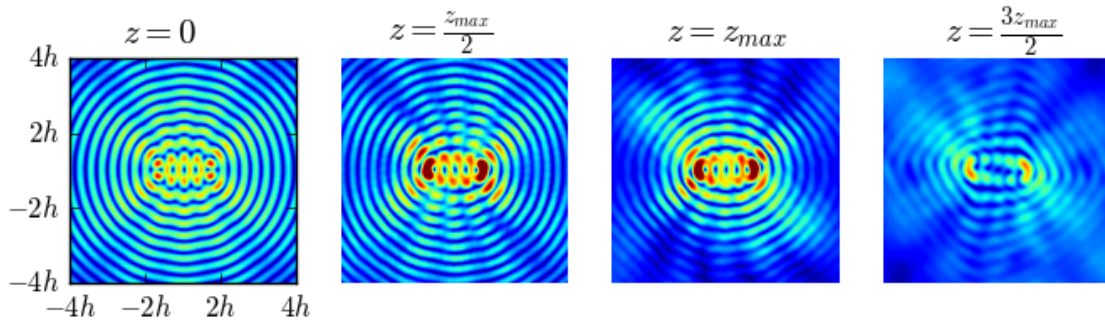
Helmholtz-Gauss, la distancia  $z_{max}$  es aquella en la cual las cinturas ( $\omega_0$ ) de los haces dejan de superponerse. De la figura nótese que:

$$z_{max} = \frac{\omega_0}{\sin(\theta_0)}. \quad (3.33)$$

En la figura 3.7 se muestra la simulación de un haz impar en diferentes planos transversales al eje de propagación. La escala  $h$  se refiere a la distancia interfocal entre las elipses del haz, en este trabajo se han tomado distancia interfocales de alrededor de un milímetro. En la primera imagen de la izquierda se muestra el haz en el origen. El origen se toma como el punto en donde se intersecan los planos transversales de los haces Gaussianos componentes [27]. En el arreglo experimental 2.5 el origen se encuentra en el plano focal posterior de la segunda lente. La escala de colores es la misma para las cuatro imágenes. Se puede ver que la intensidad de algunos puntos en el centro de la imagen aumenta del plano  $z = 0$  al plano  $z = z_{max}/2$ , sin embargo, la potencia del haz en la región mostrada decrece, lo cual quiere decir que el haz está divergiendo, y por ello está repartiendo la energía que posee en áreas más grandes. Como es de esperarse el haz pierde su forma conforme se propaga. En el laboratorio se puede trabajar con distancias menores a  $z_{max}$ . Al calcular con la ecuación 3.33 la distancia es de alrededor de 3m.



**Figura 3.7:** Haz Mathieu-Gauss impar en diferentes planos transversales al eje de propagación. La distancia  $h$  es la distancia del centro del haz hacia los focos de las elipses. El haz pierde la propiedad de adifraccionalidad una vez que llega a la distancia  $z_{max}$ .



**Figura 3.8:** Propagación de un haz helicoidal. En este caso la adifraccionalidad del haz se ve afectada por la presencia de vórtices, pues los vórtices tienden a moverse conforme el haz se propaga.

Los haces pares se comportan de forma similar al haz impar recién mostrado, sin embargo los haces helicoidales pierden su adifraccionalidad antes de llegar a  $z_{max}$ . Esto se debe a que dichos haces contienen vórtices ópticos, y los vórtices giran conforme el haz se propaga [49]. La propagación de un haz helicoidal se ilustra en la figura 3.8. El giro de los vórtices es un efecto Gaussiano, y por ello aumentar la cintura de los haces  $\omega_0$  tiene el efecto de reducir el

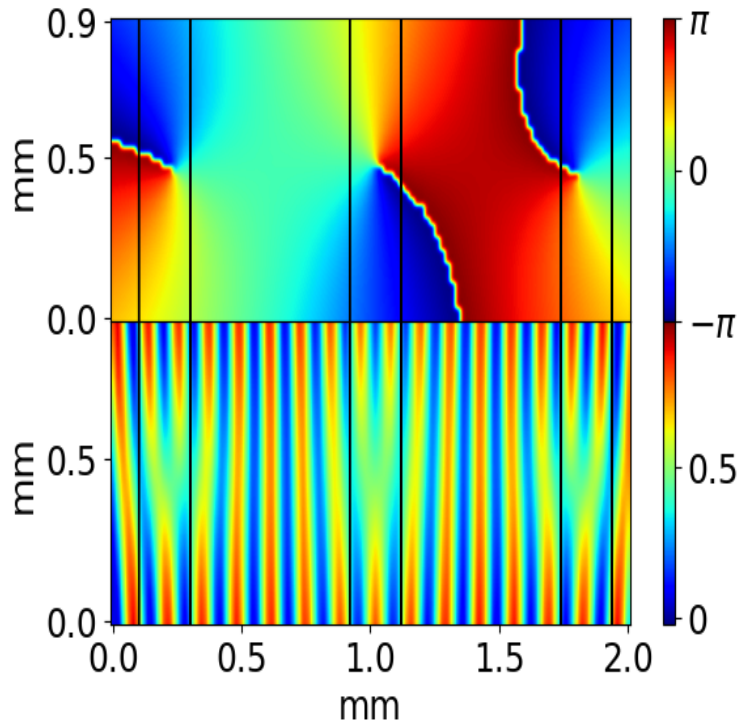
giro. Combinando la ecuación 27b de la referencia [49], y la máxima distancia de propagación  $z_{max}$  se obtiene que los vórtices habrán girado:

$$\Delta\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k\lambda}{\pi k_{\perp}\omega_0}\right), \quad (3.34)$$

por ello si se quiere reducir el giro basta seleccionar la cintura  $\omega_0$ .

## 3.2. Vórtices

Los haces helicoidales presentan vórtices ópticos, véase la sección 1.3.2. Aquí se muestran varios interferómetros para la detección experimental de tales vórtices. Se decidió utilizar interferómetros, pues estos permiten estudiar cambios en fase a través de una medición en intensidad. Por ejemplo, en un interferómetro de Michelson se cambia la fase de un haz al mover la posición de un espejo, y la posición del espejo interviene directamente en la formación de franjas circulares o lineales en la pantalla de observación.

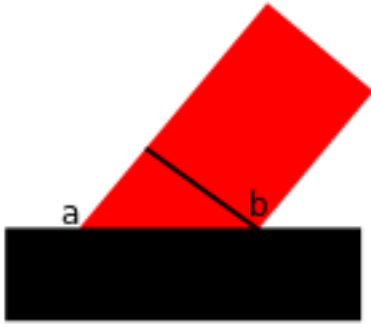


**Figura 3.9:** Interferencia de un haz de Mathieu y una onda plana. En la figura superior se muestra la fase del haz de Mathieu, y en la figura inferior se muestra el patrón de interferencia. El patrón de interferencia son franjas, en la ubicación de los vórtices las franjas se rompen y forman una estructura de tenedores.

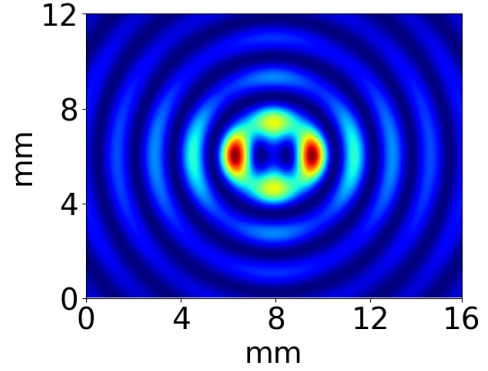
Los vórtices ópticos se pueden detectar al sobreponerlos con una onda plana. El patrón de interferencia adquiere la forma de franjas. En la ubicación del vórtice, la estructura de franjas se rompe ya que el vórtice no tiene una fase bien definida. En la figura 3.9 se muestra la fase de un haz Mathieu-Gauss helicoidal de orden 3, así como el patrón de interferencia del haz con una onda plana. El haz mostrado solo exhibe vórtices en su eje principal, sin embargo el método también funciona cuando se presentan más vórtices. En la figura 3.9 se usan líneas negras que cruzan las dos imágenes para enfatizar que los vórtices rompen las franjas, y producen estructuras con forma de tenedores. Se realizó interferencia de onda plana en haces pares e impares, y como era de esperarse no se formaron tenedores.



También es posible dividir un haz en dos partes, y luego hacer ambas partes interferir. En [13] se propone la detección de vórtices en haces Laguerre-Gauss con un interferómetro en el cual se divide el haz que tiene una singularidad en dos haces, y luego se juntan ambos haces con un pequeño ángulo entre ellos. Al igual que en el caso de onda plana se produce un patrón de franjas. En la ubicación de los vórtices se observan tenedores. El introducir un ángulo entre los haces tiene el efecto de introducir una diferencia de fase dependiente de la posición. En la figura 3.10 es posible ver que un rayo del haz incidiendo en la posición “a” ha viajado una mayor distancia que un rayo incidiendo sobre “b”, por ello se tiene que la fase del haz sobre la superficie de incidencia depende de la posición. Para dicha orientación la fase se recorre de  $2\pi \rightarrow 0$ , pues un rayo más cercano al rayo que incide en “b” experimenta un menor cambio en fase.



**Figura 3.10:** Haz incidiendo sobre una superficie con un ángulo.



**Figura 3.11:** Haz helicoidal de orden 2 con dos vórtices. Los haces se ubican en las regiones oscuras en el centro del haz.

Con haces de Mathieu, es posible aplicar la misma técnica para mostrar la existencia de vórtices. En la figura 3.13 se bosqueja la interferencia entre un haz helicoidal consigo mismo. El haz es de orden dos y tiene solo dos vórtices (figura 3.11). Para asegurar que el haz solo tiene dos vórtices se escoge un valor de elipticidad  $q < 2^2/2 - 1$  [30]. Al dividir el haz se tendrán cuatro vórtices en total. Los vórtices se encuentran sobre el eje principal. Uno de los vórtices se coloca en la parte más brillante del otro haz. Este desplazamiento facilita la detección de dicho vórtice, pero dificulta la detección de otros dos vórtices, pues ambos quedan colocados en una región oscura. El vórtice restante también se ubica en una posición ventajosa para su observación. La inclinación de las franjas se debe a los ángulos horizontales y verticales relativos entre los haces interferidos. En la realidad, los vórtices de un haz helicoidal rotan conforme el haz se propaga, y por ello la figura se vería ligeramente diferente.

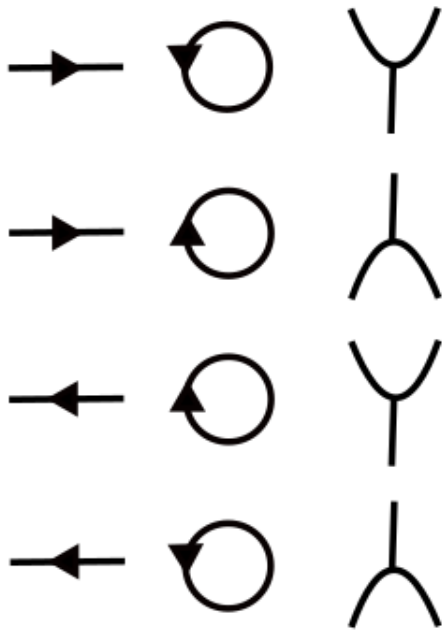
La orientación de los tenedores depende de dos características: la carga topológica del vórtice, y el sentido en el que se recorre la fase dependiente de la posición. Por ejemplo, si la diferencia de fase depende de la posición horizontal la fase se puede recorrer de izquierda a derecha  $0 \rightarrow 2\pi$  o de derecha a izquierda  $0 \leftarrow 2\pi$ . En la figura 3.12 se muestra la orientación de los tenedores con respecto a estas dos características. Las flechas en las líneas horizontales, indican como se recorre la fase. Las flechas en los círculos indican el sentido de la carga topológica.

La formación de tenedores bajo el argumento anterior se puede mostrar de forma analítica con dos haces Bessel de orden 1. Cada haz incide sobre una pantalla, y se forma un ángulo entre la dirección de propagación del haz, y la pantalla. Un haz Bessel está descrito por una función escalar:

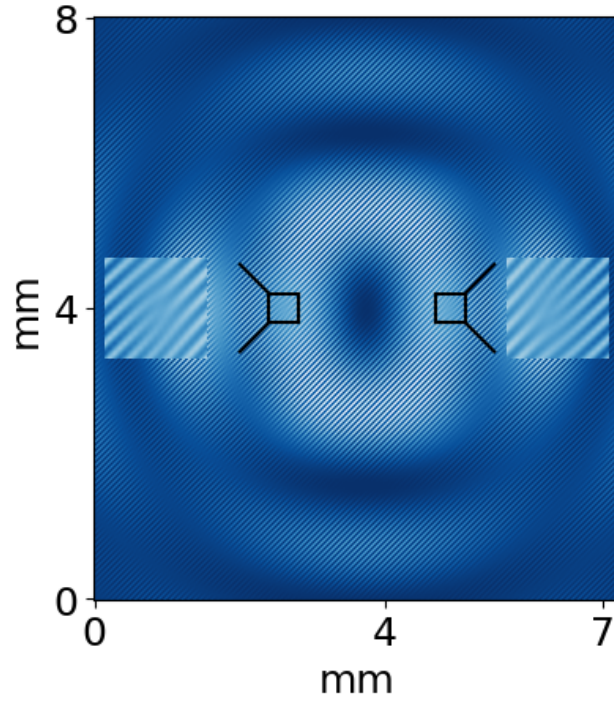
$$\Psi = AJ_1(k_{\perp}r)e^{i\theta}e^{-ik_z z}, \quad (3.35)$$

la constante  $A$  determina la intensidad del haz,  $J_1$  es la función de Bessel ordinaria de orden 1,  $k_{\perp}$  es el vector de propagación transversal,  $r$  es la coordenada radial en el sistema cilíndrico de





**Figura 3.12:** Se muestra la dependencia en la orientación de los tenedores respecto al sentido en el que se recorre la fase (línea horizontal), y a su carga topológica (círculo) .



**Figura 3.13:** Interferencia de un haz Mathieu de orden 2 consigo mismo. Se muestra la formación de tenedores en la ubicación de los vórtices. Para formar un tenedor se coloca un vórtice en una zona brillante del otro haz.

coordenadas. En este caso el sistema se ha escogido tal que el vector  $\vec{z}$  coincida con la normal de la pantalla, y que la pantalla sea un plano descrito por  $z = 0$ ;  $\theta$  es el ángulo polar, y  $k_z$  es el vector de propagación en la dirección  $\vec{z}$ . Como los haces no inciden de forma normal sobre la pantalla, entonces para describir la forma de los haces se realiza una rotación. Si el ángulo de inclinación entre haz y pantalla es  $\alpha$ , entonces las coordenadas del haz se reescriben por:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + z \sin \alpha, \\ y' &= y, \\ z' &= -x \sin \alpha + z \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Los centros de los haces se encuentran desplazados en la pantalla. Se considera que el centro de un haz coincide con el origen del sistema de coordenadas, y el otro haz se encuentra desplazado por una distancia  $a$  en la dirección  $\vec{x}$ . Para tomar en cuenta el desplazamiento se realiza el cambio  $x \rightarrow (x - a)$  en el haz desplazado del origen. Si se considera que uno de los haces incide con un ángulo  $\alpha$ , y el otro con un ángulo  $\beta$ , entonces la intensidad del campo en la pantalla se encuentra dada por la suma de la intensidad de cada campo más un término de interferencia modulado por:

$$\cos\left[k_z(x - a)\sin\alpha + \arctan\frac{y}{(x - a)\cos\alpha} + k_z x \sin\beta - \arctan\frac{y}{x\cos\beta}\right], \quad (3.37)$$

el patrón de interferencia se encuentra superpuesto sobre la intensidad de la suma de los haces. Para ver las regiones sobre las cuales el término de interferencia tiene la misma intensidad, se estudian las regiones en las cuales el término de interferencia es constante. Por ejemplo la región de interferencia destructiva está dada por las regiones en las que el argumento de 3.37 vale  $\pi$ .

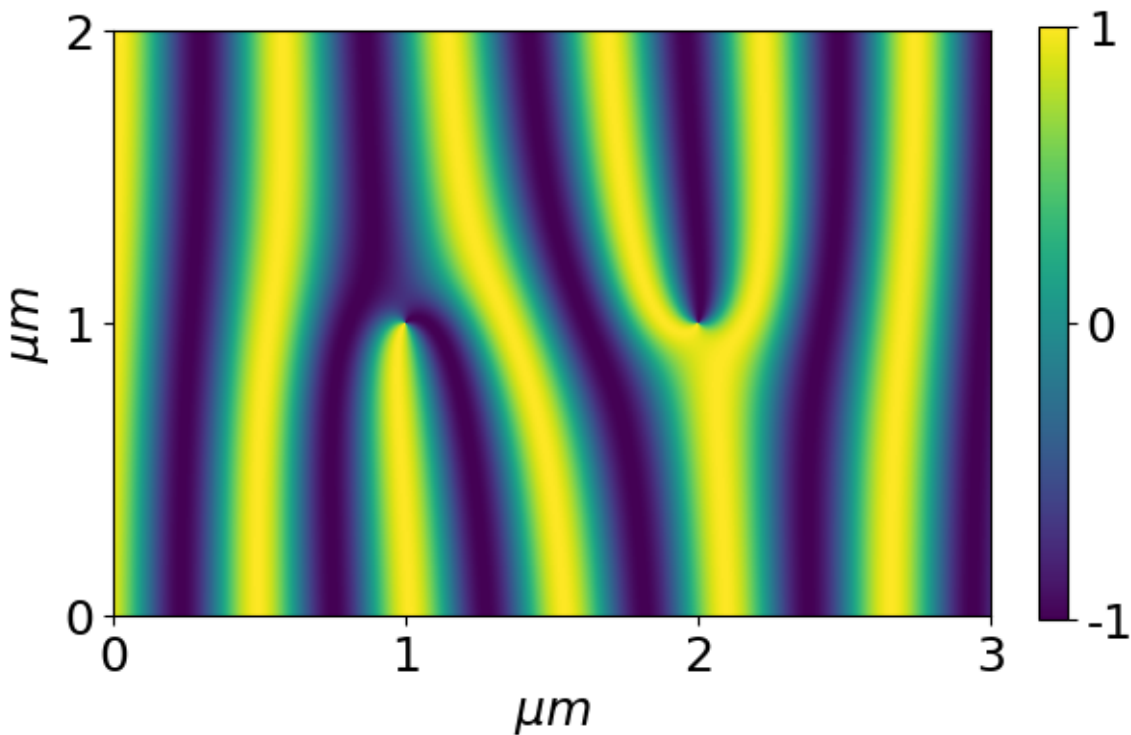
La región de interferencia destructiva alrededor del vórtice óptico del origen toma la forma:

$$y = x \cos(\alpha) \tan[k_z x \sin(\alpha) + k_z x \sin(\beta) + \pi \mp \pi/2], \quad (3.38)$$

por otro lado cerca de la singularidad que se encuentra desplazada la región de interferencia destructiva toma la forma:

$$y = -(x - a) \cos(\beta) \tan[k_z x \sin(\alpha) + k_z x \sin(\beta) + \pi \mp \pi/2], \quad (3.39)$$

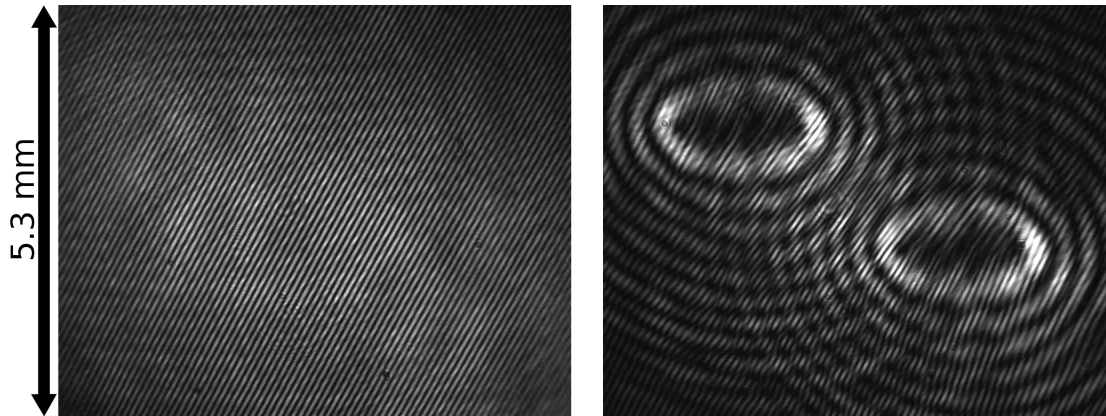
las expresiones 3.38-3.39 se parecen a la expresión de interferencia de singularidad y onda plana encontrada en [13]. En la figura 3.14 se muestra una gráfica del término de interferencia 3.37, la escala de colores refleja el valor que toma dicha expresión en cada punto. Las regiones azules son regiones de interferencia destructiva, y las regiones en amarillo son regiones de interferencia constructiva.



**Figura 3.14:** Gráfica del término de interferencia de dos haces Bessel de orden 1. El término de interferencia adquiere la forma de franjas, y las franjas se rompen en las posiciones de los vórtices. Los parámetros usados son  $\lambda = 420 \text{ nm}$ ,  $k_z = 2\pi\lambda^{-1}$ ,  $\alpha = 0,5\text{Rad}$ ,  $\beta = 0,3\text{Rad}$ , y  $a = 1\mu\text{m}$ .

El fenómeno de interferencia con diferencias en fase dependientes de la posición fue implementado con un interferómetro de Michelson, en el cual los espejos no son perpendiculares, y por ello se forma un patrón de franjas inclinadas. El grosor y la orientación de las franjas cambia al mover la alineación del interferómetro [50]. En el interferómetro un haz es dividido en dos partes. Al utilizar un interferómetro de Michelson la diferencia en fase entre los dos haces al llegar a la pantalla de observación tiene diferentes contribuciones: la diferencia de tamaño entre los brazos del interferómetro, la inclinación de los espejos, y además existe una diferencia de fase de  $\pi$  debida a que uno de los haces experimenta una reflexión interna en el divisor de haz, y el otro haz una reflexión externa [51]. El cambio de fase de  $\pi$  intercambia la posición de las franjas oscuras por las iluminadas. En la figura 3.15 se observa a la izquierda el patrón de interferencia debido a un haz sin estructura, y en la parte derecha el de un haz de Mathieu helicoidal de orden 7 con 7 vórtices. Los tenedores en los dos haces se encuentran invertidos,

es decir un tenedor abre hacia abajo, y el otro hacia arriba. Esto se debe a que los haces no inciden de forma normal sobre la pantalla de observación, y un haz tiene un diferencia de fase dependiente de la posición que se recorre de  $0 \rightarrow 2\pi$ , y el otro de  $0 \leftarrow 2\pi$ . Como la carga topológica de los haces gira en el mismo sentido, entonces se producen tenedores invertidos, recuérdese la figura 3.12. La orientación de los tenedores se puede invertir al intercambiar la posición de los dos haces en la pantalla, pues esto equivale a intercambiar los ángulos que se forman entre un haz y la pantalla de observación, lo cual a su vez invierte el sentido en el que se recorre la fase en la pantalla de observación.



**Figura 3.15:** Se muestra la estructura de franjas en un interferómetro de Michelson cuando la luz no se estructura (izquierda), y cuando la luz se estructura (derecha)

# Capítulo 4

## Herencia de Estructura

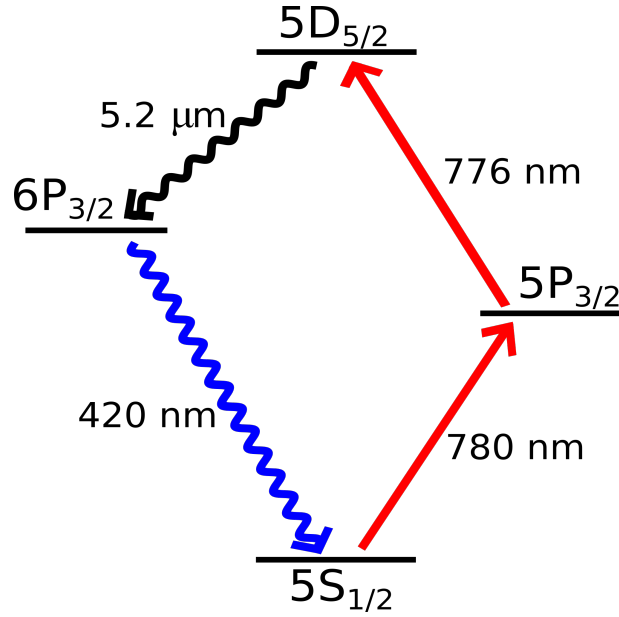
En este capítulo se describe un experimento de mezclado de cuatro ondas (FWM) en un gas de rubidio caliente. El FWM aquí empleado se basa en una estructura de diamante en los niveles atómicos del Rb. El diamante se forma con las transiciones  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2} \rightarrow 6P_{3/2} \rightarrow 5S_{1/2}$ . En el experimento se introducen dos haces de bombeo, uno de 780 nm para la transición en la línea D2  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ , y el otro de 776 nm para la transición  $5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2}$ ; el medio atómico responde mediante la emisión de luz con dos longitudes distintas 5,23  $\mu\text{m}$  y 420 nm [52]. La luz de 5,23  $\mu\text{m}$  no es detectada, pero la luz azul de 420 nm es detectada mediante un cámara CMOS. La luz de bombeo 776 nm es dotada con la estructura de un haz de Mathieu. La luz azul presenta la estructura del haz de Mathieu bombeado. La herencia de estructura no se limita a la estructura de intensidades del haz, también se transmite la fase. Para corroborar este punto, se bombearon haces Mathieu helicoidales que presentan vórtices. La presencia de vórtices en la luz azul fue comprobada mediante un interferómetro de Michelson. La herencia de vórtices de la luz de bombeo a la luz de decaimiento es una forma de transferencia de momento angular orbital (OAM) [18] [53]. El capítulo comienza con una breve descripción del átomo de rubidio, del mezclado de cuatro ondas y del momento angular orbital.

### 4.1. Átomo de rubidio

El rubidio es un metal alcalino con número atómico 37. Son conocidos 24 isótopos, pero solo dos se presentan en la naturaleza  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$ . Al ser un átomo alcalino su descripción teórica es más sencilla pues se puede considerar como un átomo hidrogenoide, ya que se puede despreciar la interacción de los electrones de las capas internas con luz, ya que son capas cerradas. Los niveles de energía atómicos se clasifican a través de cuatro números cuánticos: número cuántico principal  $n$ , momento angular  $L$ , espín  $S$ , y momento angular nuclear  $I$ . El momento angular nuclear  $I$  es distinto para los dos isótopos del rubidio, lo que da pie a distintos niveles de energía entre los isótopos. Así mismo se definen el momento angular total  $J = L + S$ , y el momento angular total del átomo  $F = J + I$ . Para referirse a un nivel de energía se utiliza la notación de Russel-Saunders:

$$n^{2S+1}L_J, \quad (4.1)$$

como el rubidio es un átomo alcalino el momento angular  $L$  es el momento angular del electrón de valencia, así mismo el espín siempre vale  $S = 1/2$  pues es el espín de un único electrón. Por tal razón, de aquí en adelante se omite el término  $2S + 1$  en la notación de los niveles. A todos los niveles de energía que tienen la misma notación de Russel-Sanders se le agrupa en un estructura de niveles conocida como estructura fina. Si se añade el momento angular nuclear  $I$  entonces se suele denotar a los niveles de energía como  $nL_JF = f$ . donde la  $f$  minúscula se sustituye por el valor de  $F$ , por ejemplo  $5S_{1/2}F = 2$ . Al considerar el momento nuclear  $I$  los niveles finos se desdoblán en varios niveles, estos niveles se conocen como niveles hiperfinos.



**Figura 4.1:** Se muestran los cuatro niveles de rubidio usados en este trabajo. Dada la forma de los niveles, esta configuración recibe el nombre de diamante. Todas las transiciones son dipolares. Para realizar las transiciones marcadas con líneas rectas se utilizan láseres sintonizados a dichas transiciones. Las líneas onduladas reflejan transiciones de decaimiento.

## 4.2. Mezclado de cuatro ondas

El mezclado de cuatro ondas (FWM) es un fenómeno de óptica no lineal de tercer orden en la susceptibilidad eléctrica  $\chi$  en el que se involucran cuatro ondas de luz. La respuesta del medio que presenta FWM es una polarización eléctrica  $P$  no lineal con respecto al campo eléctrico  $E$  [5]:

$$P = \epsilon_0[\chi^1 E + \chi^2 E^2 + \chi^3 E^3 + \dots], \quad (4.2)$$

los superíndices en  $\chi^n$  indican el orden de la susceptibilidad, y no debe ser confundidos con exponentes. En general  $\chi^n$  es un tensor de orden  $n + 1$ . Los efectos no lineales a segundo orden  $\chi^2$  se presentan en materiales no centro-simétricos, es decir materiales que no tienen un centro de inversión, sin embargo los materiales en donde se presenta  $\chi^3$  pueden ser o no ser centro-simétricos, y por ello el FWM se puede observar en gases y líquidos.

El FWM se ha utilizado exitosamente para conjugar la fase de la luz [54], generar luz comprimida [55], producir haces gemelos entrelazados [17], parejas de fotones entrelazados [56], entre otros. En la dirección de este trabajo el FWM también ha sido utilizado en gases atómicos calientes para la transferencia de OAM [18],[19]. En ambas referencias se utiliza luz estructurada con un vórtice. La luz con el vórtice forma parte de un FWM, que se realiza con un gas de rubidio en una celda de espectroscopía. El proceso de FWM produce luz a través de dos decaimientos. En uno de los decaimientos también se observa el vórtice.

El FWM es un proceso paramétrico, es decir el estado del sistema es el mismo antes y después de ocurrir el proceso. El medio en el que se efectuó el proceso paramétrico no retiene energía, momento lineal o momento angular de la luz de entrada una vez que ya se ha producido la luz de salida [5]. Las leyes de conservación de energía y momento, entonces se enuncian únicamente en términos de la luz de entrada y de la luz de salida. En este caso la conservación de energía se expresa a través de la frecuencias de los campos como:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4. \quad (4.3)$$

En la figura 4.1 se muestran los niveles finos utilizados en este trabajo. Las líneas rectas denotan la luz de entrada con frecuencias  $\omega_1, \omega_2$ , y las líneas onduladas la luz de salida  $\omega_3, \omega_4$ .

El orden de los subíndices se recorre contra las manecillas del reloj en la figura 4.1. El momento lineal también se conserva:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4, \quad (4.4)$$

la conservación de momento se ha expresado en términos de los vectores de propagación  $\vec{k}$  de los campos involucrados. El carácter vectorial de esta ley determina la orientación de los haces de salida con respecto a la de los haces de entrada.

### 4.3. Momento angular orbital

La teoría electromagnética predice que los campos electromagnéticos tienen un momento lineal asociado [57], y en consecuencia también se les asocia un momento angular. La densidad de momento lineal está dada por:

$$g = \frac{1}{c^2} E \times H, \quad (4.5)$$

con  $c$  la velocidad de la luz,  $E$  el campo eléctrico, y  $H$  el campo magnético. La densidad de momento angular es entonces:

$$M = r \times g, \quad (4.6)$$

con  $r$  el vector de posición.

En el trabajo pionero de Allen, Beijersbergen, Spreeuw, y Woerdman [9] muestran que los haces Laguerre-Gauss tienen un momento angular independiente de la polarización del haz, y que tiene un valor bien definido por fotón. En dicho artículo se hace un análogo al momento angular atómico, y proceden a identificar el momento angular dependiente de la polarización como un momento de espín, y al dependiente de la estructura como un momento angular orbital. Para probar sus conclusiones, calculan la densidad de momento angular  $M$  4.6 en los haces Laguerre-Gauss, y observan que es distinta de cero incluso cuando no se tiene polarización circular. En [14] Soskin *et al*, muestran que los haces con vórtices poseen momento angular orbital.

El OAM también se puede analizar desde una perspectiva cuántica. Una forma de hacerlo es asociar soluciones de la ecuación paraxial a soluciones de la ecuación de Schrödinger [58]. Los haces Laguerre-Gauss  $u$  tienen una dependencia angular de la forma  $e^{im\phi}$ , con  $\phi$  el ángulo polar en un plano transversal al eje de propagación del haz. Al aplicar la proyección en  $L_z$  del operador de momento angular  $L$ :

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.7)$$

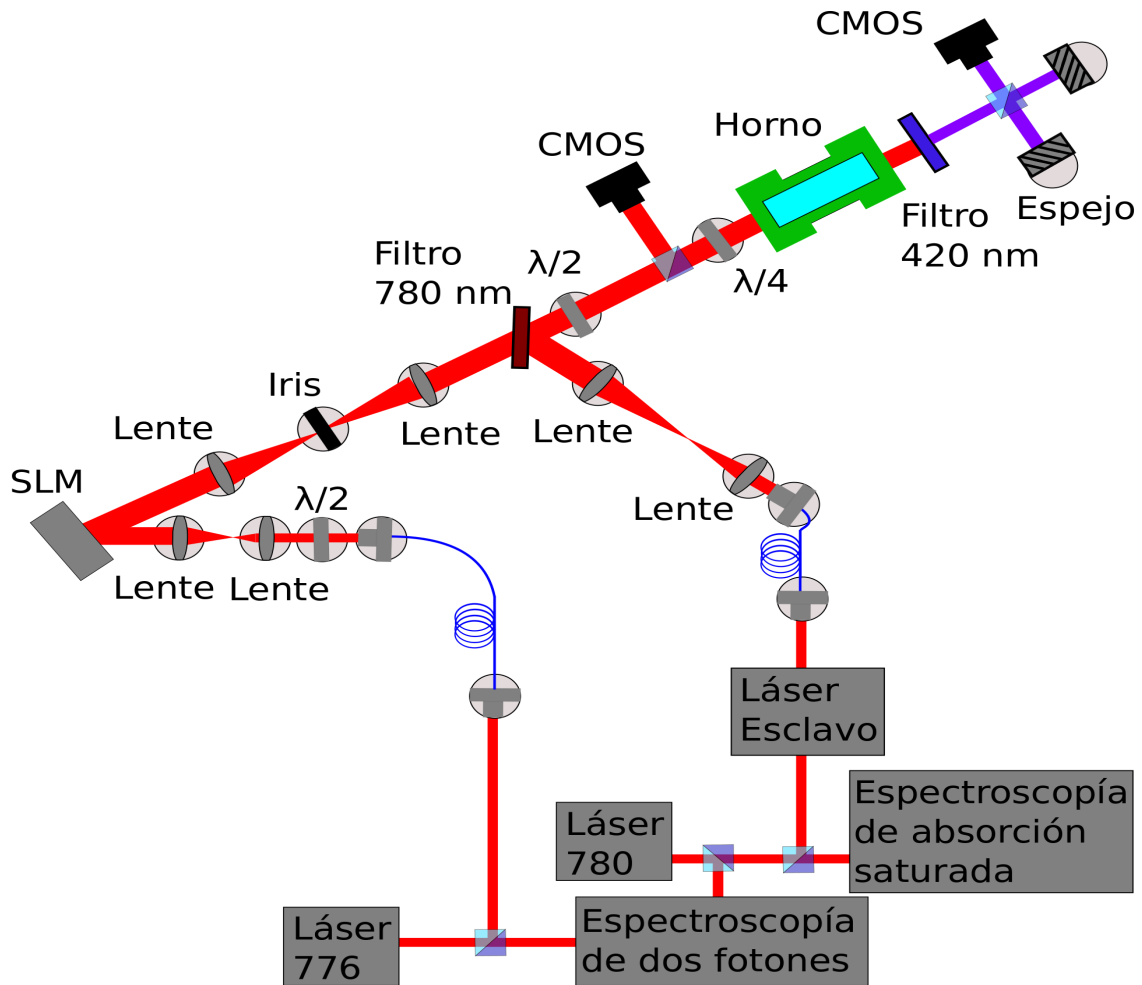
se obtiene  $L_z u = \hbar m u$ , por ello los haces Laguerre-Gauss tienen OAM.

Los haces Mathieu helicoidales tienen vórtices, y por ello OAM. Para una  $q$  lo suficientemente pequeña su OAM por fotón se corresponde con  $\delta L_z = m\hbar$  donde  $m$  es el orden del haz de Mathieu [59]. Así mismo, generar haces de Mathieu helicoidales con una  $q < m^2/2 - 1$  garantiza que solo se presenten  $m$  vórtices en el eje principal del haz [30]. Dado que es más fácil analizar un haz con una menor cantidad de vórtices, pues los patrones de interferencia de estos haces son más sencillos con menos vórtices, se ha escogido trabajar en el régimen de  $m, q$  cumplan la desigualdad  $q < m^2/2 - 1$ . En este trabajo se muestra la herencia en haces de órdenes de 3 a 5.

### 4.4. Arreglo experimental

En la figura 4.2 se muestra el arreglo experimental para el mezclado de cuatro ondas en una celda de espectroscopía de rubidio. En este arreglo se estructura la luz de 776 nm, y se superpone con la de 780 nm. La luz azul del FWM es analizada con un interferómetro de

Michelson. Esta sección se divide en dos subsecciones. La primera subsección habla sobre la sintonización y anclado en frecuencia de los láseres para excitar las transiciones de ascenso en el FWM. La otra subsección habla del arreglo en el cual se produce el FWM. En este arreglo se juntan los dos haces para excitar el rubidio. Y se analiza la luz azul.



**Figura 4.2:** Arreglo óptico para el FWM. Las espectroscopías de los láseres no son mostradas, pero se explican en el texto. En el arreglo se estructura la luz de 776 nm como un haz de Mathieu. La luz estructurada de 776 nm se junta con la luz de 780 nm en un filtro que permite el paso de la luz de 776 nm y refleja la luz de 780 nm. Los dos haces entran a la celda de espectroscopía con polarización circular para hacer más eficiente el proceso. La luz azul generada por el FWM pasa por un interferómetro de Michelson para su análisis.

#### 4.4.1. Espectroscopía de los haces de bombeo

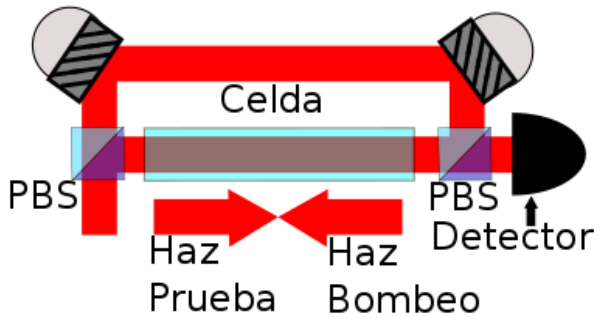
Para producir el mezclamiento de cuatro ondas ilustrado en la figura 4.1 se requieren dos láseres de bombeo de longitudes de onda de 780 nm, y 776 nm. Los láseres utilizados en este trabajo son láseres de diodo con cavidad extendida en configuración cat-eye [60]. Ambos láseres requieren estar sintonizados y anclados con referencia atómica. Para este fin se utilizaron dos técnicas distintas: la espectroscopía de absorción saturada, y la espectroscopía de polarización. A continuación se describen de forma somera los mecanismos de funcionamiento de ambas espectroscopías. La sintonización y anclado del láser de 780 nm, y la sintonización del láser de 776 nm pueden consultarse en la tesis [61]. Para entender cualquiera de los dos tipos de espectroscopía usados se requiere describir la absorción de luz cuando cruza a través de un medio.



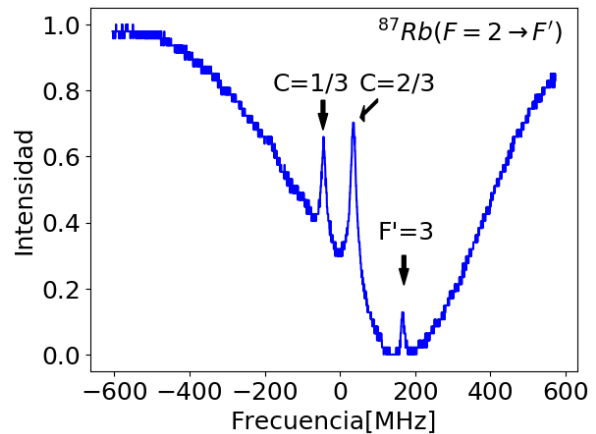
Cuando luz monocromática atraviesa un gas, su intensidad decae al salir del gas pues parte de la luz es absorbida por el medio. La absorción está descrita por la ley de Beer-Lambert:

$$I = I_0 e^{-\alpha(\omega)L}, \quad (4.8)$$

donde  $I$  es la intensidad de la luz de salida,  $I_0$  es la intensidad de luz antes de entrar al medio,  $\alpha(\omega)$  es un coeficiente que depende de la frecuencia de la luz  $\omega$ ,  $L$  es la longitud del medio. Si el gas es un gas atómico se espera absorción en las frecuencias de excitación de los átomos del gas, pues la luz excitará transiciones en algunos átomos tras su paso. Si los átomos del gas estuvieran estáticos, el aumento de absorción solo se daría aproximadamente en las frecuencias de absorción. Sin embargo, los átomos se encuentran en movimiento, y por el efecto Doppler los átomos en movimiento perciben una frecuencia distinta a la frecuencia en el marco de referencia del laboratorio. En consecuencia los átomos se excitan alrededor de un rango de frecuencias, pues perciben frecuencias distintas a la frecuencia de excitación como la frecuencia de excitación. El centro del rango es la frecuencia de excitación. El rango está determinado por las velocidades de los átomos, las cuales a su vez obedecen la distribución de Maxwell-Boltzmann. El rango de frecuencias en las cuales se produce un aumento en absorción debido al movimiento de los átomos se conoce como ensanchamiento Doppler. El ensanchamiento puede ser tal que abarque dos o más frecuencias de transición distintas, en tal caso el aumento en absorción no permite distinguir a las transiciones que produjeron el aumento. Para poder distinguir a las transiciones se han desarrollado técnicas de espectroscopía como la espectroscopía de absorción saturada [2], y la espectroscopía de polarización [3].



**Figura 4.3:** Se ilustra el funcionamiento de la espectroscopía de absorción saturada. A un gas se le hacen incidir dos haces contrapropagantes de la misma longitud de onda. Un haz conocido como bombeo satura el medio. El otro haz conocido como haz de prueba atraviesa el medio, pero este haz excita a menos átomos pues algunos de los átomos ya han sido excitados por el haz de bombeo. Para producir espectros se varía la frecuencia de los haces, y se registra la potencia del haz de prueba en el detector.

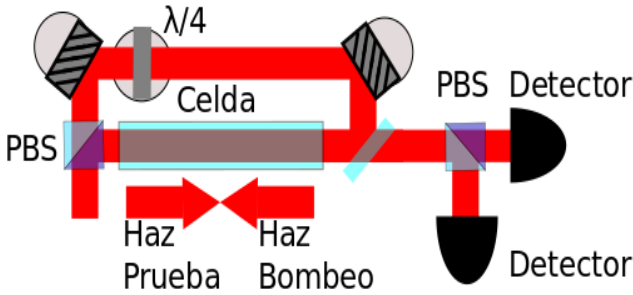


**Figura 4.4:** Espectro obtenido con espectroscopía de absorción saturada. La frecuencia de los haces se varió alrededor de la frecuencia de excitación  $5S_{1/2}F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}F = 3$ . El espectro se ve como picos ubicados en un pozo. El pozo tiene forma Gaussiana, y se conoce como ensanchamiento Doppler. Uno de los picos corresponde con una frecuencia de transición. Los otros dos picos son entrecruces. Los símbolos  $c = n/m$  denotan que los picos son crossovers de la transición  $F = n \rightarrow F' = m$ . En el pozo también aparecen los picos de las transiciones a  $F' = \{1, 2\}$ , pero los picos son muy pequeños, y no se aprecian en la figura.

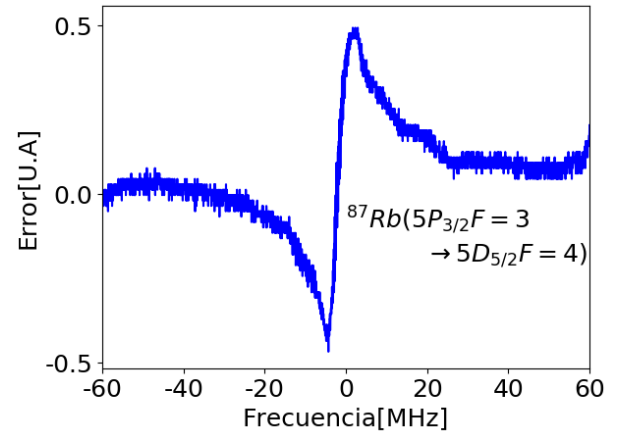
La espectroscopía de absorción saturada emplea dos haces: bombeo y prueba. Los haces se hacen incidir de forma contrapropagante en un gas atómico, véase la figura 4.3. La función del



haz de bombeo es saturar el medio, y permitir que el haz de prueba atraviese el medio con una absorción reducida [2]. La frecuencia de los haces de bombeo y prueba es la misma. Al realizar una gráfica de potencia del haz de prueba una vez que ha salido del gas atómico contra su frecuencia, se observa que la gráfica adquiere una forma de pico alrededor de las frecuencias de transición, véase la figura 4.4. Los picos aparecen pues el haz de bombeo, y el de prueba excitan a dos grupos distintos de átomos. Si el haz de bombeo excita átomos con velocidad  $v$  con  $v$  en la dirección del haz de prueba, el haz de prueba excita átomos con velocidad  $-v$ . Los átomos con velocidad cero en la dirección del haz de prueba, entonces son excitados por los dos haces. En este caso se genera un pico, pues el haz de bombeo ya excitó a los átomos con velocidad cero, y por ello cuando pasa el haz de prueba los átomos ya no se excitan pues ya están excitados. Cuando dos transiciones atómicas difieren en frecuencia menos que el ensanchamiento Doppler aparecen picos adicionales en el espectro, dichos picos son conocidos como entrecruces, y se encuentran en la mitad de dos transiciones.



**Figura 4.5:** Se ilustra el funcionamiento de la espectroscopía de polarización. El haz de bombeo está circularmente polarizado e induce un medio birrefringente. El haz de prueba está linealmente polarizado. Dado que ahora el gas es birrefringente las componentes horizontales y verticales del haz de prueba se absorben de forma distinta. La absorción de cada componente es registrada por dos detectores.



**Figura 4.6:** Espectro obtenido con espectroscopía de polarización. El espectro ahora produce una señal de error. En esta señal las pendientes se corresponden con las frecuencias de transición. En la figura se muestra la pendiente de la transición  $5P_{3/2}F = 3 \rightarrow 5D_{5/2}F = 4$ .

La espectroscopía de polarización es similar a la de absorción saturada, véase la figura 4.5. En ambas espectroscopías se hacen incidir haces contrapropagantes a una muestra atómica. En espectroscopía de polarización, el haz de bombeo está polarizado circularmente. Por las reglas de selección dipolar, luz con polarización  $\sigma^+$  lleva a los átomos al subnivel con mayor proyección  $M_F$ , y luz  $\sigma^-$  los lleva al subnivel con menor proyección  $M_F$ . Dado que el haz de bombeo induce un subnivel preferencial  $M_F$  en el medio, luz con polarizaciones  $\sigma^+$  ó  $\sigma^-$  se absorbe de forma distinta. En otras palabras se ha inducido un medio birrefringente. El haz de prueba tiene polarización lineal, sin embargo la polarización lineal se puede descomponer como la suma de polarizaciones circulares  $\sigma^+$  y  $\sigma^-$ . Las polarizaciones vertical u horizontal ( $V$  y  $H$ ) se pueden escribir como:

$$V = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\sigma^+ - \sigma^-), \quad (4.9)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^+ + \sigma^-). \quad (4.10)$$

Por ello, las componentes de polarización vertical y horizontal del haz de prueba se absorben de forma distinta. En espectroscopía de polarización dichas componentes se separan después de haber pasado el medio, y la potencia de cada componente es registrada. Como es de esperarse la suma de las potencias, produce una señal de espectroscopía de absorción saturada. La resta de las potencias produce una señal adecuada para anclar un láser a una frecuencia de transición atómica [3] (véase la figura 4.6). Esta señal es llamada señal de error o de dispersión.

El láser de 780 nm se ancla mediante espectroscopía de absorción saturada, y el láser de 776 nm se ancla con espectroscopía de polarización pero en este caso el haz de bombeo es el láser de 780 nm, y el de prueba el láser de 776 nm. A esta técnica se le conoce como espectroscopía de dos fotones. Con esta técnica es posible producir espectros para la transición  $5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2}$ , con los cuales se puede anclar el láser de 776 nm a referencia atómica. La luz de 780 nm pasa por un proceso de amplificación de potencia y modulación de frecuencia mediante un láser esclavo, dicho trabajo se encuentra en la tesis [62].

La conservación de momento en el FWM bajo los niveles 4.1 produce luz azul (420 nm) colimada. La potencia de la luz azul depende de la población de átomos en el nivel  $5D_{5/2}$ . Para poblar ese nivel se pueden utilizar dos procesos: transición paso a paso, ó una transición de dos fotones. En el primer proceso, los láseres de bombeo se sintonizan para hacer posible la transición  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2} \rightarrow 5D_{5/2}$ , es decir el láser de 780 nm se sintoniza para ser resonante con una transición  $5S_{1/2}F \rightarrow 5P_{3/2}F'$ , y el láser de 776 nm se sintoniza a una transición  $5P_{3/2}F' \rightarrow 5D_{5/2}F''$ . En la transición de dos fotones, se busca que las frecuencias del láser 780 nm  $\omega_1$  y la frecuencia del láser de 776 nm  $\omega_2$  sean tales que  $\omega_1 + \omega_2$  corresponda a la frecuencia de una transición  $5S_{1/2} \rightarrow 5D_{5/2}$ . En [52] se realiza un estudio de forma experimental sobre la generación de luz azul colimada. En él se encuentra que la mayor potencia en la luz azul se obtiene cuando el láser de 780 nm se sintoniza exactamente a resonancia atómica, pero el láser de 776 nm se encuentra ligeramente desintonizado al rojo por unos 30 MHz. En este trabajo se decidió utilizar una transición paso a paso a pesar de no ser el proceso más eficiente, ya que experimentalmente resulta más sencillo anclar a resonancia atómica. En concreto, el láser de 780 nm se sintoniza a la transición  $5S_{1/2}F = 2 \rightarrow 5P_{3/2}F = 3$  del rubidio 87. El láser de 776 nm se sintoniza a una transición  $5P_{3/2}F = 3 \rightarrow 5D_{5/2}F = 4$ . Esta transición se elige pues es una transición cíclica, es decir los átomos del estado  $5D_{5/2}F = 4$  sólo pueden decaer al estado  $5P_{3/2}F = 3$ . Si se hubiese escogido una  $F'$  distinta a 4 en  $5D_{5/2}F = 4$ , entonces los átomos podrían caer a estados diferentes al  $5P_{3/2}F = 3$ , y por lo tanto ya no se volverían a excitar con el haz sintonizado a  $5P_{3/2}F = 3 \rightarrow 5D_{5/2}F'$ .

#### 4.4.2. Generación de luz paramétrica

Las espectroscopías de los haces de bombeo (780 nm, 776 nm) en el FWM de la figura 4.1 se realizan en una mesa distinta a la mesa en la cual se realiza el FWM, figura 4.2. La luz sintonizada de los haces de bombeo se lleva a la mesa del experimento con fibra óptica. La luz de los haces de bombeo llega a la mesa del experimento linealmente polarizada.

La polarización del haz de 776 nm se ajusta a ser polarización horizontal mediante una placa  $\lambda/2$ , pues el SLM funciona con luz horizontalmente polarizada. La luz es ampliada con un telescopio justo antes de incidir sobre el SLM para cubrir la mayor área posible de la superficie del SLM. Y así cuando llegue a la celda de espectroscopía se aumenta el área de interacción de la luz con los átomos. El tamaño de los haces se puede apreciar en la figura 2.6. Para producir haces estructurados, la luz de 776 nm pasa por el proceso de filtrado descrito en el capítulo 2. La luz de 780 nm es amplificada mediante un telescopio para igualar el tamaño del haz de 776 nm. Los haces de 780 nm y 776 nm son superpuestos con un filtro de interferencia. El filtro (Semrock LL01-780-25) deja pasar luz de  $780 \pm 1,5$  nm bajo incidencia normal, pero al rotarse cambia la frecuencia de transmisión. En el arreglo 4.2 el filtro se ha girado  $28^\circ$  para transmitir

de luz a 776 nm, y reflejar la luz de 780 nm. En el camino de los dos haces superpuestos se coloca una placa  $\lambda/2$ , y un cubo divisor de haz polarizante. La placa  $\lambda/2$  controla la potencia de luz reflejada por el cubo. La luz reflejada es monitoreada por una cámara CMOS. Para ver la luz estructurada en la cámara se obstruye el haz de 780 nm. La polarización de ambos haces es convertida a polarización circular de la misma orientación mediante una placa  $\lambda/4$ , esta elección de la polarización de los haces de bombeo incrementa la potencia de la luz azul. Esto ocurre ya que es más eficiente la transición  $5S_{1/2} \rightarrow 5D_{5/2}$ , cuando los átomos se encuentran distribuidos en menos subniveles Zeeman [52]. Para concentrar los átomos en menos niveles se utiliza polarización circular, pues esta lleva a los átomos a un nivel con la mayor ó menor proyección  $m_F$  dependiendo de la orientación de la polarización. Ambos láseres de bombeo tienen que tener la misma orientación, para así concentrar los átomos en menos niveles. Se eligen polarizaciones circulares inversas, entonces la transición con el láser de 780 nm conduce a los átomos al estado  $5P_{3/2}F = 3|m_F|_{max}$ , pero los decaimientos de la segunda excitación tenderían a caer en otra proyección  $m_F$ , y por lo tanto los átomos se empezarían a distribuir en varios subniveles Zeeman.

Los haces de bombeo entran a la celda de forma co-propagante, y cada uno tiene una potencia de alrededor de 10 mW. Dado que los dos haces de bombeo tienen una longitud de onda similar (780 nm y 776 nm) entonces estos haces deben de ser o estar cercanos a ser colineales, y con la misma dirección de propagación. En una configuración, contra-propagante la conservación de momento lineal no es satisfecha, pues el lado izquierdo de la ecuación 4.4 sería casi cero, pero dado que las otras dos longitudes de ondas son un orden de magnitud distintas entonces su suma no podría dar cero, y por tanto no se generaría luz azul colimada. El argumento anterior queda expresado en la desigualdad:

$$\frac{1}{776} - \frac{1}{780} \ll \frac{1}{420} - \frac{1}{5200}, \quad (4.11)$$

el lado izquierdo de la desigualdad equivale a  $6.6 \times 10^{-6}$ , y el lado derecho a  $2.1 \times 10^{-3}$ .

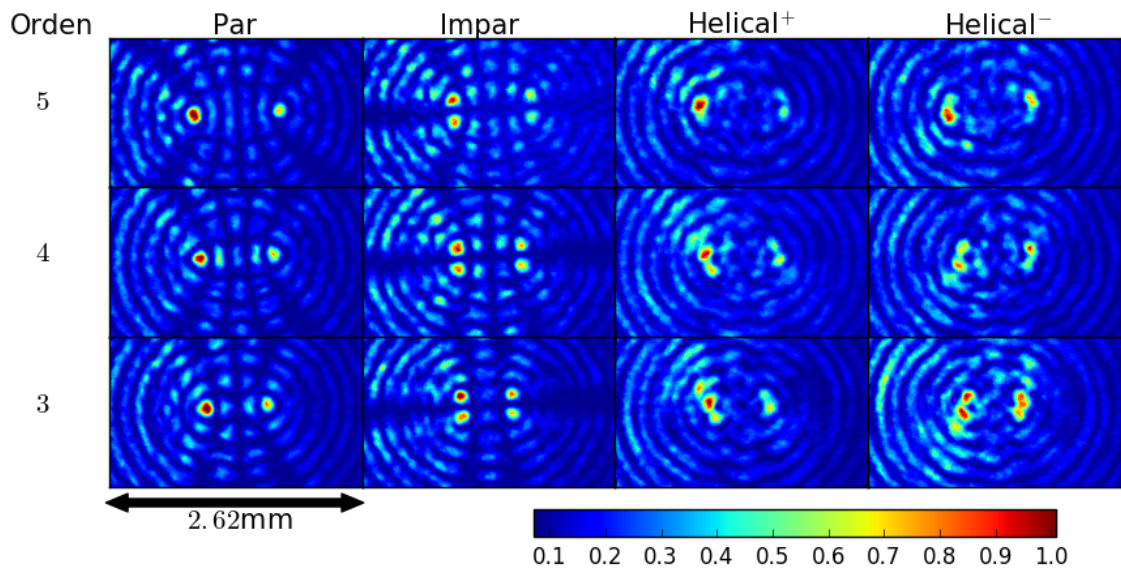
La celda se encuentra dentro de un horno. El objetivo del horno es incrementar la densidad atómica dentro de la celda. El incremento de temperatura en la celda incrementa la densidad atómica, pues en las paredes de la celda se depositan átomos de rubidio que son liberados con la aplicación de calor. Por la ley de los gases ideales se esperaría que la densidad disminuyera pues aumentar la temperatura aumenta el volumen sin embargo, el gas se encuentra contenido en la celda, y por ello el volumen se mantiene constante. La caracterización de densidad atómica contra temperatura fue realizada en la tesis [63]. En el experimento la luz azul comienza a ser visible a partir de  $80^\circ$  lo que corresponde a una densidad de alrededor de  $10^{11} \text{cm}^{-3}$  átomos.

La luz al salir de la celda de espectroscopía tiene tres componentes de frecuencia 420 nm, 776 nm, 780 nm, dado que nos interesa estudiar las frecuencias de decaimiento la luz pasa por un filtro de 420 nm (Thorlabs FB420-10). El decaimiento de  $5,23 \mu\text{m}$  no alcanza a salir de la celda, pues la celda de espectroscopía absorbe luz de esa longitud de onda. Para analizar la herencia de fase, la luz azul pasa por un interferómetro de Michelson con espejos ligeramente desalineados (ver capítulo 3). Si se quiere ver la herencia de intensidad se bloquea uno de los brazos del interferómetro.

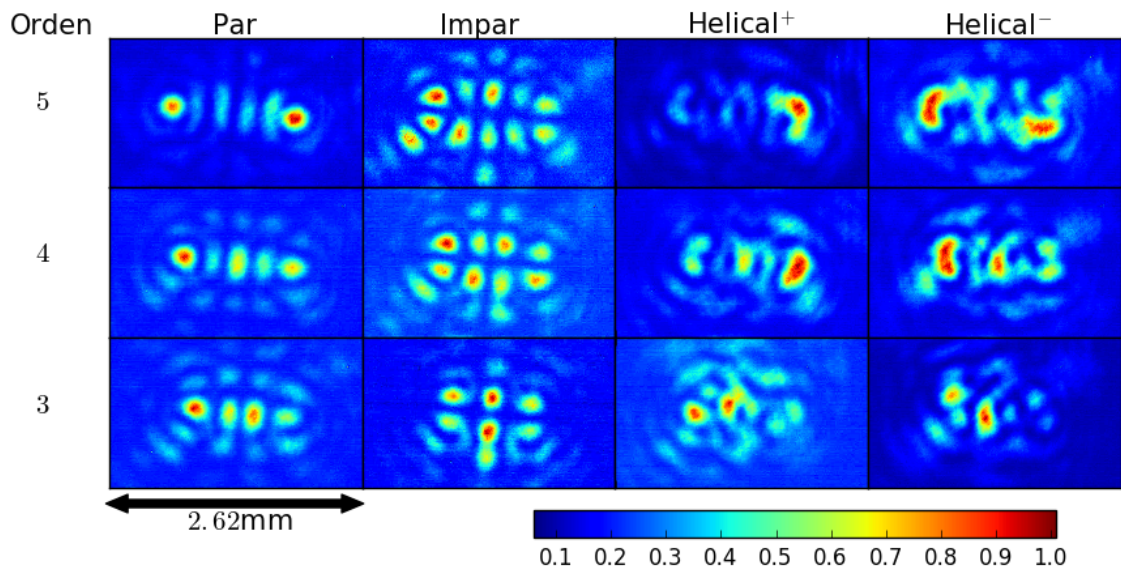
## 4.5. Transferencia en intensidad

La herencia de estructura de intensidad en imágenes en FWM en gases atómicos ha sido demostrada de forma experimental en [18],[17],[16]. Una explicación teórica del fenómeno se puede encontrar en [53], en este artículo se describe la propagación de un haz en el caso paraxial dentro de un medio atómico con una polarización eléctrica debida al FWM. En dicho artículo

se utiliza el mismo esquema de niveles que el aquí usado, pero la explicación se remite a haces de bombeo con una estructura Laguerre-Gauss.



**Figura 4.7:** Estructura espacial de intensidades de haces de Mathieu en el haz de bombeo de 776 nm. En la figura se muestran haces de Mathieu pares, impares, helicoidales y la ultima columna son los conjugados de los haces helicoidales. Las fotografías de los haces fueron tomadas por la cámara CMOS que se encuentra antes de la celda en el arreglo 4.2



**Figura 4.8:** Herencia de estructura de haces de Mathieu. La figura se constituye de las fotografías del haz azul colimado de 420 nm, cuando el haz de 776 nm ha sido dotado de la estructura de la figura superior. Como se puede ver la estructura espacial se ha heredado del haz de bombeo hacia el haz de decaimiento.

En la figura 4.7 se muestra la estructura del haz de bombeo de 776 nm, y en la figura 4.8 se muestra la herencia de estructura en el haz azul. En nuestro caso, el haz de bombeo de 780 nm es un haz Gaussiano. La herencia de estructura en nuestro caso se puede entender como que el haz de 780 nm excita a los átomos que se encuentren dentro de la sección transversal del haz. El haz de 776 nm sólo excita en las regiones en las que su intensidad es distinta de cero, y por ello únicamente los átomos que se encuentran en dichas regiones emiten luz azul, en consecuencia la estructura del haz de 776 nm es reproducida por la luz azul. Cuando los haces de bombeo no se encuentran totalmente superpuestos, en el haz azul se reproduce la región del 776 nm que se

sobrepone con el haz de 780 nm. Para detallar el mecanismo de herencia de haces de bombeo hacia los haces de decaimiento aún es preciso desarrollar un modelo teórico de este fenómeno. Este modelo debe tomar en cuenta estructuras arbitrarias en los haces de bombeo. El modelo se espera que describa la estructura en intensidad y fase en los haces de decaimiento.

En las figuras 4.7,4.8 se muestran haces tipo Helical<sup>+</sup>, y haces tipo Helical<sup>-</sup>. Los haces Helical<sup>+</sup> son los haces helicoidales que se han descrito a lo largo de la tesis, mientras que los haces Helical<sup>-</sup> son el complejo conjugado de los haces helical estándar. Al conjugar la fase se invierte el sentido de rotación de los vórtices, y por ello se invierte la carga topológica. En la figura 4.7 se puede ver que el eje de los vórtices en los haces Helical<sup>+</sup> ha girado ligeramente en sentido horario, y en los haces Helical<sup>-</sup> el giro es antihorario. Como ya se mencionó anteriormente la rotación se predijo en [49].

## 4.6. Transferencia en fase

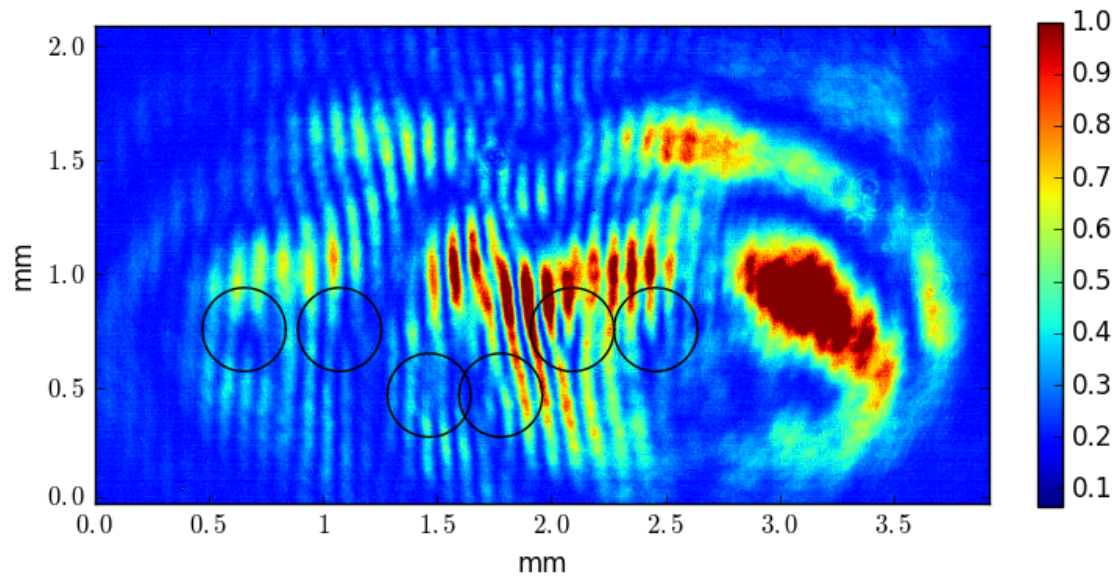
La herencia de estructura no se limita a la intensidad, también se transfiere la estructura de fase al haz de decaimiento. Para verificar este fenómeno se hizo uso del interferómetro de Michelson en el arreglo 4.2. En la figura 4.9 se muestra el haz azul interfiriendo consigo mismo cuando el haz de bombeo se estructura como un haz helicoidal de orden 4 con 4 singularidades. En la figura 4.9 se observan tenedores, y por ello las singularidades de fase se deben de haber heredado en el haz de 420 nm. La orientación de los tenedores entre los haces se encuentra invertida, es decir si en un haz se forman tenedores que se abren hacia arriba, en el otro haz se forman tenderos que abren hacia abajo, véase el final de la sección 3.2. El haz de bombeo de 776 nm tiene 4 vórtices, por lo que se espera que el haz de decaimiento también presente 4 vórtices. Como el haz azul de decaimiento se divide en dos partes se esperan 8 tenedores en el patrón de interferencia, 4 por cada haz. En la figura solo es posible ver 6 tenedores, sin embargo al cambiar la alineación de los haces es posible hacer aparecer a los 2 tenedores restantes, pero al hacer esto otros tenedores desaparecen. Para asegurar que los tenedores provienen de una singularidad, se obstruye uno de los haces azules, y se procede a identificar los posibles vórtices en el haz restante. Una vez identificados se desbloquea el haz obstruido, y se observa si los tenedores se forman en las zonas en las que se sospecha existen vórtices.

En la figura 4.10 se desfazan las componentes par e impar de un haz helicoidal de un haz Mathieu de orden 5. Es decir se introduce un desfase:

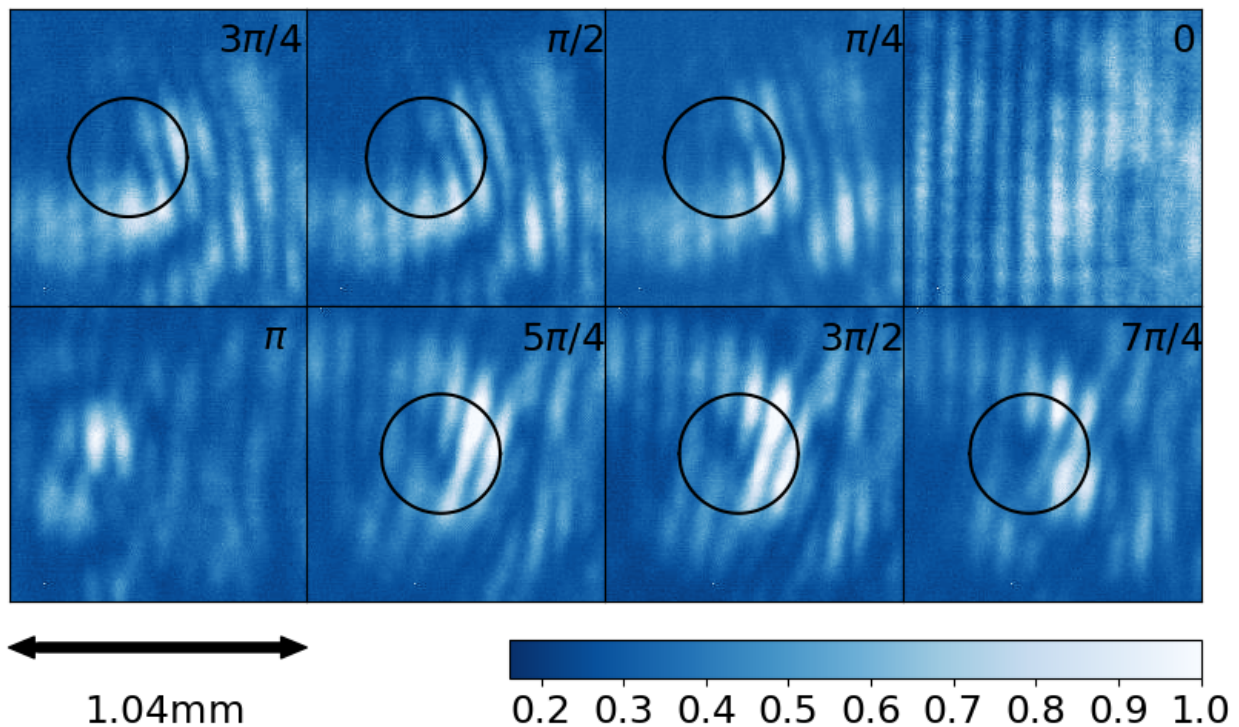
$$\mathcal{A}_m(q)C e_m(\xi, q) c e_m(\eta, q) + e^{i\theta} \mathcal{B}_m(q)S e_m(\xi, q) s e_m(\eta, q), \quad (4.12)$$

el ángulo  $\theta$  se encuentra indicado en la parte superior izquierda de cada subfigura de la figura 4.10. Para el ángulo  $\theta = 0$  no se observan tenedores pues eso equivale a sumar la parte par e impar del haz helicoidal, pero los haces pares o impares no tienen fases complejas, y por ello no se puede generar un vórtice. Así mismo en  $\theta = \pi$  no hay tenedores pues sólo se restan la parte par e impar. En este caso la estructura de franjas no se observa de forma tan clara como en  $\theta = 0$ , pero si se verificó que no se presentarán tenedores. Entre la fila superior e inferior de la figura 4.10 hay una inversión de la carga topológica de los haces, esto se explica ya que cualquier haz con  $\theta > \pi$  es el conjugado de un haz con una  $\theta < \pi$ . En específico el ángulo  $\theta = \pi/2$  se corresponde con los haces helicoidales estándar, y  $\theta = 3\pi/2$  con los haces Helical<sup>-</sup> mostrados en la figura 4.7.





**Figura 4.9:** Interferencia en el haz de decaimiento azul cuando ha sido separado en dos haces. Como bombeo en el haz de 776 nm se utilizó un haz helicoidal de orden 4 con 4 singularidades. En el patrón de interferencia se forman tenedores, lo cual significa que el haz de decaimiento posee singularidades. Los tenedores visibles se encierran en círculos.



**Figura 4.10:** Patrones de interferencia en el haz azul de 420 nm, cuando se bombea un haz helicoidal de orden 5 con sus componentes pares e impares desfasadas por un factor  $e^{i\theta}$ . El ángulo  $\theta$  en esta figura se recorre en sentido antihorario. En la figura solo se muestra el efecto del desfase sobre una sola singularidad en el haz, pero el efecto del desfase afecta a todas las singularidades del haz.

# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

Para realizar simulaciones numéricas de la propagación de los haces se generalizó una aproximación de la transformada de Fourier de una versión de una dimensión a una de dos dimensiones. Esta aproximación permite transformar regiones rectangulares del espacio de configuraciones a regiones rectangulares en el espacio de Fourier. Al aproximar la transformada de Fourier de dos dimensiones a través de la DFT de dos dimensiones, se tiene el inconveniente de que al transformar regiones que estén representadas por matrices no cuadradas se obtiene una transformada en donde el espacio de Fourier está distorsionado, la aproximación usada en esta tesis resuelve dicho inconveniente. Con esta aproximación se obtuvieron acuerdos cualitativos entre los haces generados, y los simulados.

Se realizó FWM en configuración diamante, con un haz de bombeo Gaussiano, y un haz de Mathieu. El proceso no lineal genera haces paramétricos: uno en el infrarrojo medio y el otro azul. Se logró heredar la estructura del haz de Mathieu hacia el haz de decaimiento azul. Si los haces de bombeo se encuentran totalmente superpuestos entonces se hereda toda la estructura del haz de Mathieu, sin embargo se puede seleccionar una región del haz de Mathieu a heredar al controlar las regiones entre las que los haces de bombeo se superponen. La herencia no es perfecta pues existe divergencia en el haz azul (ver figuras 4.7-4.8). Al ver solamente el haz azul es posible determinar el tipo de haz de Mathieu bombeado, es decir si es par, impar ó helicoidal. En el caso de los haces pares o impares también se puede distinguir el orden del haz.

La fase del haz de Mathieu también se hereda, pues los vórtices del haz de Mathieu se presentan en el haz azul. La detección de vórtices se consiguió con un interferómetro de Michelson en el cual los haces de cada brazo del interferómetro llegan ligeramente inclinados al plano de observación, y además los haces no se superponen totalmente. La presencia de vórtices genera un patrón de interferencia en donde aparecen tenedores en la posición de los vórtices.

La herencia de estructura en intensidad se comprobó al tomar fotografías del haz azul, el cual diverge. En adelante se buscará realinear el telescopio para el haz de 776 nm del arreglo 4.2, y lograr así haces azules que sean invariantes ante propagación. Se esperan haces invariantes pues hemos visto que se copia la estructura de intensidad y de fase, y por ello si se tienen haces invariantes como bombeo es razonable que aparezcan haces invariantes como salida. Se buscará incluir el efecto de “autoregeneración” de los haces invariantes hacia los haces azules. El efecto de autoregeneración se refiere al fenómeno en el cual un haz es bloqueado parcialmente por un objeto, y por ello deformado después del objeto. La haces que se autoregeneran recuperan su forma después de haber sido bloqueados. De lograr esto se tendrá un sistema de conversión de frecuencias en haces invariantes robusto, pues aún ante desalineación entre el láser de 776 nm y el de 780 nm se obtendrán haces azules de la forma deseada. En otras palabras se conseguirá que aún cuando los láseres de bombeo no entren completamente superpuestos a la celda se obtenga la forma del haz invariante bombeado, esto ya que la estructura no heredada es como si hubiese sido bloqueada por un objeto.

Para conocer los límites de similitud entre la estructura de los haces bombeados, y los haces de decaimiento en el FWM de la figura 4.1 se requiere realizar un modelo teórico que describa a los haces de decaimiento. Este modelo podría describir como se reparte el OAM de los haces bombeados en los haces de decaimiento. Este trabajo sería relevante para la generación haces de decaimiento entrelazados en OAM [64].

No fue posible detectar el haz paramétrico infrarrojo producto del FWM, ya que la celda de espectroscopía absorbe luz con esa frecuencia. Recientemente el grupo experimental al que pertenezco logró anclar un láser a la transición  $5P_{3/2} \rightarrow 5D_{3/2}$ . Esto produce un FWM con dos frecuencias de decaimiento en el infrarrojo cercano, y por ello detectables. El experimento aquí descrito se podría repetir con este FWM, y estudiar experimentalmente la transferencia de OAM a los dos haces de decaimiento. Los haces paramétricos posiblemente exhiben correlaciones cuánticas [64].

Se buscará realizar experimentos de efecto Faraday con haces vectoriales en rubidio con miras a desarrollar un magnetómetro.



# Apéndice A

## Funciones de Mathieu

Las funciones de Mathieu fueron introducidas por Émile Mathieu en 1868 [29], al estudiar vibraciones en una membrana elíptica. El objetivo de este apéndice, es mostrar algunas de las características más importantes de las funciones de Mathieu, y las propiedades necesarias de dichas funciones para su implementación computacional. Las funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se obtienen al separar la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones  $(\nabla^2 + k^2)\Phi$ , cuando esta ha sido analizada bajo separación de variables en el sistema elíptico cilíndrico con coordenadas  $(\xi, \eta)$ . Es decir  $\Phi = H(\eta)\Xi(\xi)$ . La separación conduce a la ecuación de Mathieu (A.1) y a la ecuación de Mathieu modificada (A.2):

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + (a - 2q\cos(2\eta))H = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} - (a - 2q\cosh(2\xi))\Xi = 0, \quad (\text{A.2})$$

$a$  es la constante de separación. El parámetro  $q$  relaciona el vector de propagación  $k$  con la distancia entre focos de las elipses del sistema elíptico  $2h$ ,  $q$  está dado por  $q = k^2 h^2 / 4$ . Para asegurar una única solución a un punto dado en el espacio, se buscan soluciones periódicas con periodo  $2\pi$ , de otra forma se tendrían soluciones distintas para  $\eta$  y  $\eta + 2\pi$ , sin embargo dichos números representan la misma posición.

Sólo algunas parejas  $a$  y  $q$  proporcionan soluciones periódicas en la ecuación de Mathieu (A.1). Por ejemplo, si  $q = 0$  y  $a > 0$  entonces se tienen como soluciones  $\cos(\sqrt{a}\eta)$ ,  $\sin(\sqrt{a}\eta)$ . Esto ocurre, pues si  $q = 0 \Rightarrow h = 0$ , y por ello las elipses del sistema elíptico han colapsado a círculos. Dada una  $q$  existen  $a_m$  tales que llevan a soluciones periódicas en (A.1). El índice  $m$  es un entero que puede tomar cualquier valor entero  $0, 1, 2, \dots$ . El parámetro  $a_m$  se conoce como el valor característico de la ecuación.

Las soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu exhiben paridad. A las soluciones pares con valor característico  $a_m$  se les asigna el nombre de cosenos elípticos  $ce_m$ , y a las impares senos elípticos  $se_m$ . El valor característico es distinto para cada tipo de solución, pero ambos valores se pueden calcular a través de fracciones continuas [65]. Introduciendo la notación:

$$X_1 - \frac{x_2}{X_2 \pm X_3} = X_1 - \frac{x_2}{X_2 \pm \frac{x_3}{X_3}}, \quad (\text{A.3})$$

$$V_m = \frac{a - m^2}{q}, \quad (\text{A.4})$$

para las soluciones pares se obedece:

$$\begin{aligned} V_0 - \frac{2}{V_2 - \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \dots}}} &= 0, \\ V_1 - 1 - \frac{1}{V_3 - \frac{1}{V_5 - \frac{1}{V_7 - \dots}}} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

y en las soluciones impares se cumple:

$$\begin{aligned} V_2 - \frac{1}{V_4 -} \frac{1}{V_6 -} \frac{1}{V_8 -} \cdots &= 0, \\ V_1 + 1 - \frac{1}{V_3 -} \frac{1}{V_5 -} \frac{1}{V_7 -} \cdots &= 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Para obtener una aproximación de los valores característicos es necesario cortar la fracción continua en un orden  $V_m$ , construir un polinomio equivalente de grado  $m$  cuya variable sea  $a$ , y calcular las raíces del polinomio. Cada raíz se corresponde con un valor característico  $a_m$ , y se ordenan de acuerdo a  $a_0 < a_1 < \cdots < a_m$ . En este trabajo se tomaron polinomios de 12 elementos, lo que trae asociado un error numérico de menos de  $10^{-9}$  [66] en el valor característico. Una vez obtenido el valor característico  $a_m$  se construyen soluciones a la ecuación de Mathieu (A.1) y la ecuación de Mathieu modificada (A.2) a través de un desarrollo en series de Fourier. En el párrafo siguiente se muestra como calcular los coeficientes del desarrollo de Fourier.

Las funciones de Mathieu muestran dos periodos distintos  $\pi$  o  $2\pi$ . Las funciones de Mathieu con valor característico  $a_{2m}$  tienen periodo  $\pi$ , y aquellas con  $a_{2m+1}$ ,  $2\pi$ . En el desarrollo en series de Fourier, las funciones de Mathieu de periodo  $\pi$  solo muestran coeficientes de Fourier pares  $A_{2m}$ , y las de periodo  $2\pi$  solo presentan coeficientes de Fourier impares  $A_{2m+1}$ . En adelante, seguiré la notación de [65],[66],[29] en la cual los coeficientes de Fourier de las funciones pares  $ce_m$  se designan por  $A_m$ , y los coeficientes de las funciones impares se designan por  $B_m$ . Las relaciones de recurrencia entre los coeficientes están dadas por [65]:

$$\begin{aligned} aA_0 - qA_2 &= 0, \\ (a - 1)A_1 - q(A_1 + A_3) &= 0, \\ (a - m^2)A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2}) &= 0, \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned} (a - 4)B_2 - qB_4 &= 0, \\ (a - 1)B_1 + q(B_1 - B_3) &= 0, \\ (a - m^2)B_m - q(B_{m-2} + B_{m+2}) &= 0. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Para calcular los coeficientes se utiliza un método matricial [66], en el cual se construyen matrices a través de las relaciones de recurrencia. En total se construyen 4 matrices: una matriz para calcular los coeficientes pares de  $ce_m$ , una matriz para los coeficientes impares de  $ce_m$ , una matriz para los coeficientes pares de  $se_m$  y la ultima para los coeficientes impares de  $se_m$ . Como ejemplo, se muestra la matriz para los coeficientes pares de  $ce_{2m+1}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 + q - a & q & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 3^2 - a & q & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 5^2 - a & q & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 7^2 - a & q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_7 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{0}. \tag{A.9}$$

Una vez obtenidos los coeficientes de Fourier se procede a realizar una suma para obtener las

funciones  $ce_m, se_m$ .

$$\begin{aligned}
ce_{2m}(\eta, q) &= \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}(q) \cos(2j\eta), \\
ce_{2m+1}(\eta, q) &= \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}(q) \cos([2j+1]\eta), \\
se_{2m+2}(\eta, q) &= \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+2}(q) \sin([2j+2]\eta), \\
se_{2m+1}(\eta, q) &= \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1}(q) \sin([2j+1]\eta).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Las soluciones de la ecuación de Mathieu modificada (A.2) se designan por los símbolos  $Ce_m$  y  $Se_m$ . Esto ya que dada la forma de (A.1) y (A.2), las funciones de Mathieu y las funciones de Mathieu modificadas se relacionan por  $Ce_m(\xi, q) = ce_m(i\xi, q)$  y  $Se_m(\xi, q) = se_m(i\xi, q)$ . En principio, para obtener las funciones modificadas bastaría cambiar las funciones trigonométricas de (A.10), por sus correspondientes funciones hiperbólicas. Sin embargo, dichas series no convergen en los reales positivos. Una forma de solucionar el problema de convergencia es aproximar las funciones de Mathieu modificadas, a través de un desarrollo en funciones de Bessel [67].

$$\begin{aligned}
Ce_{2m}(\xi, q) &= \frac{ce_{2m}(0, q)}{A_0} \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j} J_{2j}(u), \\
Ce_{2m+1}(\xi, q) &= \frac{ce_{2m+1}(0, q)}{\sqrt{q}A_1} \coth(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1} J_{2j+1}(u), \\
Se_{2m+2}(\xi, q) &= \frac{se'_{2m+2}(0, q)}{qB_2} \coth(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2) B_{2j+2} J_{2j+2}(u), \\
Se_{2m+1}(\xi, q) &= \frac{se'_{2m}(0, q)}{\sqrt{q}B_1} \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1} J_{2j+1}(u),
\end{aligned} \tag{A.11}$$

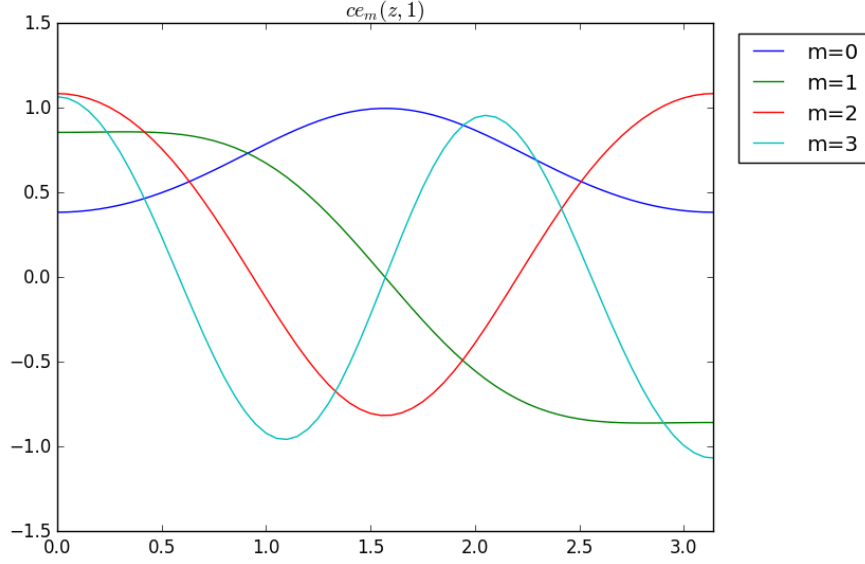
con  $u = 2\sqrt{q} \sinh(\xi)$ . En las figuras [A.1],[A.2] se ilustran las funciones de Mathieu  $ce_m$  y  $Ce_m$ . Las funciones de Mathieu exhiben un comportamiento oscilatorio, y las funciones de Mathieu Modificadas asemejan la grafica de un movimiento oscilatorio amortiguado.

## A.1. Coeficientes en Haces Helicoidales

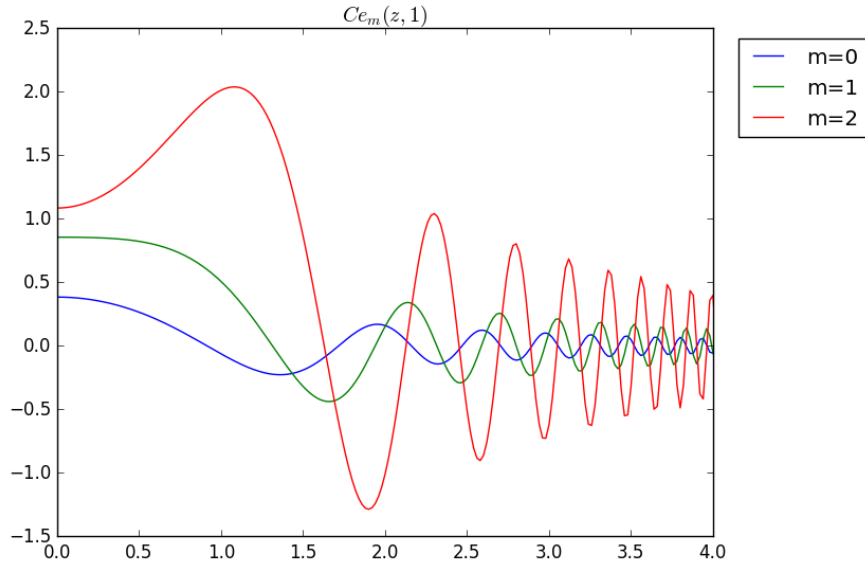
Los haces de Mathieu son haces adifraccionales, y por ello se pueden encontrar a través de la integral de Whittaker [24]:

$$E(r) = \exp(ik_z z) \int_0^{2\pi} A(\phi) \exp[ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)] d\phi, \tag{A.12}$$

donde  $k_z, k_t$  son los vectores de propagación longitudinal y transversal, y  $A(\phi)$  es el espectro angular del haz. Los haces de Mathieu se obtienen al sustituir  $A(\phi) = ce_m(\eta, q), se_m(\eta, q)$  en el primer caso se obtienen los haces de Mathieu pares y en el otro los Mathieu impares. Una combinación lineal de ambos espectros con un desfase de  $\pi/2$  produce un nuevo tipo de haz de Mathieu, los haces helicoidales. Se introduce un espectro angular  $A(\phi) = ce_m(\eta, q) + ise_m(\eta, q)$ . El haz resultante tiene la forma  $\mathcal{A}_m(q)Ce_m(\xi, q)ce_m(\eta, q) + i\mathcal{B}_m(q)Se_m(\xi, q)se_m(\eta, q)$ ,



**Figura A.1:** Funciones de Mathieu pares a distintos ordenes.



**Figura A.2:** Funciones de Mathieu modificadas pares a distintos ordenes.

los coeficientes  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  se consiguen al realizar la integral de Whittaker [67].

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_m(q) &= \begin{cases} \frac{2\pi A_0^{2n}}{ce_{2n}(0, q)ce_{2n}(\pi/2, q)} & \text{si } m = 2n \\ \frac{-2\pi\sqrt{q}A_1^{2n+1}}{ce_{2n+1}(0, q)ce'_{2n+1}(\pi/2, q)} & \text{si } m = 2n + 1 \end{cases} \\
 \mathcal{B}_m(q) &= \begin{cases} \frac{2\pi\sqrt{q}B_1^{2n+1}}{se'_{2n+1}(0, q)se_{2n+1}(\pi/2, q)} & \text{si } m = 2n + 1 \\ \frac{2\pi q B_2^{2n+2}}{se'_{2n+2}(0, q)se_{2n+2}(\pi/2, q)} & \text{si } m = 2n + 2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

donde se introdujo la notación  $A_j^m$  para el  $j$ -ésimo coeficiente de Fourier de las funciones de Mathieu  $ce_m$ , y de forma similar se define  $B_j^m$ .

# Apéndice B

## Potenciales de Hertz

Una técnica común dentro de electromagnetismo para encontrar los campos eléctrico y magnético es utilizar una formulación potencial. Es decir, construir funciones ya sea escalares o vectoriales a través de las cuales los campos pueden ser deducidos. Los potenciales  $\phi$  y  $A$  son ampliamente usados, sin embargo no son la única formulación potencial. En 1888 Hertz introdujo un potencial vectorial  $\Pi$  para el estudio de un sistema radiativo [68]. Siguiendo la formulación de los potenciales de Hertz de Nisbet [37], me propongo a introducir los potenciales de Hertz.

Las ecuaciones de Maxwell están dadas por:

$$\nabla \cdot D = 4\pi\rho, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla \times H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad (\text{B.4})$$

y las relaciones constitutivas:

$$D = \epsilon \cdot E, \quad (\text{B.5})$$

$$B = \mu \cdot B. \quad (\text{B.6})$$

En estas relaciones se está suponiendo que el material tiene una permitividad  $\epsilon$  y una permeabilidad  $\mu$  que presentan un carácter tensorial. En caso de tener un material isotrópico y homogéneo, basta ver a dichos tensores como el producto de la permitividad o la permeabilidad con la identidad. Los campos están relacionados con los potenciales  $\phi$  y  $A$  a través de:

$$E = -\nabla\phi - \frac{\dot{A}}{c}, \quad (\text{B.7})$$

$$B = \nabla \times A. \quad (\text{B.8})$$

El objeto de introducir potenciales es encontrar ecuaciones diferenciales más sencillas de resolver que las ecuaciones de Maxwell. En general, las ecuaciones de Maxwell dan pie a ecuaciones acopladas para el campo eléctrico y magnético. Bajo la norma de Lorentz, se obtienen ecuaciones desacopladas para  $\phi$  y  $A$ . Dicha norma es aquella que cumple:

$$\frac{1}{c} \dot{\phi} + \nabla \cdot (\epsilon \cdot A) = 0, \quad (\text{B.9})$$

Resultando así en las ecuaciones desacopladas:

$$\frac{\ddot{\phi}}{c^2} - \nabla \cdot (\epsilon \cdot \nabla \phi) = 4\pi\rho, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{c^2} \epsilon \cdot \ddot{A} + \nabla \times (\mu^{-1} \cdot [\nabla \times A]) - \epsilon \cdot \nabla (\nabla \cdot \epsilon \cdot A) = \frac{4\pi}{c} j. \quad (\text{B.11})$$

Cuando se tienen materiales homogéneos, se obtienen ecuaciones de onda para  $\phi$  y  $A$ .

Las ecuaciones (B.10) y (B.11) se transforman en ecuaciones más simétricas al introducir los potenciales de Hertz  $\Pi_e$  y  $\Pi_m$ .

$$\phi = -\nabla \cdot (\epsilon \cdot \Pi_e), \quad (\text{B.12})$$

$$A = \frac{1}{c} \dot{\Pi}_e + \epsilon^{-1} \cdot (\nabla \times \Pi_m). \quad (\text{B.13})$$

Dado que los potenciales convencionales pueden ser obtenidos a través de los potenciales de Hertz, se dice que los potenciales de Hertz son superpotenciales. Con el fin de simplificar las ecuaciones que obedecen los potenciales de Hertz se introducen las funciones vectoriales  $Q_e, Q_m, R_e, R_m$ . En el caso homogéneo, es decir que la permitividad y la permeabilidad sean funciones escalares se busca que los potenciales de Hertz obedezcan ecuaciones de onda, cuyas fuentes sean  $Q_e, Q_m, R_e, R_m$ . Las funciones  $R_e$  y  $R_m$  redefinen a los potenciales  $\phi$  y  $A$ , pues ahora estos potenciales se fijan para generar  $[E - 4\pi\epsilon^{-1} \cdot R_e]$  y  $[B + 4\pi R_m]$  en vez de  $E$  y  $B$ . Dado que  $E$  y  $B$  obedecen la ley de Faraday (B.2) y la no existencia de monopolos (B.3),  $R_e$  y  $R_m$  están constreñidos a cumplir:

$$\nabla \cdot R_e = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$-\frac{1}{c} \dot{R}_m + \nabla \times (\epsilon^{-1} \cdot R_e) = 0, \quad (\text{B.15})$$

$Q_e$  y  $Q_m$  se definen para simplificar las ecuaciones diferenciales que cumplen los potenciales de Hertz, resultando estas en:

$$\nabla \cdot Q_e = -\rho, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{1}{c} \dot{Q}_e + \nabla \times (\mu^{-1} \cdot Q_m) = 0, \quad (\text{B.17})$$

Con lo cual, las ecuaciones de los potenciales de Hertz son:

$$\frac{1}{c^2} \epsilon \cdot \ddot{\Pi}_e + \nabla \times (\mu^{-1} \cdot [\nabla \times \Pi_e]) = 4\pi(Q_e + R_e), \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{1}{c^2} \mu \cdot \ddot{\Pi}_m + \nabla \times (\epsilon^{-1} \cdot [\nabla \times \Pi_m]) = 4\pi(Q_m + R_m), \quad (\text{B.19})$$

El campo electromagnético se obtiene al reexpresar los potenciales  $\phi$  y  $A$  en términos de los potenciales de Hertz, y aplicando que dichos potenciales generan  $[E - 4\pi\epsilon^{-1} \cdot R_e]$  y  $[B + 4\pi R_m]$ . Con ello:

$$E = 4\pi\epsilon^{-1} \cdot R_e - \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}_e - \frac{1}{c} \epsilon^{-1} \cdot (\nabla \times \dot{\Pi}_m), \quad (\text{B.20})$$

$$B = -4\pi R_m + \frac{1}{c} \nabla \times \dot{\Pi}_e + \nabla \times (\epsilon^{-1} \cdot [\nabla \times \Pi_m]), \quad (\text{B.21})$$

$$D = -4\pi Q_e - \frac{1}{c} \nabla \times \dot{\Pi}_m + \nabla \times (\mu^{-1} \cdot [\nabla \times \Pi_e]), \quad (\text{B.22})$$

$$H = 4\pi\mu^{-1} \cdot Q_m - \frac{1}{c^2} \ddot{\Pi}_m + \frac{1}{c} \mu^{-1} \cdot (\nabla \times \dot{\Pi}_e). \quad (\text{B.23})$$

## B.1. Transformaciones de norma

Los potenciales de Hertz admiten transformaciones de norma las cuales serán útiles para describir el efecto Faraday. Basta que dichas transformaciones dejen invariantes las ecuaciones (B.14)-(B.17), o en todo caso que preserven los campos (B.20)-(B.23). La primera condición se satisface al introducir las normas  $G, g, L, l$ , bajo:

$$Q'_e = Q_e + \nabla \times (\mu^{-1} \cdot G), \quad (\text{B.24})$$

$$Q'_m = Q_m - \frac{1}{c} \dot{G} - \mu \cdot \nabla g, \quad (\text{B.25})$$

$$R'_e = R_e - \frac{1}{c} \dot{L} - \epsilon \cdot \nabla l, \quad (\text{B.26})$$

$$R'_m = R_m - \nabla \times (\epsilon^{-1} \cdot L). \quad (\text{B.27})$$

La segunda condición se cumple al introducir los cambios de norma  $\Gamma, \gamma, \Lambda, \lambda$ :

$$\Pi'_e = \Pi_e + \epsilon^{-1} \cdot (\nabla \times \Gamma) - \frac{1}{c} \dot{\Lambda} - \nabla \lambda, \quad (\text{B.28})$$

$$\Pi'_m = \Pi_m - \frac{1}{c} \dot{\Gamma} - \nabla \gamma - \mu^{-1} \cdot (\nabla \times \Lambda), \quad (\text{B.29})$$

siempre y cuando cumplan:

$$4\pi g = \frac{1}{c^2} \ddot{\gamma} + \frac{1}{c} \dot{\xi}, \quad (\text{B.30})$$

$$4\pi G = \frac{1}{c^2} \mu \cdot \ddot{\Gamma} + \nabla \times (\epsilon^{-1} \cdot \nabla \times \Gamma) - \mu \cdot \nabla \xi, \quad (\text{B.31})$$

$$4\pi l = \frac{1}{c^2} \ddot{\lambda} + \frac{1}{c} \dot{\zeta}, \quad (\text{B.32})$$

$$4\pi L = \frac{1}{c^2} \mu \cdot \ddot{\Lambda} + \nabla \times (\epsilon^{-1} \cdot \nabla \times \Lambda) - \mu \cdot \nabla \zeta. \quad (\text{B.33})$$

$$(\text{B.34})$$

donde  $\xi, \zeta$  son funciones arbitrarias.

# Apéndice C

## Efecto Faraday

En el primer capítulo se introdujeron los haces vectoriales, y se describió la propagación de dichos haces en el vacío. En este apéndice se describe la propagación de los haces cuando estos se encuentran inmersos en un medio girotrópico. Un medio girotrópico es aquel en el cual la relación constitutiva entre el campo eléctrico  $E$  y el vector de desplazamiento  $D$  obedece  $D = \epsilon E + iE \times g$  en presencia de un campo magnético  $H$ . El vector  $g$  es proporcional a  $H$ . Al igual que en el caso de propagar en vacío, se utiliza una descripción basada en los potenciales de Hertz. Dado que se busca encontrar efecto Faraday supondré la presencia de un campo magnético  $H$ . El tratamiento seguirá un procedimiento equivalente al descrito en [39], pero mostrará que el efecto se da en haces invariantes.

El efecto Faraday consiste en la rotación de la polarización lineal de luz cuando esta se encuentra inmersa dentro de un medio material, y existe un campo magnético paralelo al eje de propagación de la luz. Típicamente se explica adjudicando birrefringencia circular (birrefringencia en luz circularmente polarizada) a un material cuando este se somete a un campo magnético. La luz linealmente polarizada se puede descomponer como una suma de luz circular izquierda, y luz circular derecha. Cuando luz linealmente polarizada viaja a través de un material con birrefringencia circular, sus componentes izquierda y derecha se desfazan, y en consecuencia su suma produce luz linealmente polarizada, pero con un plano de polarización rotado. La explicación anterior normalmente toma en cuenta ondas planas [57]. Sin embargo, el mismo fenómeno se presenta con luz con diferente estructura espacial.

Los materiales girotrópicos presentan un permitividad no lineal bajo la presencia de un campo magnético. El efecto no lineal es alrededor de unas cien veces más débil que el efecto lineal [69]. La magnitud del efecto no lineal se encuentra codificada en el vector  $g$ , el cual es proporcional al campo magnético  $g = fH$ . La constante  $f$  es conocida como la susceptibilidad magneto-óptica. En adelante se despreciarán los efectos a segundo orden o superiores en  $g$ .

La permitividad  $\hat{\epsilon}$  de un medio girotrópico es un tensor de orden dos, su acción sobre un campo  $A$  es de la forma  $\hat{\epsilon} \cdot A = \epsilon A + iA \times g$ . El tensor inverso  $\hat{\epsilon}^{-1}$  actúa sobre un campo  $\tilde{A}$  como  $\hat{\epsilon}^{-1} \cdot \tilde{A} = \epsilon^{-1} \tilde{A} + i\epsilon^{-2} \tilde{A} \times g$ . El escalar  $\epsilon$  es la permitividad del medio en ausencia de campo magnético. La expresión anterior desprecia efectos cuadráticos en  $g$ . La permeabilidad del medio  $\mu$  se considera como un escalar. En el apéndice de potenciales de Hertz, se escribieron las ecuaciones que deben de cumplir los potenciales de Hertz B.18-B.19, y sus normas B.24-B.27. En el medio material que se está suponiendo no existen cargas libres, por ello las fuentes  $Q_e, Q_m, R_e, R_m$  se pueden igualar a cero. El tratamiento del problema a través de potenciales de Hertz, ahora se muestra ventajoso, pues aún con la permitividad como un tensor, las ecuaciones para los potenciales se escriben como:

$$\frac{\epsilon}{c^2} \ddot{\Pi}_e + \frac{i}{c^2} \ddot{\Pi}_e \times g + \mu^{-1} \nabla \times \nabla \times \Pi_e = 4\pi[\mu^{-1} \nabla G - \frac{1}{c} \dot{L} - \epsilon \nabla l - i \nabla l \times g], \quad (\text{C.1})$$



$$\frac{\mu}{c^2}\ddot{\Pi}_m + \nabla \times [\epsilon^{-1}\nabla \times \Pi_m - i\epsilon^{-2}(\nabla \times \Pi_m) \times g] = 4\pi[-\frac{1}{c}\dot{G} - \mu\nabla h - \nabla \times (\epsilon^{-1}L - i\epsilon^{-2}L \times g)], \quad (\text{C.2})$$

Las funciones  $G, L, l, h$  son funciones de norma. Las dos ecuaciones anteriores aún resultan complicadas de resolver pues  $\Pi_e$  y  $\Pi_m$  son potenciales vectoriales. Sin embargo, en [37] se muestra un camino para reducir las ecuaciones vectoriales anteriores en dos ecuaciones con potenciales escalares. Supongamos que se está lidiando con luz con un vector de propagación en la dirección  $\hat{z}$ , y también existe un campo magnético con dirección  $\hat{z}$ , por tanto  $g$  se puede reescribir como  $g = f\bar{H}\hat{z}$ , con  $\bar{H}$  la magnitud del campo magnético. Se definen los potenciales escalares  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  como  $\Pi_e = \mu\Pi_1\hat{z}$ , y  $\Pi_m = \epsilon\Pi_2\hat{z}$ . Y las funciones de norma  $G, L, l, h$  se escriben como [39]:

$$\begin{aligned} G &= i\mu f\bar{H}l\hat{z}, \\ L &= -i\mu f\bar{H}h\hat{z}, \\ -4\pi\mu h &= \hat{z} \cdot \nabla\Pi_2, \\ -4\pi\epsilon l &= \hat{z} \cdot \nabla\Pi_1, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

con tales elecciones se obtienen las ecuaciones de los potenciales escalares:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon\mu}{c}\ddot{\Pi}_1 - \frac{1}{c}\nabla^2\Pi_1 &= -if\bar{H}\hat{z} \cdot \nabla\dot{\Pi}_2, \\ \epsilon\mu\ddot{\Pi}_2 - \nabla^2\Pi_2 &= \frac{if\bar{H}\mu}{\epsilon c}\hat{z} \cdot \nabla\dot{\Pi}_1, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

una vez encontrados los potenciales escalares, los campos electromagnéticos se expresan por medio de ellos:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\epsilon^{-1}}{c}\nabla(\hat{z} \cdot \nabla\Pi_1) - \frac{\mu}{c}\ddot{\Pi}_1\hat{z} - (\nabla\dot{\Pi}_2) \times \hat{z} - if\bar{H}\epsilon^{-1}\nabla\dot{\Pi}_2, \\ D &= \frac{if\bar{H}}{\epsilon c}[\nabla(\hat{z} \cdot \nabla\Pi_1)] \times \hat{z} - \epsilon(\nabla\dot{\Pi}_2) \times \hat{z} - \frac{1}{c}\nabla^2\Pi_1\hat{z} + \frac{1}{c}\nabla(\hat{z} \cdot \nabla\Pi_1), \\ H &= \mu^{-1}B = \frac{if\bar{H}}{\epsilon c}(\hat{z} \cdot \nabla\dot{\Pi}_1)\hat{z} + \mu^{-1}\nabla(\hat{z} \cdot \nabla\Pi_2) - \epsilon\ddot{\Pi}_2\hat{z} + \frac{1}{c}(\nabla\dot{\Pi}_1) \times \hat{z}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Las ecuaciones C.4 se pueden resolver al introducir una función  $\Psi$ , y redefinir los potenciales escalares como  $\Pi_1 = \alpha\Psi$ , y  $\Pi_2 = \beta\Psi$ . Con  $\alpha, \beta$  constantes. Estos potenciales satisfacen C.4 si  $\Psi = e^{-i\omega t + ik_z z}W(q_1, q_2)$  con  $w$  la frecuencia de la luz,  $k_z$  la componente longitudinal del vector de propagación, y  $W(q_1, q_2)$  una función de las coordenadas generalizadas  $q_1, q_2$  tales que  $q_1, q_2$  son coordenadas en el plano transversal de la luz, y  $W$  satisface la ecuación de Helmholtz en las coordenadas transversales, es decir  $\nabla_{\perp}^2 W + k_{\perp}^2 W = 0$ . Con  $k_{\perp}$  el vector transversal de propagación de la luz. Cualquier haz adifraccional puede ser descrito por la función  $W$ , por ello se pueden generar versiones vectoriales de los haces adifraccionales que resuelvan C.4.

Al sustituir los potenciales  $\Pi_1, \Pi_2$  en C.4 se obtienen dos ecuaciones homogéneas para  $\alpha$  y  $\beta$ . Para no tener soluciones triviales el determinante del sistema de dichas ecuaciones debe ser cero. Esta condición impone una relación de dispersión:

$$\epsilon\mu w^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2 \pm f\bar{H}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}k_z w, \quad (\text{C.6})$$

esta relación al ser cuadrática en  $k_z$  da origen a dos modos de propagación:

$$k_z^{(\pm)} = (\epsilon\mu w^2 - k_{\perp}^2 + \frac{f^2\bar{H}^2\mu w^2}{4\epsilon})^{1/2} \pm \frac{f\bar{H}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}w, \quad (\text{C.7})$$

cada modo tiene asociado constantes  $\alpha, \beta$  distintas. Para distinguirlas se utiliza la notación  $\alpha^{(\lambda)}, \beta^{(\lambda)}$  con  $\lambda = \pm$ . Las constantes se encuentran relacionadas por:

$$\beta^{(\lambda)} = i\frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\alpha^{(\lambda)}. \quad (\text{C.8})$$

Las componentes cartesianas del campo electromagnético para el modo  $\lambda$  quedan descritas por:

$$E_x^{(\lambda)} \pm iE_y^{(\lambda)} = \mp \frac{2}{k_\perp} e_\pm^{(\lambda)} (\partial_x \pm i\partial_y) \Psi, \quad E_z^{(\lambda)} = e_0^{(\lambda)} \Psi, \quad (\text{C.9})$$

$$D_x^{(\lambda)} \pm iD_y^{(\lambda)} = \mp \frac{2}{k_\perp} d_\pm^{(\lambda)} (\partial_x \pm i\partial_y) \Psi, \quad D_z^{(\lambda)} = d_0^{(\lambda)} \Psi, \quad (\text{C.10})$$

$$H_x^{(\lambda)} \pm iH_y^{(\lambda)} = \mp \frac{2}{k_\perp} h_\pm^{(\lambda)} (\partial_x \pm i\partial_y) \Psi, \quad H_z^{(\lambda)} = h_0^{(\lambda)} \Psi. \quad (\text{C.11})$$

Los coeficientes están dados por:

$$2e_\pm^{(\lambda)} = -i \frac{k_\perp}{\epsilon c^2} [\pm k_z^{(-\lambda)} + \lambda \sqrt{\epsilon \mu} w] \alpha^{(\lambda)}, \quad e_0^{(\lambda)} = \frac{k_\perp^2}{\epsilon c^2} \alpha^{(\lambda)}, \quad (\text{C.12})$$

$$2d_\pm^{(\lambda)} = -i \frac{k_\perp}{c^2} (1 \pm \frac{f\bar{H}}{\epsilon}) [\pm k_z^{(-\lambda)} + \lambda \sqrt{\epsilon \mu} w] \alpha^{(\lambda)}, \quad e_0^{(\lambda)} = \frac{k_\perp^2}{c^2} \alpha^{(\lambda)}, \quad (\text{C.13})$$

$$2h_\pm^{(\lambda)} = \frac{k_\perp}{c^2} [w \pm \frac{\lambda k_z^{(\lambda)}}{\sqrt{\epsilon \mu}}] \alpha^{(\lambda)}, \quad h_0^{(\lambda)} = i\lambda \frac{k_\perp^2}{\sqrt{\epsilon \mu} c^2} \alpha^{(\lambda)}, \quad (\text{C.14})$$

obsérvese que en la ausencia del campo magnético inicial, las expresiones para el campo electromagnético se reducen a las expresiones del capítulo 1.3.3. Y así mismo  $D_x^{(\lambda)} \pm iD_y^{(\lambda)} = (\epsilon \pm f\bar{H})E_x^{(\lambda)} \pm iE_y^{(\lambda)}$ , por lo que el material se vuelve lineal en ausencia del campo.

Para hacer notar que existe efecto Faraday, se utilizará la aproximación paraxial  $k_\perp \ll w/c$ . A modo de justificación de la aproximación, nótese que el vector de propagación transversal de los haces descritos en el capítulo dos es del orden de  $10 \text{ mm}^{-1}$ , mientras que  $w/c$  es del orden de  $0,1 \text{ nm}^{-1}$  que equivale a  $10^5 \text{ mm}^{-1}$ . Bajo esta aproximación  $k_z^{(\lambda)} \approx \sqrt{\epsilon \mu} w (1 + \lambda f \bar{H} / 2\epsilon)$ . Así mismo, los coeficientes  $d_\pm^{(\lambda)}$  se aproximan por:

$$d_+^{(+)} \approx -\frac{k_\perp}{c} \epsilon w \beta^{(+)}, \quad d_+^{(-)} \approx 0 \approx d_-^{(+)}, \quad d_-^{(-)} \approx -\frac{k_\perp}{c} \epsilon w \beta^{(-)}. \quad (\text{C.15})$$

El campo de desplazamiento total se obtiene al sumar las componentes de los dos modos de propagación. El cálculo se simplifica pues los términos que son multiplicados por los coeficientes  $d_+^{(-)}, d_-^{(+)}$  son despreciados. Para mostrar efecto Faraday basta observar el comportamiento del cociente entre las componentes  $x, y$  del campo de desplazamiento, pues si el cociente cambia conforme el haz se propaga esto significa un cambio en la orientación del vector de desplazamiento, y por ello un cambio en polarización. Por la forma de los campos C.9-C.11, y la forma de  $\Psi$  las componentes  $x, y$  del campo de desplazamiento se expresan como una suma donde cada sumando está multiplicado por una expresión de la forma:

$$\exp(ik_z^{(\lambda)} z) \approx \exp(i\sqrt{\epsilon \mu} w (1 + \lambda f \bar{H} / 2\epsilon) z) = \exp(i\sqrt{\epsilon \mu} w) \exp(i\lambda \frac{wf\bar{H}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} z), \quad (\text{C.16})$$

el término  $\exp(i\sqrt{\epsilon \mu} w)$  es proporcional a todos los sumandos, y por ello cuando se efectúa el cociente entre las componentes  $x, y$ , entonces dicho término se elimina. Sin embargo, el término  $\exp(i\lambda \frac{wf\bar{H}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} z)$  no se cancela pues cada sumando depende de  $\lambda$ . El punto de este párrafo es mostrar que la dependencia del cociente entre las componentes  $x, y$  en la propagación del haz está determinada por la constante  $\kappa = \frac{wf\bar{H}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ . El resultado del cociente es:

$$\frac{D_y}{D_x} = \tan(\kappa z + \phi), \quad (\text{C.17})$$

en general  $\phi$  es una función de la posición y también depende la forma de  $\Psi$ . Con la ecuación C.17 se concluye que se presenta efecto Faraday para el tipo de haces vectoriales recién descritos.

# Bibliografía

- [1] J. F. Reintjes, *Nonlinear Optical Parametric Processes in Liquids and Gases*. Academic Press, 1984.
- [2] D. W. Preston, “Doppler-free saturated absorption: Laser spectroscopy,” *American Journal of Physics*, vol. 64, no. 11, pp. 1432–1436, 1996.
- [3] C. P. Pearman, C. S. Adams, S. G. Cox, P. F. Griffin, D. A. Smith, and I. G. Hughes, “Polarization spectroscopy of a closed atomic transition: applications to laser frequency locking,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 35, no. 24, p. 5141, 2002.
- [4] Y. R. Shen and N. Bloembergen, “Theory of stimulated brillouin and raman scattering,” *Phys. Rev.*, vol. 137, pp. A1787–A1805, Mar 1965.
- [5] R. Boyd, *Nonlinear Optics*. Academic Press, 3 ed., 2008.
- [6] A. D. B. y D. A. Dunmu, “Kerr effect in inert gases and sulphur hexafluoride,” *Transactions of the Faraday Society*, vol. 64, pp. 1776–1783, Mar 1968.
- [7] D. McGloin and K. Dholakia, “Bessel beams: Diffraction in a new light,” *Contemporary Physics*, vol. 46, no. 1, pp. 15–28, 2005.
- [8] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley&Sons, 1962.
- [9] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes,” *Phys. Rev. A*, vol. 45, pp. 8185–8189, Jun 1992.
- [10] J. W. R. Tabosa and D. V. Petrov, “Optical pumping of orbital angular momentum of light in cold cesium atoms,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 4967–4970, Dec 1999.
- [11] S. Franke-Arnold, “Optical angular momentum and atoms,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 375, no. 2087, 2017.
- [12] A. V. Anton Zeilinger, Alois Mair and G. Weihs, “Entanglement of the orbital angular momentum states of photons,” *Nature*, vol. 412, 2001.
- [13] A. White, C. Smith, N. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, R. McDuff, C. Weiss, and C. Tamm, “Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser,” *Journal of Modern Optics*, vol. 38, no. 12, pp. 2531–2541, 1991.
- [14] M. S. Soskin, V. N. Gorshkov, M. V. Vasnetsov, J. T. Malos, and N. R. Heckenberg, “Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices,” *Phys. Rev. A*, vol. 56, pp. 4064–4075, Nov 1997.

- [15] N. B. Baranova, A. V. Mamaev, N. F. Pilipetsky, V. V. Shkunov, and B. Y. Zel'dovich, "Wave-front dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 73, pp. 525–528, May 1983.
- [16] D.-S. Ding, Z.-Y. Zhou, W. Huang, B.-S. Shi, X.-B. Zou, and G.-C. Guo, "Experimental up-conversion of images," *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 033803, Sep 2012.
- [17] V. Boyer, A. M. Marino, R. C. Pooser, and P. D. Lett, "Entangled images from four-wave mixing," *Science*, vol. 321, no. 5888, pp. 544–547, 2008.
- [18] G. Walker, A. S. Arnold, and S. Franke-Arnold, "Trans-spectral orbital angular momentum transfer via four-wave mixing in rb vapor," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 243601, Jun 2012.
- [19] A. M. Akulshin, R. J. McLean, E. E. Mikhailov, and I. Novikova, "Distinguishing nonlinear processes in atomic media via orbital angular momentum transfer," *Opt. Lett.*, vol. 40, pp. 1109–1112, Mar 2015.
- [20] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly, "Diffraction-free beams," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1499–1501, Apr 1987.
- [21] Z. Hradil, J. Řeháček, Z. Bouchal, R. Čelechovský, and L. L. Sánchez-Soto, "Minimum uncertainty measurements of angle and angular momentum," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 243601, Dec 2006.
- [22] M. B. y Emil Wolf, *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [23] Z. Bouchal, "Nondiffracting optical beams: Physical properties, experiments, and applications," *Czechoslovak Journal of Physics*, vol. 53, pp. 537–578, Jul 2003.
- [24] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, and S. Chávez-Cerda, "Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams," *Opt. Lett.*, vol. 25, pp. 1493–1495, Oct 2000.
- [25] E. T. W. y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1927.
- [26] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Company, 2005.
- [27] J. C. Gutiérrez-Vega and M. A. Bandres, "Helmholtz–gauss waves," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 289–298, Feb 2005.
- [28] J. Gutiérrez-Vega, M. Iturbe-Castillo, G. Ramirez, E. Tepichin, R. Rodriguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda, and G. New, "Experimental demonstration of optical mathieu beams," *Optics Communications*, vol. 195, no. 1, pp. 35 – 40, 2001.
- [29] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford University Press, 1951.
- [30] S. Chávez-Cerda, J. C. Gutiérrez-Vega, and G. H. C. New, "Elliptic vortices of electromagnetic wave fields," *Opt. Lett.*, vol. 26, pp. 1803–1805, Nov 2001.
- [31] H. A. Kastrup, "Quantization of the canonically conjugate pair angle and orbital angular momentum," *Phys. Rev. A*, vol. 73, p. 052104, May 2006.
- [32] M. Soskin, S. V. Boriskina, Y. Chong, M. R. Dennis, and A. Desyatnikov, "Singular optics and topological photonics," *Journal of Optics*, vol. 19, no. 1, p. 010401, 2017.

- [33] D. G. Hall, “Vector-beam solutions of maxwell’s wave equation,” *Opt. Lett.*, vol. 21, pp. 9–11, Jan 1996.
- [34] M. A. Bandres and J. C. Gutiérrez-Vega, “Vector helmholtz–gauss and vector laplace–gauss beams,” *Opt. Lett.*, vol. 30, pp. 2155–2157, Aug 2005.
- [35] Q. Zhan, *Vectorial Optical Fields*. World Scientific Publishing Co, 2014.
- [36] S. Hacyan and R. Jáuregui, “A relativistic study of bessel beams,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 39, no. 7, p. 1669, 2006.
- [37] A. Nisbet, “Hertzian electromagnetic potentials and associated gauge transformations,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 231, no. 1185, pp. 250–263, 1955.
- [38] D. P. Biss and T. G. Brown, “Polarization-vortex-driven second-harmonic generation,” *Opt. Lett.*, vol. 28, pp. 923–925, Jun 2003.
- [39] S. H. y R Jáuregui, “Faraday effect and bessel beams in a magneto-optic medium,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 41, no. 1, p. 015402, 2008.
- [40] G. Labeyrie, C. Miniatura, and R. Kaiser, “Large faraday rotation of resonant light in a cold atomic cloud,” *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 033402, Aug 2001.
- [41] R. J. Hernández-Hernández, R. A. Terborg, I. Ricardez-Vargas, and K. Volke-Sepúlveda, “Experimental generation of mathieu–gauss beams with a phase-only spatial light modulator,” *Appl. Opt.*, vol. 49, pp. 6903–6909, Dec 2010.
- [42] N. Chattrapiban, E. A. Rogers, D. Cofield, I. Wendell T. Hill, and R. Roy, “Generation of nondiffracting bessel beams by use of a spatial light modulator,” *Opt. Lett.*, vol. 28, pp. 2183–2185, Nov 2003.
- [43] A. Vasara, J. Turunen, and A. T. Friberg, “Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 6, pp. 1748–1754, Nov 1989.
- [44] A. Jesacher, *Applications of spatial light modulators for optical trapping and image processing*. Tesis de doctorado, Leopold-Franzens University, 2007.
- [45] S. Hernández, “Análisis experimental de una transición cuadrupolar eléctrica en átomos a temperatura ambiente usando un haz con estructura espacial,” tesis de maestría, UNAM, 2017.
- [46] D. Bailey and P. Swarztrauber, “A fast method for the numerical evaluation of continuous fourier and laplace transforms,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 15, no. 5, pp. 1105–1110, 1994.
- [47] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice Hall, 1988.
- [48] F. Gori, G. Guattari, and C. Padovani, “Bessel-gauss beams,” *Optics Communications*, vol. 64, no. 6, pp. 491 – 495, 1987.
- [49] G. Indebetouw, “Optical vortices and their propagation,” *Journal of Modern Optics*, vol. 40, no. 1, pp. 73–87, 1993.
- [50] J. Valasek, *Introduction to Theoretical and Experimental Optics*. John Wiley & Sons, 1949.

- [51] Hetch, *Optics*. Addison-Wesley, 2002.
- [52] A. M. Akulshin, R. J. McLean, A. I. Sidorov, and P. Hannaford, “Coherent and collimated blue light generated by four-wave mixing in rb vapour,” *Opt. Express*, vol. 17, pp. 22861–22870, Dec 2009.
- [53] R. N. Lanning, Z. Xiao, M. Zhang, I. Novikova, E. E. Mikhailov, and J. P. Dowling, “Gaussian-beam-propagation theory for nonlinear optics involving an analytical treatment of orbital-angular-momentum transfer,” *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 013830, Jul 2017.
- [54] R. Hellwarth, “Theory of phase-conjugation by four-wave mixing in a waveguide,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 15, pp. 101–109, February 1979.
- [55] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley, “Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 2409–2412, Nov 1985.
- [56] G. K. Gulati, *Narrowband photon pairs from a cold atomic vapour for interfacing with a single atom*. Tesis de doctorado, National University of Singapore, 2015.
- [57] L. E. M. Landau L D and P. L. P, *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, 1984.
- [58] G. Nienhuis, “Analogies between optical and quantum mechanical angular momentum,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 375, no. 2087, 2017.
- [59] S. Chávez-Cerda, M. J. Padgett, I. Allison, G. H. C. New, J. C. Gutiérrez-Vega, A. T. O’Neil, I. MacVicar, and J. Courtial, “Holographic generation and orbital angular momentum of high-order mathieu beams,” *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 4, no. 2, p. S52, 2002.
- [60] D. J. Thompson and R. E. Scholten, “Narrow linewidth tunable external cavity diode laser using wide bandwidth filter,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 83, no. 2, p. 023107, 2012.
- [61] L. A. M. López, “Espectroscopía de dos fotones para experimentos con mezclado de cuatro ondas,” tesis de licenciatura, UNAM, 2017.
- [62] I. F. A. Aguillón, “Construcción y modulación de un láser esclavo para experimentos con rubidio,” tesis de licenciatura, UNAM, 2018.
- [63] D. S. Costa, “Determinación de la densidad atómica en función de la temperatura en una celda de espectroscopia,” tesis de licenciatura, UNAM, 2018.
- [64] S. F.-A. Rachel F. Offer, Dalius Stulga Erling Riis and A. S. Arnold, *Spiral bandwidth of four-wave mixing in Rb vapour*. arxiv:1805.08190, 2018.
- [65] M. A. y Irene Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 1972.
- [66] J. C. Gutiérrez-Vega, *Formal analysis of the propagation of invariant optical fields with elliptical symmetries*. Tesis de doctorado, INAOE, 2000.
- [67] I. G. y I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2007.

- [68] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, 1941.
- [69] J. Zak, E. Moog, C. Liu, and S. Bader, “Universal approach to magneto-optics,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 89, no. 1, pp. 107 – 123, 1990.