



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GENERACIÓN DE POTENCIALES ÓPTICOS
ARBITRARIOS PARA EL ESTUDIO Y MANIPULACIÓN
DE GASES CUÁNTICOS DE LITIO-6

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

JOSÉ LUIS LUGO CASTILLO

TUTOR

DR. JORGE AMIN SEMAN HARUTINIAN



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2025



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mi familia

Resumen

En los experimentos de átomos fríos y ultrafríos, una de las herramientas más importantes para la producción y manipulación de estos sistemas son los potenciales ópticos. Por este motivo, en el Laboratorio de Materia Ultrafría del IFUNAM hemos hecho esfuerzos importantes en el desarrollo de potenciales ópticos que confinan las y dan forma a las muestras producidas.

Esta tesis reporta uno de estos esfuerzos. El objetivo principal fue el diseño, construcción y caracterización de un sistema óptico para la creación de estos potenciales, en donde el elemento principal es un componente electro-óptico conocido como Dispositivo Digital de Microespejos (DMD por sus siglas en inglés).

Este dispositivo consiste de una superficie compuesta por más de 700 mil espejos del orden de $10\ \mu\text{m}$ de lado, los cuales pueden ser controlados individualmente, lo que permite moldear arbitrariamente el perfil de intensidad de un haz láser reflejado en su superficie. Más aún, esto proporciona a nuestro experimento la posibilidad de crear potenciales ópticos con geometría controlable, de forma estática o dinámica. Esto permite tener mucho mayor control de las condiciones en las que se realizan los experimentos y amplía considerablemente los fenómenos físicos que pueden explorarse.

El arreglo óptico construido nos permitió caracterizar las funciones del dispositivo y realizar pruebas de su desempeño por separado. Uno de los resultados más importantes del trabajo es el desarrollo y prueba de un algoritmo de retroalimentación, que se encarga de calcular un estado de la superficie del DMD que produzca los perfiles de intensidad deseados. Esto se realiza mediante un proceso iterativo que compara la luz reflejada por el DMD y una imagen objetivo, un buen punto de partida para su implementación en el experimento. El DMD ofrece la posibilidad realizar cambiar la

disposición de sus espejos a una tasa máxima de refresco de 22.727 kHz. Esto permite variar el perfil de intensidad del haz reflejado en escalas comparables a aquellas naturales del sistema, que se traduce en potenciales que varían de manera casi continua en el tiempo.

Índice general

1. Fundamentos	1
1.1. Gases ultrafríos de ${}^6\text{Li}$	5
1.1.1. Estructura energética del ${}^6\text{Li}$	5
1.1.2. Interacciones y resonancias de Feshbach	11
1.2. Bosones y fermiones	18
1.2.1. Gas de Bose no interactuante	20
1.2.2. Interacciones en el gas de Bose	23
1.2.3. Gas de Fermi	27
1.3. Superfluidez	29
1.3.1. Excitaciones elementales	30
1.3.2. Criterio de Landau	33
1.3.3. Vórtices cuantizados	35
2. Potenciales ópticos	36
2.1. Sistema de dos niveles	37
2.1.1. Ecuaciones ópticas de Bloch	40
2.1.2. Amortiguamiento en un dipolo clásico	41
2.1.3. Soluciones estacionarias	45
2.2. Fuerzas de radiación	47
2.2.1. Fuerza de esparcimiento	47
2.2.2. Fuerza dipolar	48
2.3. Trampas dipolares	50
2.4. Más allá del sistema de dos niveles	54

3. Potenciales arbitrarios	57
3.1. Características del DMD	58
3.1.1. Características físicas	58
3.1.2. Propiedades ópticas	60
3.1.3. Control y funcionamiento	66
3.2. Arreglo óptico para caracterización	69
3.2.1. Descripción del arreglo	69
3.2.2. Resolución	72
3.3. Potenciales estáticos	75
3.3.1. Diseño de las imágenes	76
3.3.2. Algoritmo de retroalimentación	84
3.3.3. Parámetros del algoritmo	89
3.3.4. Una estimación de la potencia requerida	95
3.3.5. Resultado de la aplicación del algoritmo	96
3.4. Potenciales dinámicos	98
 Conclusiones y perspectivas	 105
 Apéndices	 116
 A. Control del DMD	 116

Agradecimientos

A mi mamá Gabriela, siempre pendiente de mí, que no me diste respiro hasta que acabé este trabajo. A mi papá, José Luis, y mis abuelos Adrián y José Luis (QEPD), sin su apoyo yo no podría haber estudiado aquí. A Adriana, la gorda, por las porras que me echas. A Yaelito, por tu amistad y las aventuras. A Ena, mi mamá postiza. Al resto de mi querida familia que con su amor me impulsan a seguir adelante.

A Jorge, por darme la oportunidad de trabajar contigo, por tu paciencia y apoyo a lo largo de casi dos años. Por los manguitos enchilados, que alegran los lúgubres lunes.

A Jackson, por tus enseñanzas y consejos, las bromas, el café, y la pasión por la ciencia que tan naturalmente inculcas. Eres un gran guía y amigo, parece.

A Fernando y Juan Pablo, mis hermanos mayores, que me guiaron en mi descenso a las puertas del infierno. Gracias por su infinita paciencia, que yo necesito que se me repitan cien veces las cosas; tengan por seguro que les seguiré preguntando hasta el hartazgo. Y también a Natalia y Ernesto, mis hermanitos. Ustedes, familia LMU, hacen que pasarse el día en un sótano oscuro sea muy divertido.

A Bowen, Aurora, Daniel y Junita, gracias por su amistad que trasciende las distancias, los extraño mucho. Sigue en pie mi promesa.

Al camarada Edy Esquivel, de los Rydbergs, por tus consejos.

A Carlos Gardea y Rodrigo Gutiérrez, los maestros de la electrónica, por su ayuda en el laboratorio.

Especial agradecimiento a Giulia del Pace, cuyos trabajos de maestría y doctorado allanaron el camino y sirvieron de inspiración para la realización de este proyecto. Gracias también por tomarte el tiempo de aclarar las dudas que surgieron en el

proceso, tus sugerencias fueron de mucha ayuda. El agradecimiento se extiende a Giacomo Roati y Diego Hernández, por su gran ímpetu, las nuevas ideas, y el apoyo que brindan al grupo.

Por último, agradezco a los siguientes proyectos de investigación por el financiamiento proporcionado.

- Proyecto DGAPA/PAPIIT/UNAM IN105724, por financiamiento al experimento y las becas otorgadas.
- Proyecto de Ciencia de Frontera CF-2023-I-72 de CONACyT (hoy SECIHTI), por financiamiento al experimento y la beca otorgada.
- A la Coordinación de la Investigación Científica de la UNAM (CIC-UNAM), Proyectos LANMAC-2023, LANMAC-2024, y LANMAC-2025, por el financiamiento al laboratorio.

Capítulo 1

Fundamentos

El estudio experimental de sistemas ultrafríos ha surgido como una plataforma para investigar fenómenos cuánticos a gran escala en condiciones controladas [1]. Estos sistemas de muchos cuerpos en temperaturas cercanas al cero presentan comportamientos físicos distintos a la materia ordinaria, como lo son la condensación de Bose-Einstein o la superfluidez. Los resultados que pueden obtenerse de su producción y estudio sobrepasan cualquier otra herramienta de simulación computacional, principalmente por el número de partículas que lo componen, del orden de $10^4 - 10^6$, por lo que son una herramienta poderosa para motivar y corroborar avances en los modelos teóricos de muchos cuerpos.

En el Laboratorio de Materia Ultrafría (LMU) se utiliza ${}^6\text{Li}$ como ingrediente de estos gases, y se enfría a temperaturas debajo de los 100 nK para explorar estos regímenes. La elección de este isótopo como material de trabajo no es arbitraria. El ${}^6\text{Li}$ es una especie fermiónica que presenta resonancias de Feshbach magnéticas [2], un acoplamiento entre estados atómicos en el proceso de dispersión que da pie a la formación de pares de átomos. Estas permiten el control de la intensidad y naturaleza (repulsiva o atractiva) de las interacciones en el gas.

Dependiendo de la magnitud de estas interacciones y naturaleza (atractiva o repulsiva) se producen diferentes regímenes de interacción, facilitando el estudio de gases bosónicos o fermiónicos. Cuando las interacciones son repulsivas se dan estados moleculares bosónicos, que debajo de cierta temperatura dan lugar a la Condensación de

Bose-Einstein (BEC) [3]. Cuando las interacciones son atractivas se forman estados ligados equivalentes a los pares de Cooper descritos por la teoría de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [4], cuya separación es mayor que la distancia interatómica promedio. Alrededor de la resonancia se da el llamado cruce BEC-BCS, una zona de transición caracterizada por interacciones fuertes sin importar el signo, cuya descripción teórica es aún incompleta y constituye un tema de investigación actual muy activo [5].

El estudio experimental de estos sistemas es relativamente reciente. La realización experimental del primer BEC fue lograda en 1995 por E. Cornell y C. Wieman [6] utilizando ^{87}Rb , y poco después por W. Ketterle utilizando ^{23}Na [7], ambas especies bosónicas. Por otro lado, el primer gas degenerado de Fermi fue producido por D. Jin en 1998 utilizando ^{40}K [8]. En los años posteriores y hasta la fecha, los experimentos de gases ultrafríos han proliferado como herramienta para la simulación de fenómenos cuánticos, ampliando a cada paso el número de especies que han logrado condensarse. De especial importancia para el LMU y este trabajo son las observaciones de excitaciones colectivas en los distintos regímenes de interacción.

Aunado al control de las interacciones por medio de las resonancias de Feshbach, se pueden refinar las condiciones a las que se someten los gases degenerados por medio de potenciales ópticos. Utilizando haces láser desintonizados respecto de las frecuencias de resonancia atómicas se pueden aplicar fuerzas atractivas o repulsivas en torno a los máximos de intensidad de la luz para moldear la densidad de partículas en el espacio.

Previo a la realización de este trabajo, los únicos potenciales utilizados en el LMU han sido producidos por láseres infrarrojos que confinan a los gases en su foco. El perfil gaussiano de estos haces produce un potencial que puede aproximarse como armónico, dando lugar a gases alargados con forma de cigarro (*geometría prolata*). En esta geometría se han realizado experimentos para el estudio de las excitaciones colectivas llamadas *ondas de Faraday* [9].

No obstante, las posibilidades de modificar la geometría de los gases con este método se limitan a variar la intensidad del haz, la proporción entre las frecuencias armónicas de la trampa e incluso su posición en algunos micrómetros. Con vistas a

incrementar la capacidad de controlar la geometría de los gases se contempla utilizar un Dispositivo Digital de Microespejos (DMD, por sus siglas en inglés), un dispositivo perteneciente a la familia de Moduladores Espaciales de Luz (SLM) con la capacidad de modificar el perfil de intensidad de un haz incidente. Los SLM usualmente se utilizan en el plano de Fourier del sistema óptico, manipulando la fase de los campos incidentes y de esa manera producir perfiles de intensidad bidimensionales arbitrarios [10]. El DMD, si bien puede ser utilizado también en el plano de Fourier [11] [12], en este trabajo se utilizará para realizar imagen directa de los perfiles de intensidad, como es demostrado en [13] (Figura 1.1).

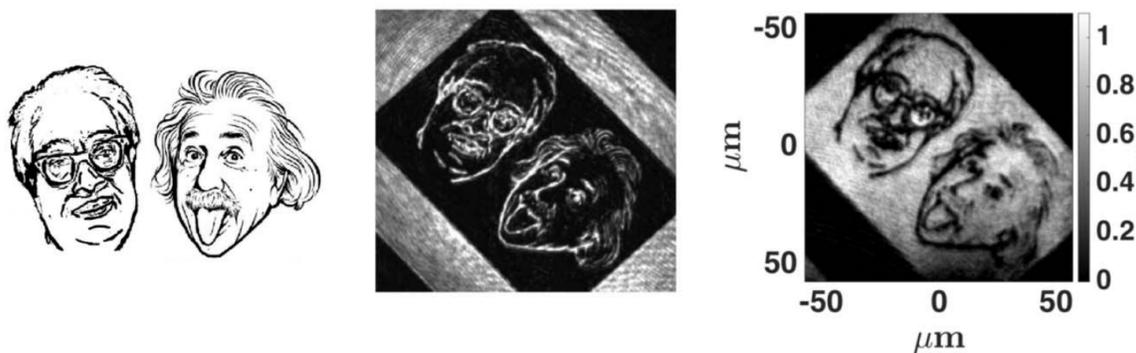


Figura 1.1: Rostros de Satyendra Nath Bose y Albert Einstein proyectados en un condensado de Bose-Einstein de ^{87}Rb utilizando un DMD. De izquierda a derecha, la imagen objetivo a proyectarse, el perfil de luz moldeado por el DMD y, por último, la imagen del condensado. Imagen obtenida de [13].

El DMD que se utiliza en el trabajo consiste en un arreglo de 1024×768 espejos de $13.68 \mu\text{m}$ de lado que pueden ser orientados en dos ángulos definidos. Tras fijar uno de ellos como el ángulo de reflexión, se obtiene efectivamente un arreglo de espejos ON (aquellos con la orientación adecuada) y espejos OFF (los que no), de modo que el haz reflejado hereda el patrón producido por este arreglo. Utilizando un haz desintonizado al azul de las transiciones se puede repeler a los átomos de las regiones de alta intensidad, abriendo las puertas a una gran variedad de potenciales y, consecuentemente, de condiciones físicas en las que estos sistemas cuánticos pueden ser explorados.

Esta tesis se dedica a la caracterización de este dispositivo, al aprendizaje de sus funcionalidades y la realización de pruebas que simulen las condiciones en las que

será implementado en el experimento. Se prepara el haz láser que se utilizará para los experimentos (532 nm) y se desarrolla un algoritmo de retroalimentación que se encarga de corregir las imperfecciones en el perfil de intensidad real con respecto al deseado que se derivan principalmente del modo inicial del haz y de las aberraciones producidas por el arreglo.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

- En este capítulo se exponen las bases sobre las cuales funciona el Laboratorio de Materia Ultrafría y, a grandes rasgos, los fenómenos que buscan estudiarse mediante la manipulación de gases cuánticos. De esta manera se contextualiza el trabajo realizado y se fundamenta su necesidad. Se presenta la materia prima con la que se trabaja en los experimentos: el ${}^6\text{Li}$, particularmente su espectro de energías y las interacciones que se dan en un gas ultrafrío. Se complementa con la teoría estadística básica de los gases de fermiones y bosones, haciendo énfasis en las particularidades observables experimentalmente. Por último, se mencionan algunos elementos de superfluidez.
- En el capítulo 2 se desarrolla la teoría de los potenciales ópticos, la interacción de la luz con los átomos y su aprovechamiento para manipular la densidad de partículas. Se da un tratamiento semiclásico con algunas aproximaciones, y al final se comenta sobre la validez de las mismas en el contexto de las aplicaciones para nuestro laboratorio.
- En el capítulo 3 se incluye todo lo referente al DMD, comenzando con una descripción del dispositivo, seguido del arreglo óptico que se diseñó para utilizar el dispositivo y de la descripción de los métodos utilizados para obtener potenciales arbitrarios, tanto estáticos como dinámicos. Se hace énfasis en la explicación del algoritmo de retroalimentación, el principal actor en la producción de estos potenciales. Se finaliza con una exploración de los potenciales dinámicos que pueden producirse.
- Se cierra con una propuesta a la implementación del DMD en el experimento

y algunos ejemplos de la aplicación del dispositivo en experimentos de gases ultrafríos.

1.1. Gases ultrafríos de ${}^6\text{Li}$

El litio, tercer elemento de la tabla periódica, es el metal más ligero. Como alcalino, la principal característica en su espectro de energías es la línea D , que consiste en realidad en un doblete formado por sublíneas que se denotan con D_1 y D_2 , siendo la primera la menos energética. Además, cuenta con un solo electrón de valencia, y su estado base tiene configuración $1S^22S^1$. Cuenta con dos isótopos estables: ${}^6\text{Li}$ y ${}^7\text{Li}$, el primero un fermión con espín nuclear $I = 1$ y el segundo un bosón con espín nuclear $I = 3/2$.

1.1.1. Estructura energética del ${}^6\text{Li}$

Para el estudio de los niveles energéticos del litio se utiliza una aproximación en la que se considera que la capa llena S , junto con el núcleo, produce un potencial central, efectivamente tratando al átomo como *hidrogenoide*. Tan solo considerando este potencial central de naturaleza coulombiana se obtiene un espectro de energías determinado por el *número principal* n .

$$E_n = -\frac{1}{2}\mu c^2 \alpha^2 \frac{Z^2}{n^2} \quad (1.1)$$

donde μ es la masa reducida del sistema, Z el número atómico y $\alpha \sim 1/137$ la *constante de estructura fina* [14].

El electrón, como partícula cargada que *orbita* el núcleo con momento angular orbital $\hat{\mathbf{L}}$ produce un momento dipolar magnético $\boldsymbol{\mu}_L$. Considerando la interacción de este momento con aquel producido por el espín, $\boldsymbol{\mu}_S$, da lugar a una energía de interacción \hat{H}_{so} :

$$\hat{H}_{so} = f(r)\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \quad (1.2)$$

Propiedad	Símbolo	Valor	
		D_1	D_2
Longitud de onda (vacío)	λ	670.992 421 nm	670.977 338 nm
Número de onda (vacío)	$k/2\pi$	14 903.298 cm^{-1}	14 903.633 cm^{-1}
Frecuencia	ν	446.768 643 THz	446.799677 THz
Tiempo de vida	τ	27.102 ns	27.102 ns
Ancho de línea	Γ	5.8724 MHz	5.8724 MHz
Velocidad de retroceso	v_{rec}	9.886 554 cm/s	9.886 776 cm/s
Temperatura por retroceso	T_{rec}	3.535 652 56 μK	3.535 822 52 μK

Tabla 1.1: Propiedades de las líneas D_1 y D_2 [16]

Este hamiltoniano de *acoplamiento espín-órbita* rompe la degeneración energética para los niveles n . Puede diagonalizarse utilizando el momento angular $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ mediante el conjunto completo de operadores que conmutan $\{\hat{J}^2, \hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{J}_z\}$. Junto con otras consideraciones, se obtiene una corrección a la energía con dependencia del número cuántico j (ec. 1.3) que identifica los eigenvalores de \hat{J}^2 y que según la teoría de adición de momento angular [15] adquiere valores enteros o semienteros tales que $|l - s| \leq j \leq l + s$.

$$\Delta E_F = E_n \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left[\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right] \quad (1.3)$$

A esto se le conoce como *corrección de estructura fina*. Cada nivel fino tiene una degeneración de grado $2j + 1$. Para el electrón, $s = 1/2$, de modo que para el nivel $n = 2$ hay dos desdoblamientos debido a \hat{H}_{so} determinados por $j = 1/2$ ($2S_{1/2}, 2P_{1/2}$) y $j = 3/2$ ($2P_{3/2}$). Por efecto Lamb [14], los niveles $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ se desdoblan de manera que $\Delta E(2S_{1/2}) < \Delta E(2P_{1/2}) < \Delta E(2P_{3/2}) < 0$. La línea D corresponde entonces a la transición entre el estado base y el nivel $1S^2 2P^1$, y las líneas D_1 y D_2 corresponden a las transiciones $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$ y $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{3/2}$, respectivamente.

La Tabla 1.1 contiene algunas propiedades de las líneas D_1 y D_2 . Las correcciones por estructura fina se aplican también a niveles superiores, obteniendo nuevos desdoblamientos. Las energías de transición a estos primeros niveles desdoblados pueden consultarse en la Tabla 1.2. La columna $\Delta\omega_{FS}$ hace referencia a la diferencia de energías entre los niveles desdoblados por estructura fina.

Nivel	j	$1/\lambda$ (cm ⁻¹) *	ω (2 π × THz)	$\Delta\omega_{FS}$ (2 π × GHz)
2S	1/2	-	-	-
2P	1/2	14903.622	447.109	10.05
	3/2	14903.957	447.119	
3S	1/2	27206.066	816.182	-
3P	1/2	30925.517	927.766	2.88
	3/2	30925.613	927.768	
3D	3/2	31283.018	938.491	1.05
	5/2	31283.053	938.492	
4P	1/2	36469.714	1094.091	1.20
	3/2	36469.754	1094.093	
4D	3/2	36623.297	1098.699	0.45
	5/2	36623.312	1098.699	

Tabla 1.2: Separación de los niveles de energía del litio respecto del estado base considerando estructura fina. *Información recabada de [17]. Las últimas dos columnas son calculadas.

Los desdoblamientos por estructura fina siguen siendo degenerados para la proyección del momento $\hat{\mathbf{J}}$, m_j . Esta degeneración se rompe considerando la interacción de $\boldsymbol{\mu}_J$ con el momento dipolar producido por el momento angular del núcleo $\hat{\mathbf{I}}$, $\boldsymbol{\mu}_I$, en lo que se conoce como *estructura hiperfina*. Su hamiltoniano en una base de eigenvectores de \hat{I}^2 y \hat{J}^2 es dado por la ec. 1.4.

$$\hat{H}_{HF} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2g_I\mu_N\mu_B}{j(j+1)(2l+1)} \left(\frac{Z}{a_\mu n}\right)^3 \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{I}} := \frac{1}{2}A \frac{\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{I}}}{\hbar^2} \quad (1.4)$$

donde μ_B, μ_N son los magnetones de Bohr y nuclear, respectivamente, g_I es el factor-g nuclear y A es la *constante hiperfina de dipolo magnético*, y tiene un valor particular para cada nivel de la estructura fina. Estos valores pueden consultarse en la Tabla 1.3 para el doblete D del ${}^6\text{Li}$.

Similar a lo que sucede con la estructura fina, el hamiltoniano de estructura hiperfina se diagonaliza considerando un nuevo momento angular total $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{I}}$ y los eigenvectores de \hat{F}^2 y \hat{F}_z . La corrección de un nivel fino con l , s y j dados es determinada por los eigenvalores de \hat{F}^2 , identificados con el número cuántico F que cumple $|j - I| \leq F \leq j + I$.

Propiedad	Valor	Propiedad	Valor
$A(2^2S_{1/2})/h$	152.136 840 7 MHz	$g_J(2^2S_{1/2})$	2.002 301 0
$A(2^2P_{1/2})/h$	17.386 MHz	$g_J(2^2P_{1/2})$	0.6668
$A(2^2P_{3/2})/h$	-1.155 MHz	$g_J(2^2P_{3/2})$	1.335
$B(2^2P_{3/2})/h$	-0.10 MHz	g_I	-0.000 447 654 0

Tabla 1.3: Constantes de estructura hiperfina y factores g de Landé para los primeros niveles finos del ${}^6\text{Li}$ [16] [19].

$$\Delta E_{HF} = \frac{1}{2}A[F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)] := \frac{1}{2}AK \quad (1.5)$$

Luego, los desdoblamientos hiperfinos considerando solamente interacción dipolar magnética son múltiplos semienteros de una unidad de intervalo dada por $A/2$. Cada nivel hiperfino tiene degeneración de grado $2F+1$, pues ΔE_{HF} no depende de m_F .

Adicional a la interacción entre dipolos magnéticos se puede considerar la interacción de los electrones con el momento cuadrupolar eléctrico \mathbf{Q}_{ij} , que da cuenta de la no esfericidad del núcleo. Esta interacción agrega un término adicional a ΔE_{HF} (ec. 1.6), donde B es la constante de acoplamiento de cuadrupolo [14], [18]. Es importante notar que los niveles hiperfinos mantienen la misma degeneración y se determinan por F . Los átomos con $I=0$ o $I=1/2$ no presentan esfericidad y entonces $B=0$.

$$\Delta E_{HF} = \frac{1}{2}AK + \frac{1}{4}B \frac{\frac{3}{2}K(K+1) - 2I(I+1)j(j+1)}{I(2I-1)j(2j-1)} \quad (1.6)$$

Por último, se debe destacar el efecto que tiene un campo magnético uniforme en los niveles de energía de los átomos, el llamado *efecto Zeeman*. Dado un campo magnético $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$, este interactúa con los momentos dipolares $\boldsymbol{\mu}_J$ y $\boldsymbol{\mu}_I$.

$$\hat{H}_Z = -(\boldsymbol{\mu}_J + \boldsymbol{\mu}_I) \cdot \mathbf{B} = \frac{B_0}{\hbar}(g_J\mu_B\hat{J}_z + g_I\mu_N\hat{I}_z) \quad (1.7)$$

Cuando el campo magnético es de intensidad baja, se considera \hat{H}_Z como perturbación a la estructura hiperfina, de modo que la base $|F, m_F\rangle$ puede seguir utilizándose. En términos de esta base, el corrimiento de energía debido a \hat{H}_Z depende

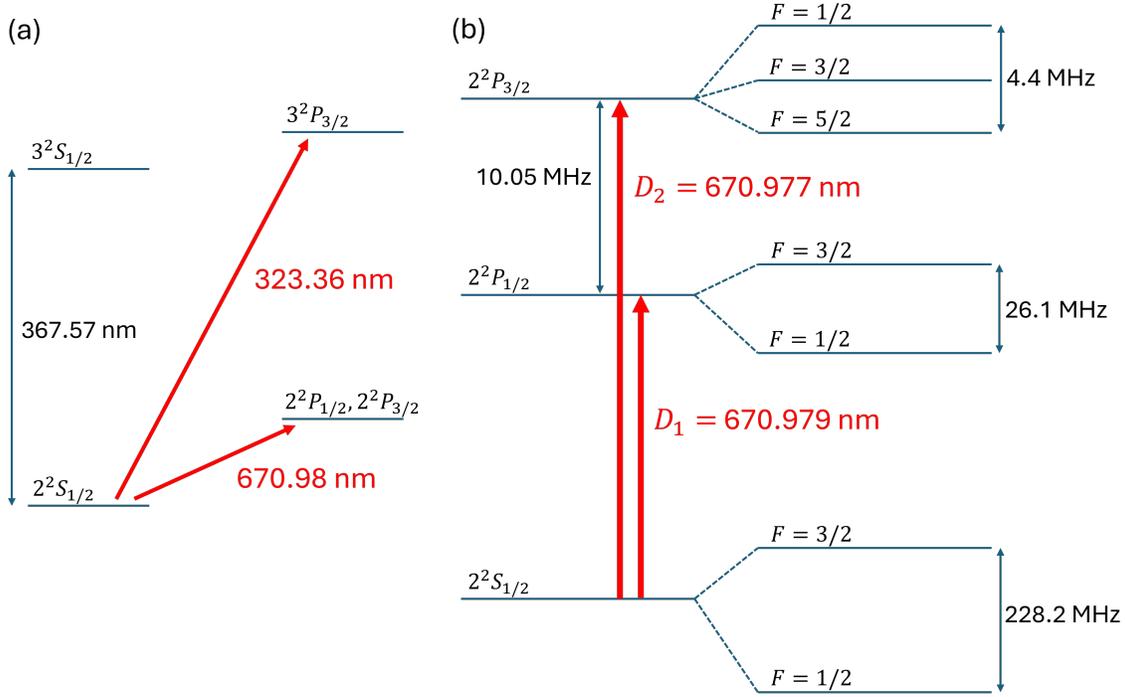


Figura 1.2: Primeros niveles de energía del ${}^6\text{Li}$, en ausencia de campos magnéticos externos. (a) Desdoblamiento por estructura fina de $n = 2$, y $n = 3$, incluyendo las transiciones permitidas desde el estado base. Adaptado de [20], complementado con información de [21]. (b) Desdoblamientos hiperfinos del estado base y las líneas D_1 y D_2 . Adaptado de [16].

principalmente de m_F :

$$\Delta E_Z = \mu_B g_F m_F B_0$$

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) - I(I+1) + J(J+1)}{2F(F+1)} + g_N \frac{F(F+1) + I(I+1) - J(J+1)}{2F(F+1)} \quad (1.8)$$

donde $g_N = g_I(m_e/M)$ y M es la masa del núcleo.

Cuando el campo magnético es intenso, la magnitud de \hat{H}_Z sobrepasa a la de \hat{H}_{HF} , de modo que se debe utilizar la base desacoplada $|j, I, m_j, m_I\rangle$, y la corrección de energía depende ahora de m_j y m_I .

$$\Delta E_Z = \frac{\mu_B}{\hbar} (g_J m_j + g_N m_I) B_0 \quad (1.9)$$

Para campos magnéticos de una intensidad tal que la estructura hiperfina es comparable a los corrimientos Zeeman, se debe resolver el hamiltoniano de estructura

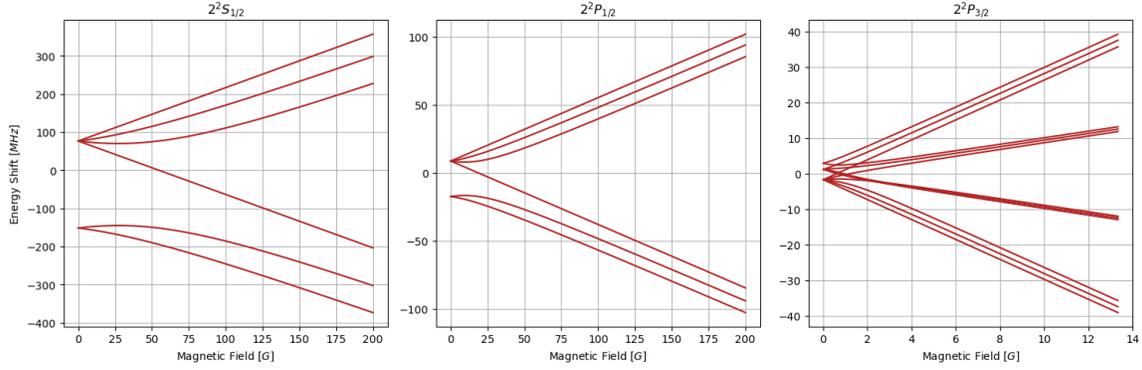


Figura 1.3: Desdoblamientos de energía por efecto Zeeman de los primeros niveles finos del ${}^6\text{Li}$, calculados numéricamente de los eigenvalores de \hat{H}_{int} [16].

interna $\hat{H}_{int} = \hat{H}_Z + \hat{H}_{HF}$. Los eigenvalores de este hamiltoniano se grafican respecto del campo magnético externo en la Figura 1.3. Para obtener estas gráficas se diagonalizó el hamiltoniano \hat{H}_{int} para diferentes valores de campo magnético, considerando la estructura hiperfina sin interacción cuadrupolar eléctrica, y utilizando los valores de A , g_I y g_J que se muestran en la Tabla 1.3. De estas gráficas se recuperan las aproximaciones de campo bajo y alto: en campos bajos, $\Delta E \sim m_F B_0$, y se obtienen grupos de un número par de líneas dominados por el desdoblamiento hiperfino (efecto Zeeman anómalo); a campo alto, $\Delta E \sim m_J B_0$, y se obtienen grupos de tres líneas correspondientes a las tres proyecciones de $\hat{\mathbf{I}}$ (efecto Zeeman normal).

Para los niveles $2P$, las consideraciones de campo bajo ya son una mala aproximación para campos de unos cuantos gauss de intensidad. Las muestras que se estudian en el LMU están sujetas a campos magnéticos en un rango de 600-900 G y su efecto sobre las transiciones del litio es similar al régimen de campo alto, aproximado por la ec. 1.9.

Para campos magnéticos aún más altos, el efecto de \hat{H}_Z comienza a ser comparable con la estructura fina. En este caso, no vale la pena considerar \hat{H}_{HF} , y se utiliza la base $|l, s, I, m_l, m_s, m_I\rangle$ para realizar los cálculos de las correcciones. A esto se le conoce como *régimen de Paschen-Back* [14].

1.1.2. Interacciones y resonancias de Feshbach

En los experimentos de gases ultrafríos es de vital importancia conocer las interacciones entre los componentes del gas, pues ellas determinan mucha de la física que puede explorarse. Las bajas temperaturas dan pie a longitudes de De Broglie λ_{dB} mucho mayores que el rango de las interacciones entre los átomos, lo que permite modelarlas como potenciales de contacto $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = U_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ [22]. En un gas diluido y ultrafrío, U_0 depende de un parámetro conocido como *longitud de onda de dispersión s* , denotado por a .

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.10)$$

El litio, entre otros alcalinos, presenta una cualidad importante: la capacidad de modificar a mediante campos magnéticos. Esta capacidad es relevante alrededor de las llamadas *resonancias de Feshbach*, que permiten que la aplicación de un campo magnético externo \mathbf{B} propicie una divergencia en el valor de a , alrededor de la cual se puede acceder, idealmente, a (casi) cualquier valor de a entre $\pm\infty$.

El estudio de las interacciones entre átomos es complicado, terreno de física de muchos cuerpos y teoría de dispersión. Para un modelo del que se pueden deducir las resonancias de Feshbach, puede consultarse [22] y [23]; [2] reporta avances en el campo de gases ultrafríos utilizando estas resonancias; para un tratamiento particular de las interacciones en un gas de ${}^6\text{Li}$ puede consultarse [24]. En esta sección se mencionarán las bases de este fenómeno y se expondrán los motivos por los cuales se puede considerar a como principal factor en la descripción de las colisiones (elásticas) entre átomos.

Se considera solo la interacción entre dos cuerpos, bajo la justificación de trabajar con un gas diluido. Si bien el tratamiento es incompleto, más aún cuando se trabaja con regímenes de interacción altos cerca de la resonancia, sirve como primera aproximación al problema real. Estos dos cuerpos interactúan mediante un potencial central $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, por ejemplo, el potencial de van der Waals o de Lennard-Jones [25], permitiendo trabajar con una partícula de masa reducida μ bajo un potencial

$V(\mathbf{r})$.

La solución asintótica al problema de dispersión, entendiéndose como la solución para $r \rightarrow \infty$, es la suma de una onda incidente de momento $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ y una onda dispersada esférica modulada por $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ que llega al punto de observación con vector de onda \mathbf{k}' de magnitud k [15].

$$\psi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.11)$$

Bajo un potencial central, existe una simetría en torno a la dirección entre las dos partículas, $\hat{\mathbf{k}}$, y f depende solo del ángulo que esta hace con la dirección de dispersión $\hat{\mathbf{k}}'$, θ . Esto permite una expansión en polinomios de Legendre, que a su vez son eigenfunciones del operador \hat{L}^2 y l es el número cuántico orbital [24] [15]. En un potencial central, \hat{H} conmuta con \hat{L}^2 y \hat{L}_z , de modo que se puede resolver la ecuación de Schrödinger para cada eigenfunción ψ_l .

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \psi_l = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l-1}}{2ik} P_l(\cos \theta) \quad (1.12)$$

A esta descomposición se le conoce como *de onda parcial*, y δ_l son los *desfases de onda parcial*. Estos desfases son quienes determinan la función de onda asintótica, y dependen del potencial dispersor V . Se calculan al resolver la ecuación de Schrödinger, que en potencial central se reduce a la ecuación radial.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right) \right] u_{El} = 0 \quad (1.13)$$

$$\psi_{Elm}(\mathbf{r}) = \frac{u_{El}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Los potenciales interatómicos generalmente tienen un rango de acción $r_0 \sim 10$ Å. Luego, una estimación del máximo momento angular que es relevante para la dispersión es $L \sim r_0 p$, donde $p = \hbar/\lambda_{dB}$ y $L = \hbar l$. La longitud de onda de De Broglie a una temperatura de 1 μK es del orden de 1 μm , y entonces $l \ll 1$. Esto significa que solo las ondas s ($l = 0$) contribuyen a la dispersión.

$$f \sim \frac{e^{2i\delta_0} - 1}{2ik} = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \operatorname{sen} \delta_0 \quad (1.14)$$

La función f , que da cuenta de la amplitud de probabilidad de dispersión en función del ángulo θ , se relaciona con la sección eficaz σ como $|f|^2 = d\sigma/d\Omega$, donde $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido. Luego, esta sección eficaz en dispersión de un gas diluido a bajas temperaturas es

$$\sigma = \int |f|^2 d\Omega = 4\pi \frac{\operatorname{sen}^2 \delta_0}{k^2} \quad (1.15)$$

De la ec. 1.15 y la ec. 1.11 se ve que la función de onda radial en el régimen asintótico se comporta como $u \sim \operatorname{sen}(kr + \delta_0)$. Para el caso sencillo en que V es un potencial de esfera dura, es decir, una barrera infinita para $r < R$, el desfase es dado por $\delta_0 = -kR$. Numerosos potenciales cumplen que $\tan \delta_0 \sim k$ para $k \rightarrow 0$ [24] [26], de modo que se define la *longitud de dispersión* a como

$$a := -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0}{k} \quad (1.16)$$

de tal modo que $\sigma = 4\pi a^2$.

La longitud de dispersión puede adquirir valores positivos y negativos. Debido al desfase en la solución producida por a , se interpreta que $a < 0$ corresponde a interacciones atractivas, y $a > 0$ a repulsivas. Se puede mostrar que si se asume un potencial de contacto $V(\mathbf{r}) = U_0 \delta(\mathbf{r})$ entonces U_0 debe tomar la forma que toma en la ec. 1.10 [15].

La longitud de dispersión da cuenta del potencial de interacción entre dos partículas. Este potencial es sensible al estado de espín de las partículas en colisión. Para verlo de manera sencilla, una colisión entre dos átomos de ${}^6\text{Li}$ tiene una función de onda ψ que, por tratarse de fermiones, debe ser antisimétrica (principio de exclusión de Pauli). Esta función de onda es producto de tres: la función de onda del centro de masa, la función espacial que concierne a las posiciones relativas y la función de espín. Por tratarse de la misma especie, la primera es simétrica (un intercambio $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$

no afecta a esta función). Luego, la antisimetría queda determinada por las funciones espacial y de espín.

Cuando dos átomos se aproximan en estados en que el espín total de los electrones de valencia es cero, $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2 = 0$, se dice que interactúan mediante potencial de *singulete*, $V_S(T)$. En caso contrario, $\hat{\mathbf{S}} = 1$ y se dice que interactúan por potencial de *triplete*, $V_T(r)$. Las interacciones por onda s requieren $l = 0$, lo que significa que la función de onda espacial debe ser simétrica. Esto excluye aquellas interacciones entre átomos con espines idénticos, que solo pueden interactuar mediante ondas p ($l = 1$) o superiores, de modo que V_S es considerablemente más profundo que V_T . Estos dos potenciales definen sus propias longitudes de dispersión: a_S y a_T . Para el ${}^6\text{Li}$, $a_S = 45.167(8)a_0$ y $a_t = -2140(18)a_0$ [27].

La sección eficaz se ve también afectada. La simetrización de la función de onda espacial $\psi_S = \psi(\mathbf{r}) + \psi(-\mathbf{r})$ presenta $f(\theta, \varphi) \rightarrow f(\theta, \varphi) + f(\pi - \theta, \varphi + \pi)$. Para las interacciones con onda s , los sumandos son iguales, y entonces $f \rightarrow 2f$. Tras integrar sobre un hemisferio de manera que no se cuente doblemente, $\sigma = 8\pi a^2$.

El ingrediente que queda considerar para establecer la capacidad de modificación de a es la estructura interna de los átomos. Como se vio en la sección anterior (Figura 1.3 (a)), en presencia de un campo magnético existen 6 estados base, enumerados $|1\rangle - |6\rangle$ de menor a mayor energía, que son alguna combinación lineal de $\{|S, m_s\rangle |I, m_I\rangle\}$. Cuando en un gas colisionan dos ${}^6\text{Li}$ en su estado base, previo a la colisión los átomos pueden estar en cualesquiera estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ y la función de espín será una combinación antisimétrica de los dos: $|\{\alpha, \beta\}_-\rangle$. Su estado de espín puede escribirse en base de singulete-triplete, y en general hay contribución de ambas partes. Luego, la longitud de dispersión en colisiones entre estados no es puramente a_S o a_T . Los estados $|\{\alpha, \beta\}_-\rangle$ se conocen como *canales*, y en un proceso dispersivo los estados entrante y saliente corresponden a alguno de estos.

El hamiltoniano de estructura interna $\hat{H}_{int} = \hat{H}_Z + \hat{H}_{HF}$ proporciona un acoplamiento entre los canales de triplete y singulete, que se muestran en la Figura 1.4 (a), relacionando las longitudes a_S y a_T (en [22] se calcula a considerando solo dos canales). La aplicación de un campo magnético crea una separación energética entre los

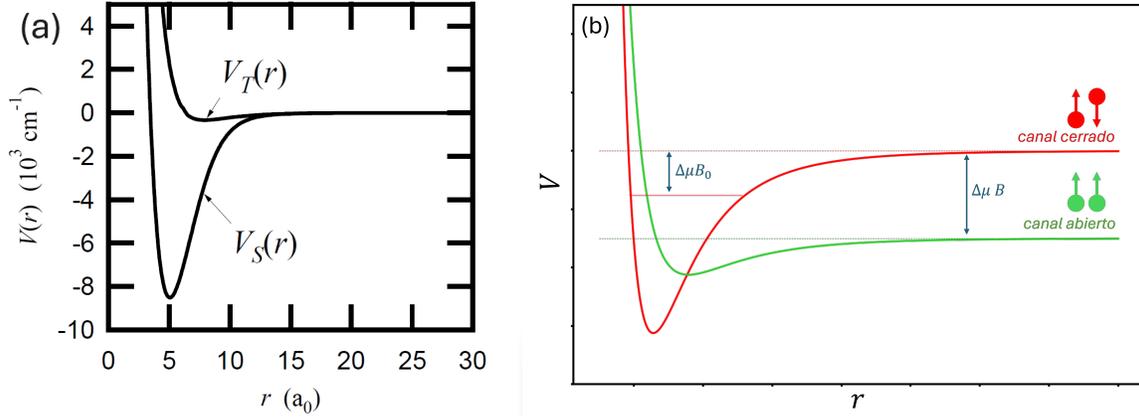


Figura 1.4: (a) Potenciales de interacción entre estados singulete, V_S , y triplete, V_T , del ${}^6\text{Li}$. Obtenida de [24]. (b) Esquema que muestra las condiciones para una resonancia de Feshbach. Un campo externo modifica la separación entre el canal abierto y el cerrado para que la energía asintótica del canal abierto coincida con una energía ligada del cerrado.

canales de tamaño $\Delta\mu B$, donde $\Delta\mu$ es la diferencia en los momentos dipolares de los dos canales. Particularmente para el canal $|\{1, 2\}_-\rangle$ es casi un estado triplete puro, que sobrelleva un corrimiento energético de $-2\mu_s B$, mientras que el canal singulete, por tener momento dipolar nulo, poco se ve afectado por el campo.

Así, para cierto par $|\alpha\rangle - |\beta\rangle$, se considera el canal $|\{\alpha, \beta\}_-\rangle$ que se nombra *abierto*. Cualquier canal con energía asintótica mayor es un canal *cerrado*, y particularmente lo es su canal singulete. Cuando B es tal que la energía entrante del par coincide con un estado ligado de V_S (digamos, B_0), entonces a diverge. A esta divergencia se le conoce como *resonancia de Feshbach*.

El comportamiento de a alrededor de una resonancia de Feshbach se describe fenomenológicamente como una hipérbola.

$$a(B) = a_{bg} + a_{res}(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) \quad (1.17)$$

En la ec. 1.17, a_{bg} es la longitud de dispersión del canal abierto, y ΔB es el ancho de la resonancia. En la Figura 1.5 se muestran las resonancias para las colisiones a pares de los estados base menos energéticos $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$. En la Tabla 1.4 se muestran valores experimentales de estos parámetros para las resonancias mencionadas.

El litio tiene resonancias de Feshbach especialmente anchas, del orden de 100 G .

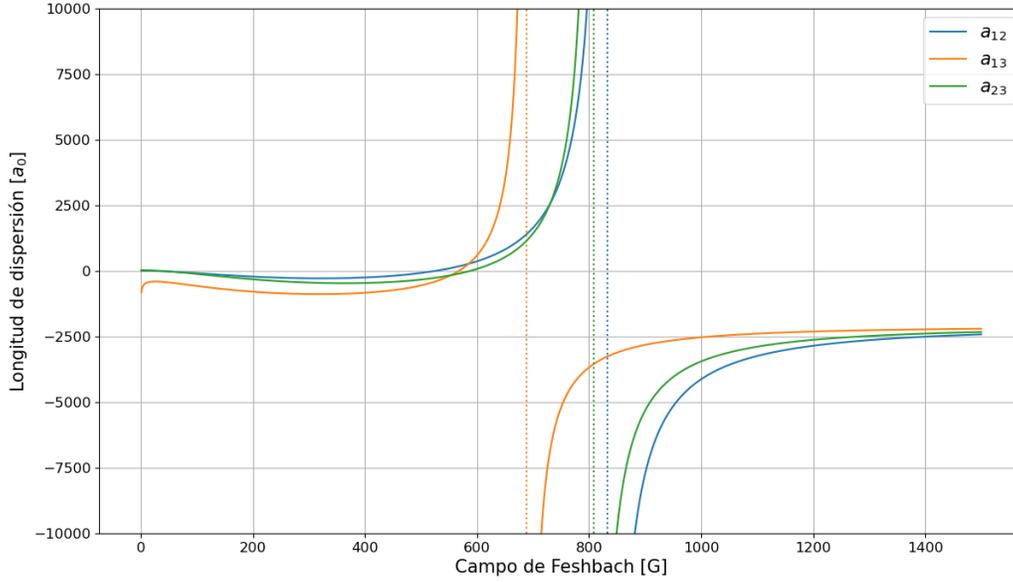


Figura 1.5: Resonancias de Feshbach para las tres mezclas posibles de los primeros estados base del ${}^6\text{Li}$ [28].

Mezcla	α_{bg} (a_0)	B_0 (mT)	ΔB (mT)
$ 1\rangle - 2\rangle$	-1405	83.41(15)	30.0
$ 1\rangle - 3\rangle$	-1727	69.04(5)	12.23
$ 2\rangle - 3\rangle$	-1490	81.12(10)	22.23

Tabla 1.4: Parámetros de las resonancias de Feshbach para mezclas de los primeros tres estados base del ${}^6\text{Li}$ [27].

Este hecho lo posiciona como buen candidato para el estudio de gases cuánticos en diferentes regímenes de interacción. Estos regímenes de interacción son esencialmente tres, que se mencionan a continuación. Para describir estos regímenes, se utiliza comúnmente el parámetro adimensional $1/k_F a$, donde k_F es *número de onda de Fermi*, cantidad que se relaciona con la separación interatómica.

En el régimen de interacciones débiles repulsivas ($1/k_F a \gg 1$), debajo de cierta temperatura se forman estados moleculares entre dos fermiones de espín opuesto. Estas moléculas tienen un espín total entero, y son efectivamente bosones. Existe una *temperatura crítica* T_c debajo de la cual se da la *condensación de Bose-Einstein*. Por ello, a este límite se le conoce como *límite BEC*. La condensación de Bose-Einstein es la fase de la materia en que se da una ocupación macroscópica del estado base del gas. La energía de enlace de estas moléculas es dada por $E_B = -\hbar^2/ma^2$, y son

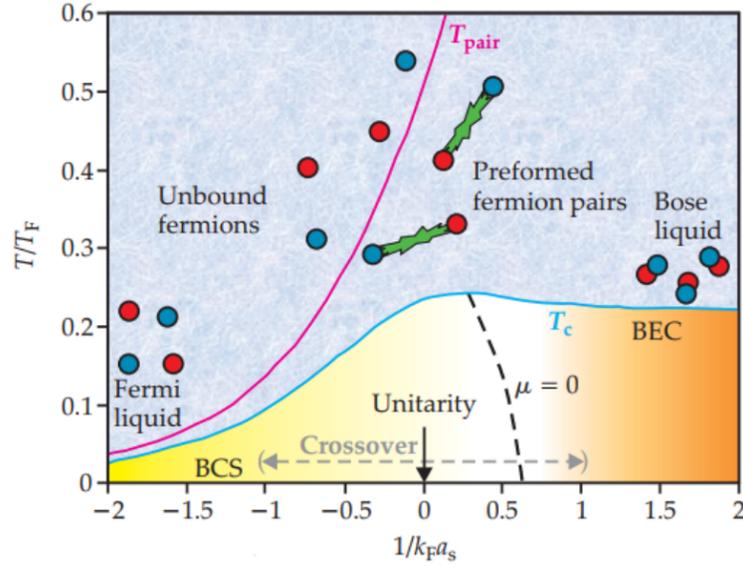


Figura 1.6: Diagrama del cruce BEC-BCS en un gas de fermiones interactuante. Existen tres temperaturas relevantes: la temperatura de Fermi T_F de la que se habla en la sección 1.2, la temperatura de formación de pares T_{pair} y la temperatura crítica T_c , debajo de la cual se observan los regímenes presentados. Imagen obtenida de [29].

estables siempre que la longitud de dispersión sea mayor en magnitud que el rango del potencial: $a \gg r_0$ [30].

En el régimen de interacciones débiles atractivas ($-1/k_F a \gg 1$), también debajo de cierta temperatura existe una asociación a pares entre fermiones de espines opuestos. No obstante, su naturaleza es distinta a las moléculas del límite BEC. La distancia entre los fermiones que forman este par es mucho mayor que la distancia interatómica. Los pares se forman más bien en el espacio de momentos, y se conocen como *pares de Cooper*. En este régimen también surge la posibilidad de superfluidez, y se describe mediante la teoría BCS [4], nombrada así por John Bardeen, Leon Cooper y Robert Schrieffer, que realmente es un modelo para superconductividad pero cuyos principios aplican a la condensación de estos pares de fermiones [30].

Entre ellos se da el llamado cruce BEC-BCS, en el que $-1 \lesssim 1/k_F a \lesssim 1$, las interacciones son muy intensas y los pares que se forman son separados por una distancia comparable a la interatómica. Esta separación del par varía continuamente desde una molécula fuertemente ligada a los pares de Cooper del límite BCS. En la resonancia, cuando a diverge, se alcanza el *límite unitario*. Un sistema en este límite es

un sistema diluido y fuertemente interactuante, cuya única escala de energía relevante es la *energía de Fermi* E_F y la única escala de longitud relevante es la distancia entre partículas $n^{-1/3}$. Esto hace que el comportamiento del sistema no dependa de los constituyentes, más allá de ser fermiones, de modo que la física es la misma para un gas ultrafrío que, por ejemplo, para una estrella de neutrones, dos regímenes superfluidos que ocurren en rangos de temperatura completamente dispares. Por ello, los gases unitarios fermiónicos (UFG) son de fuerte interés para estudiar fenómenos *universales* [31], desligados de escalas de energía.

1.2. Bosones y fermiones

En la sección anterior se expusieron las propiedades del ${}^6\text{Li}$ y por qué es ampliamente utilizado en experimentos que se dedican a estudiar la dinámica de los gases alrededor del cruce BEC-BCS. Se dijo ya que a pesar de estar compuestos solamente por fermiones, se pueden acceder a condiciones en que la muestra se vuelva un gas de bosones. En esta sección se exponen los principios básicos de estos sistemas.

Un gas de fermiones es un sistema de partículas indistinguibles que obedecen un principio de exclusión (de Pauli), y con función de onda antisimétrica. En contraposición, un gas de bosones se caracteriza porque sus componentes tienen función de onda simétrica, y no hay restricciones para el número de ocupación de los niveles energéticos. Estos obedecen estadísticas de *Fermi-Dirac* y de *Bose-Einstein*, respectivamente. Sus números de ocupación son dados por las siguientes expresiones [32].

$$f^{(FD)}(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1} \quad , \quad f^{(BE)}(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] - 1} \quad (1.18)$$

De estas expresiones se ve que $f^{(FD)} \leq 1$ siempre, y alcanza este valor máximo cuando $\mu > \varepsilon$ y $(\mu - \varepsilon)/kT \gg 1$. Para los bosones, el hecho que los números de ocupación sean no negativos implica $\varepsilon > \mu$. En el caso que μ sea igual a la energía del estado base, $f^{(BE)}(\varepsilon_0) \rightarrow \infty$, lo que conduce al fenómeno de condensación de Bose-Einstein. Ambas distribuciones convergen al límite clásico cuando $(\varepsilon - \mu)/kT \gg 1$,

la distribución de Maxwell-Boltzmann.

En presencia de un potencial $V(\mathbf{r})$, de las distribuciones puede obtenerse el perfil de densidad de partículas al integrar sobre el espacio de momentos, considerando que $\varepsilon = p^2/2m$. El signo superior corresponde a un gas de Bose, mientras que el signo inferior a un gas de Fermi. La integral que se obtiene suele llamarse *de Bose-Einstein*, y define a la familia de funciones polilogaritmo, denotadas por $\text{Li}_\alpha(z)$ ¹.

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left[\left(\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \mu\right)/kT\right] \mp 1} \\ &= \frac{(2mkT)^{3/2}}{(2\pi)^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{u^{1/2} du}{\exp(u)/\exp[(\mu - V(\mathbf{r}))/kT] \mp 1} \\ &= \pm \frac{1}{\lambda_{dB}^3} \text{Li}_{3/2}\left(\pm \frac{\mu - V(\mathbf{r})}{kT}\right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

En la ec. 1.19 se introduce la *longitud de onda térmica de De Broglie*. Salvo por factores numéricos, esta corresponde a la longitud de onda de De Broglie para partículas de un gas en equilibrio térmico, en el que la energía por partícula es $\frac{3}{2}kT$. A bajas temperaturas, λ_{dB} comienza a ser del orden de la separación interatómica $n^{-1/3}$, de modo que las funciones de onda de las partículas comienzan a traslaparse, y las consideraciones de indistinguibilidad que caracterizan a las distribuciones de Bose y Fermi de un gas clásico cobran importancia. Esto motiva la definición de una *temperatura de degeneración* T_0 , que cumple $n\lambda^3(T_0) = 1$.

Para calcular el número de átomos y la energía de los gases, se integra en el espacio fase las distribuciones de la ec. 1.18. En ausencia de potencial, la integral espacial se convierte en el volumen V del gas, y entonces

$$N = V \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(p) \quad , \quad E = V \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2}{2m} f(p) \quad (1.20)$$

¹La función polilogaritmo de orden α , en su forma integral, contiene a la integral de Bose-Einstein. Esta guarda la siguiente relación con la función Zeta de Riemann: $\text{Li}_\alpha(1) = \zeta(\alpha)$.

$$\text{Li}_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x/z - 1} dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^\alpha}$$

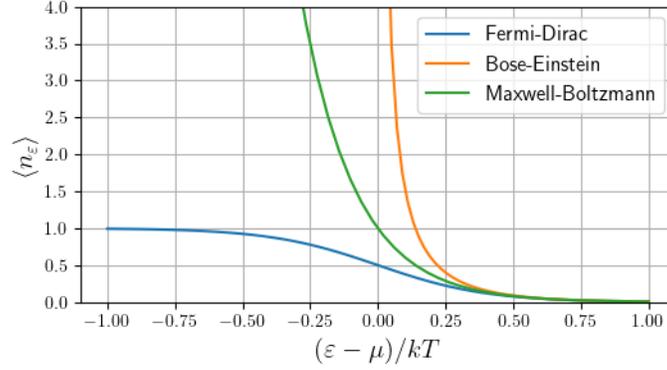


Figura 1.7: Número de ocupación de las tres estadísticas.

Por último, se establece la relación entre la presión del gas y la energía del mismo, que la cumplen tanto gases de Bose como de Fermi, así como los gases clásicos. La presión (en una pared) debido a partículas con momento \mathbf{p} se define como el cambio de momento por partícula $2mv_x$ multiplicada por el flujo en tal pared: v_x , si $v_x > 0$ (incide en la pared). Luego, como $p_x^2 = p^2/3$,

$$\begin{aligned} P &= \int_{v_x > 0} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} (2mv_x^2) f(p) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_x^2}{m} f(p) \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^2}{2m} f(p) = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.2.1. Gas de Bose no interactuante

Las variables de interés en el estudio de un gas son el número de partículas N , su densidad n , y la energía total del sistema E . Se considera un potencial V que, en ausencia de interacciones, define los niveles de energía de partícula individual. Se define una función g que cuantifica la densidad de estados, generalmente en función de la energía o del momento. Asumiendo que la separación entre niveles de energía es mucho menor que kT , lo que son realmente sumas pasan a ser integrales, y las cantidades macroscópicas se calculan como sigue:

$$N = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} g(\varepsilon) f^{(BE)}(\varepsilon) d\varepsilon \quad , \quad E = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} g(\varepsilon) f^{(BE)}(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \quad (1.22)$$

Consideramos dos potenciales de interés: la caja y el potencial armónico. La caja

tiene volumen V y condiciona a la función de onda a ser cero fuera de ella y en su frontera; el potencial armónico es de la forma $\frac{1}{2}m(\sum_i \omega_i^2 x_i^2)$. Sus densidades de estados $g(\varepsilon)$ tienen formas similares, que pueden obtenerse suponiendo grandes números de partículas y $\Delta\varepsilon/kT \ll 1$ [33].

$$g_\alpha(\varepsilon) = C_\alpha \varepsilon^{\alpha-1}$$

$$\alpha = \begin{cases} 3/2, & \text{Caja} \\ 3, & \text{Osc. armónico} \end{cases}, \quad \begin{cases} C_{3/2} = Vm^{3/2}/(\sqrt{2}\pi^2\hbar^3) \\ C_3 = 1/(2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z) \end{cases} \quad (1.23)$$

Cuando exista degeneración por espín, a g_α se le multiplica por $(2s + 1)$.

La temperatura crítica de un condensado T_c es aquella para la cual se da una ocupación macroscópica del estado base: $N_0 \approx N$. Para calcularla, uno se enfoca en su contraparte, el número de partículas en estados excitados N_{ex} . Sea $\varepsilon_0 = 0$ la energía del estado base. Se asume que justo sobre la temperatura crítica la mayoría de partículas se encuentran en estados excitados. Además, se hace $\mu = 0$, puesto que añadir una partícula a un condensado a entropía constante es añadir una partícula de energía $\varepsilon_0 = 0$ a un sistema de un solo microestado ($n_0 = 1$, $S = k \ln \Omega = 0$) [34].

$$\begin{aligned} N \approx N_{ex}(T_c, \mu = 0) &= \int_0^\infty \frac{C_\alpha \varepsilon^{\alpha-1}}{\exp(\varepsilon/kT_c) - 1} \\ &= C_\alpha (kT_c)^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx \\ &= C_\alpha (kT_c)^\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Aquí se ha usado que $\text{Li}_\alpha(1) = \zeta(\alpha)$. Luego, para los dos potenciales considerados, la temperatura crítica se expresa como

$$kT_c = \begin{cases} \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, & \text{Caja} \\ \hbar\bar{\omega} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, & \text{Osc. armónico} \end{cases} \quad (1.25)$$

donde $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$. Nótese como del potencial de caja, a temperatura T_c se tiene que $n\lambda_{dB}^3 = \zeta(3/2) \approx 2.612$.

En la fase condensada, la ocupación del estado base se calcula como $N - N_{ex}$. De

la ec. 1.24 ya se ha calculado $N_{ex}(T)$, y la expresión sigue siendo válida pues $\mu = 0$. Las constantes que acompañan a T^α pueden escribirse en términos de T_c para obtener una expresión para la *fracción condensada*.

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^\alpha \quad (1.26)$$

Presentadas ya las condiciones para condensación, se mencionan algunas particularidades de esta fase. Por su importancia experimental se destaca su distintivo perfil de densidad. Es mediante este y la diferencia respecto de un perfil de densidad de un gas térmico que puede aseverarse que en un experimento se ha producido un condensado. Remitiéndonos aún al caso de gases no interactuantes, este perfil es dado por la función de onda del estado base: $n(\mathbf{r}) = N|\psi_0(\mathbf{r})|^2$. En el caso del oscilador armónico,

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(a_x a_y a_z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2a_x^2} - \frac{y^2}{2a_y^2} - \frac{z^2}{2a_z^2}\right] \quad (1.27)$$

Los parámetros a_i son los anchos de la función, y son dados por $a_i^2 = \hbar/m\omega_i$. Luego, $n(\mathbf{r}) \sim N \exp(-x_i^2/a_i^2)$. En cambio, un gas térmico se distribuye según $\exp(-E/kT)$, de modo que $n(\mathbf{r}) \sim N \exp(-V(\mathbf{r})/kT) = N \exp(-x_i^2/R_i^2)$, donde $R_i^2 = 2kT/m\omega_i^2$. Según la ec. 1.25, $kT_c/\hbar\omega_i \sim N^{1/3} \gg 1$, de modo que $R_i/a_i = \sqrt{2kT/\hbar\omega_i} \gg 1$. Por este motivo, la fracción condensada del gas de bosones tiene un perfil más pronunciado y estrecho en comparación con el resto del gas. La Figura 1.8 muestra esta diferencia.

Además de su perfil de densidad, la distribución de momentos es otro indicador de la presencia de la fase condensada. La función de onda en el espacio de momentos tiene la misma forma que la ec. 1.27, cámbiese $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}$ y $a_i \rightarrow c_i$, donde $c_i = \hbar/a_i = \sqrt{m\hbar\omega_i}$. Por el principio de incertidumbre, una distribución espacial ancha implica una distribución de momentos angosta, y viceversa. La evolución temporal de un estado que inicialmente es aquel de un gas en un potencial armónico a $T = 0$ en ausencia de potencial produce una nube con anchos $a_i\omega_i t \sim \sqrt{\omega_i}t$, es decir, expande más rápido cuanto más angosta sea inicialmente en una dirección. Un gas térmico, aunque inicialmente esté confinado en geometría anisotrópica, eventualmente expande isotrópicamente, con un ancho $(2kT/m)^{1/2}t$ que solo depende de la temperatura.

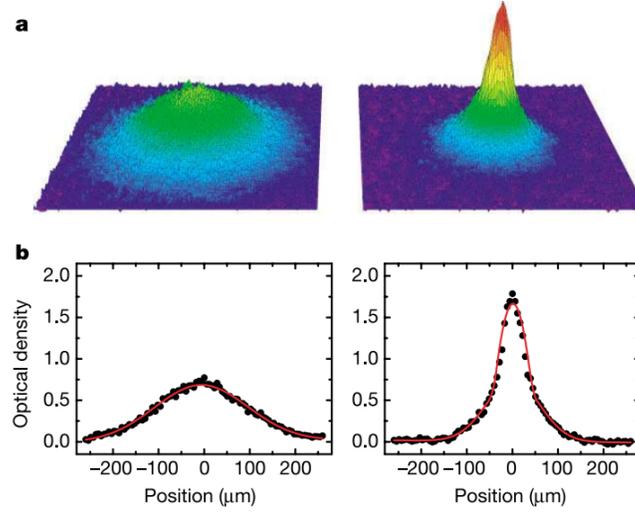


Figura 1.8: Primera observación de un BEC molecular producido a partir de un gas de fermiones. Promedios de diez mediciones de la densidad óptica ($\sim \int n(\mathbf{r})dz$) de un gas interactuante en expansión de ^{40}K en el límite BEC. Se reporta una temperatura de $0.9T_c$ y sin fracción condensada para la izquierda, y $0.49T_c$ con 12% de fracción condensada para la derecha. Imagen obtenida de [35].

1.2.2. Interacciones en el gas de Bose

De la sección 1.1.2, a las temperaturas que se requieren para condensación se puede considerar la interacción entre partículas como de contacto (ec. 1.10). En esta sección se contempla el potencial de la ec. 1.10 para deducir algunas propiedades del gas interactuante, siguiendo el desarrollo de la referencia [33]. Para un gas de Bose compuesto por moléculas de dos fermiones, la longitud de dispersión a ya no es la misma que para colisiones entre partículas individuales; en su lugar, $a_M = 0.6a$ [36]. La masa de la molécula puede considerarse como el doble de la de partícula individual.

$$\hat{H} = \sum_i^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right] + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (1.28)$$

En una aproximación de campo medio se considera que la función de onda del sistema es un producto de las funciones de onda individuales, por lo que en un condensado puro, $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_i \phi(\mathbf{r}_i)$. La energía del sistema, $E = \langle \hat{H} \rangle$ es dada entonces por:

$$E = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 + V|\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N-1}{2} g|\phi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (1.29)$$

expresión a la que puede llegarse tomando en cuenta que cada función de partícula individual se normaliza a 1, que $\langle \phi | \hat{p}^2 | \phi \rangle = \hbar^2 |\nabla\phi|^2$, y que para cada una de las $N(N-1)/2$ elecciones distintas de pares (i, j) , el potencial de interacción tiene la forma de la ec. 1.30. Se ha definido $g = 4\pi\hbar^2 a/m$.

$$\int d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) |\phi(\mathbf{r}_i)|^2 |\phi(\mathbf{r}_j)|^2 = \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4 \quad (1.30)$$

Si se busca una función de onda que describa al gas como unidad, se propone $\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\phi(\mathbf{r})$. De esta manera, $|\Psi(\mathbf{r})|^2 = N|\phi(\mathbf{r})|^2$, queda normalizada por N , no por la unidad. Luego, a $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ se le interpreta como la densidad del gas:

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 \quad (1.31)$$

Sustituyendo $\phi = \Psi/\sqrt{N}$ en la ec. 1.29, y despreciando el término $1/N$ que surge de la energía de interacción puesto que se trabaja con gases de muchas partículas, se obtiene una expresión para la energía del sistema en términos de Ψ .

$$E[\Psi] = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 + V|\Psi|^2 + \frac{1}{2}g|\Psi|^4 \right] \quad (1.32)$$

La ec. 1.29 habla de la energía del condensado, es decir, el estado base del sistema. Por ello, se debe minimizar la ec. 1.32, teniendo además fijo el número total de átomos N . Para que se cumpla esta última condición se introduce un multiplicador de Lagrange, de manera que $\delta E - \mu\delta N = 0$. Este multiplicador es evidentemente el potencial químico $\mu = \partial E/\partial N$. Ya que $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$, la variación se puede realizar solo para Ψ o Ψ^* , pues la condición obtenida es la misma. Esta condición resulta en la *ecuación de Gross-Pitaevskii* (independiente del tiempo):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) = \mu\Psi(\mathbf{r}) \quad (1.33)$$

La evolución temporal de Ψ es dada por el potencial químico, y no por la energía

por partícula: $\exp(-i\mu t/\hbar)$. Para nubes de muchos átomos e interacciones repulsivas, el término cinético de la ecuación es pequeño en comparación con el resto. Despreciando este término, la solución es

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 = (\mu - V(\mathbf{r}))/g \quad (1.34)$$

cuando $\mu \geq V$ y cero cuando no. A esta aproximación se le conoce como *de Thomas-Fermi*. Considerando el potencial armónico, la nube adquiere un perfil de densidad paraboloidal. A los R_i se les conoce como *radios de Thomas-Fermi*.

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \quad , \quad R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} \quad (1.35)$$

Integrando la densidad se obtiene una expresión para el potencial químico en términos de N , la longitud de dispersión a y de la forma de la trampa. En la expresión, $\bar{a}^2 = \hbar/m\bar{\omega}$.

$$\mu = \frac{15^{5/2}}{2} \left(\frac{a}{\bar{a}} N \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega} \quad (1.36)$$

La energía del sistema tiene una expresión termodinámica sencilla. Como $\mu \sim N^{2/5}$, entonces

$$E = \int \mu dN = \frac{5}{7} \mu N \quad (1.37)$$

En un gas de bosones sin interacciones, el gas se distribuye gaussianamente, mientras que al considerar interacción por contacto, la aproximación de Thomas-Fermi arroja un perfil parabólico con una frontera bien definida por los radios R_i . En condiciones normales de experimento, los radios de Thomas-Fermi son considerablemente mayores que los radios de oscilador a_i del gas de Bose sin interacciones. En la Figura 1.9 se muestra la comparación entre la distribución de un gas no interactuante y la distribución de Thomas-Fermi utilizando parámetros característicos de un condensa-

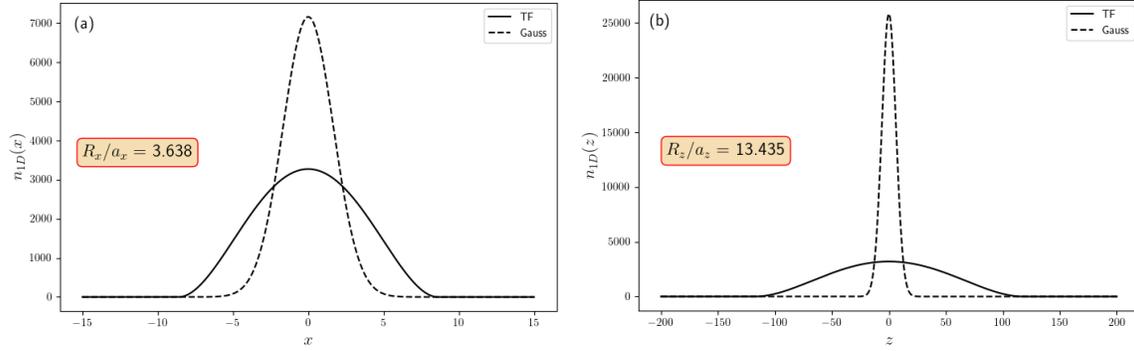


Figura 1.9: Comparación de los perfiles de densidad de un BEC no interactuante (línea punteada) y con interacciones repulsivas en el régimen de Thomas-Fermi (continua) integrados en (a) las direcciones y y z , y en (b) las direcciones x y y . Ambas distribuciones utilizan mismos parámetros obtenidos de condiciones usuales para un condensado de ${}^6\text{Li}_2$ producido en el LMU: $N = 3 \times 10^4$, $\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 150$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 11$ Hz, y particularmente para el gas interactuante, $a = 0.6 \cdot 1440a_0$, a $B = 690$ G.

do a 690 G. El efecto de las interacciones repulsivas es claro: la nube se ensancha y pierde densidad.

Es importante decir que la aproximación de Thomas-Fermi falla en los bordes de un condensado. Consideremos el ejemplo de una caja de potencial infinito. La función de onda debe anularse a partir de los bordes de esta caja, pero en su interior ser descrita por Gross-Pitaevskii con $V(\mathbf{r}) = 0$. Hacia los bordes debe existir una variación espacial importante en Ψ , de tal modo que el término cinético $\sim \Psi''$ no puede ser despreciable.

Sea ξ una distancia desde el borde de la caja a partir de la cual el término cinético se vuelve comparable al término de interacción. El primero asume una forma $\hbar^2/2m\xi^2$, mientras que el segundo asume una forma ng . Igualando ambas, esta distancia se expresa como:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2mng} = \frac{1}{8\pi na} \quad (1.38)$$

A esta distancia se le conoce como *longitud de restauración (healing length)*, y representa una distancia desde el borde del condensado (donde $\Psi = 0$), a la que la función de onda alcanza valores comparables a aquellos del centro de la caja. La separación interatómica es del orden de $n^{-1/3}$, y en un gas diluido es mucho mayor

que la longitud de dispersión a . Luego, $\xi \gg n^{-1/3}$, usualmente del orden de $1 \mu\text{m}$, una distancia totalmente observable en experimentos.

1.2.3. Gas de Fermi

Del gas de fermiones en una caja se pueden deducir cantidades que atañen en general a estos sistemas. En el límite $T \rightarrow 0$, según su estadística, los fermiones proceden a ocupar aquellos niveles de energía menores que μ y el resto queda vacío: este es el estado base del sistema. Los fermiones más energéticos tienen una energía $\varepsilon_F = \mu$, y en el espacio de momentos se forma una esfera de radio k_F . Estas cantidades son la *energía de Fermi* y el *vector de onda de Fermi*. Para obtenerlas, uno puede calcular N según la ec. 1.22 utilizando la densidad de estados g dada en ec. 1.23. Para $T = 0$, $f^{(FD)}(\varepsilon) = 1$ si $\varepsilon \leq \varepsilon_F$ y cero de lo contrario.

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{V(2s+1)}{6\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} = \frac{V(2s+1)k_F^3}{6\pi^2} \quad (1.39)$$

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2}{(2s+1)} \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (1.40)$$

También se puede calcular su energía:

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{V(2s+1)}{4\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{5} k_F^5 = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \quad (1.41)$$

Por la ec. 1.21, se sigue que $P_0 = \frac{2}{5} n \varepsilon_F$. Esto contrasta con el gas ideal y también con el gas de Bose (cuyo estado base es $E = 0$), en los que la presión a $T = 0$ es nula. Esta presión *de punto cero* surge puramente del principio de exclusión de Pauli, que prohíbe la múltiple ocupación de un nivel de energía para dos fermiones indistinguibles.

Para un gas de Fermi en un potencial $V(\mathbf{r})$, su perfil de densidad en el límite $T \rightarrow 0$ es dado por el volumen en el espacio de momentos que ocupan los estados $\varepsilon < \mu - V$.

$$\begin{aligned}
n_{T \rightarrow 0}(\mathbf{r}) &= \int_{|\mathbf{p}| < \sqrt{2m(\mu - V(\mathbf{r}))}} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\sqrt{2m(\mu - V(\mathbf{r}))}} p^2 dp \\
&= \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (\mu - V(\mathbf{r}))^{3/2}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

asemejando la densidad de un gas de Bose débilmente interactuante, con una dependencia de potencia distinta. Para un gas de Fermi en un potencial armónico, se definen los *radios de Fermi* R_{Fi} de manera análoga a la ec. 1.35, haciendo $\mu = \varepsilon_F$.

Para interpretar el perfil de la nube (ec. 1.19) a temperatura $T < T_F$ pero distinta de cero se puede comparar entre kT y la energía *local* de Fermi, $\varepsilon_F(\mathbf{r}) \sim n^{2/3}(\mathbf{r})$. Para el caso de un potencial armónico, por ejemplo, en el centro del potencial $\varepsilon_F(\mathbf{0}) = \varepsilon_F \gg kT$, de modo que localmente el gas se distribuye según la ec. 1.42. Por otro lado, hacia los extremos del potencial $\varepsilon(\mathbf{r}) \sim 0$, de modo que $T \gg T_F$ localmente, y el gas se comporta clásicamente (como se describe en la sección 1.2.2).

Para considerar el gas de Fermi a $T > 0$ se puede expandir la ec. 1.19 en una serie de potencias. Fijando la densidad n , un gas altamente degenerado requiere $T \ll T_F$. Definiendo la *fugacidad* $z = \exp(\mu/kT)$, la densidad de espacio fase puede expandirse en potencias de $\ln z$ [37].

$$n\lambda_{dB}^3 = -\text{Li}_{3/2}(-z) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\sqrt{\ln z}} + \dots \right] \tag{1.43}$$

La densidad de espacio fase puede reescribirse en términos de la *temperatura de Fermi*, definida por $\varepsilon_F = kT_F$ (ec. 1.40).

$$\begin{aligned}
(n\lambda_{dB}^3)^{2/3} &= n^{2/3} \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} = \frac{4\pi}{T} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2mk} \left(\frac{2s+1}{6\pi^2 n} \right)^{2/3} n^{2/3} \\
&= \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} \frac{T_F}{T}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

por lo que a primer orden de aproximación ($\ln z \gg 1$),

$$\frac{\mu}{kT} = \ln z \approx \frac{T_F}{T} \tag{1.45}$$

recuperando que a $T = 0$, $\mu = \varepsilon_F$. Mediante esta expresión para $\ln z$ se puede reescribir la ec. 1.43.

$$\begin{aligned}\ln z &\approx \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{4} n \lambda_{dB}^3 - \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\sqrt{\ln z}} \right]^{2/3} \\ &\approx \frac{T_F}{T} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{\sqrt{\ln z}} \left(\frac{T}{T_F} \right)^{3/2} \right] \\ &\approx \frac{T_F}{T} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]\end{aligned}\tag{1.46}$$

Y con esto se tiene una forma funcional para μ en el límite de bajas temperaturas.

$$\mu = kT \ln z \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]\tag{1.47}$$

Mediante esta expansión de μ puede calcularse la energía del gas, y con ella las demás variables termodinámicas [37].

$$E = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]\tag{1.48}$$

1.3. Superfluidez

La superfluidez es un conjunto de fenómenos que fueron observados inicialmente en líquidos de ^4He y ^3He y que pueden definirse bajo el criterio de *flujo sin disipación*. De su primera observación [38], esta nueva fase (He-II), que surge debajo de la llamada *temperatura* λ , se caracteriza por una viscosidad, si no nula, cuando menos con cota superior tres órdenes de magnitud más baja que el helio líquido He-I. Otra manifestación de la superfluidez es la cuantización del momento angular del superfluido: a velocidades angulares suficientemente bajas del contenedor, el superfluido se encuentra en un estado de momento angular cero [39], y es necesaria mayor velocidad angular para llevar al superfluido a su siguiente estado de momento angular.

La superfluidez está estrechamente ligada a los experimentos de gases ultrafríos pues son estos medios en los que, bajo ciertas condiciones, pueden llegar a observarse

comportamientos que sean indicativos de la superfluidez. Si bien BEC y superfluidez no son fenómenos equivalentes, las propiedades de un sistema con una ocupación macroscópica de su estado base da pie a modelos de este fenómeno. A su vez, y como fue observado también en ^3He a temperaturas aún menores, la superfluidez puede darse en sistemas fermiónicos que formen pares de Cooper.

La descripción de Landau de la superfluidez considera excitaciones cuantizadas al estado base de un *líquido de Bose*, acuñando el concepto de cuasipartícula. En su descripción, se separa a la sustancia en una fase superfluida y una fase regular, esta última albergando a las cuasipartículas [40]. La aproximación de Bogoliubov presenta una manera de deducir el espectro de excitaciones en un gas de Bose interactuante y, junto con el criterio de Landau, constituye un modelo para el surgimiento de la fase superfluida en estos sistemas. Lo expuesto en las siguientes secciones fue consultado en [33].

1.3.1. Excitaciones elementales

Consideramos un gas de Bose diluido con interacciones débilmente repulsivas en el que la ecuación de Gross-Pittaeviskii es válida. Se considera que no todos los bosones se encuentran en el estado base, sino que existen ocupaciones pequeñas del resto de estados excitados, aún a $T = 0$. Para estudiar un sistema de muchas partículas se introduce la *base de Fock*, que representa los números de ocupación en cada nivel de energía: $\{|n_0, n_1, n_2, \dots\rangle\}$. Se definen los operadores de creación \hat{b}_i^\dagger y de aniquilación \hat{b}_i , que representan el añadir o remover un bosón en un determinado estado.

$$\begin{aligned}\hat{b}_i^\dagger |n_0, \dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_0, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \\ \hat{b}_i |n_0, \dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i} |n_0, \dots, n_i - 1, \dots\rangle\end{aligned}\tag{1.49}$$

Estos satisfacen las siguientes reglas de conmutación.

$$[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0 \quad , \quad [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}\tag{1.50}$$

Utilizando estos operadores y las funciones de onda ψ_k para cada estado, se definen también los *operadores de campo*, que representan la creación o aniquilación de un bosón en \mathbf{r} en cualquier estado.

$$\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_k \psi_k^*(\mathbf{r}) \hat{b}_k^\dagger, \quad \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_k \psi_k(\mathbf{r}) \hat{b}_k \quad (1.51)$$

Estos cumplen mismas relaciones de conmutación de la ec. 1.50, solo que δ_{ij} se sustituye por $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

Tomemos un potencial de caja de volumen V , en cuyo caso las funciones de onda tienen forma $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Considerando una interacción de contacto (ec. 1.30),

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.52)$$

Utilizando las definiciones en la ec. 1.51 se deduce 1.53. El término cinético incluye el espectro del gas ideal $\hbar^2 k^2 / 2m$, y se complementa con el término de interacción, que da cuenta del proceso dispersivo entre bosones de momento \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 que resulta en partículas con momentos $\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}$ y $\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}$.

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2} \quad (1.53)$$

La ocupación macroscópica del estado base implica que $\hat{b}_0^\dagger \approx \hat{b}_0 = \sqrt{N_0}$. En la aproximación de Bogoliubov se considera la ocupación de los estados excitados como pequeña, de modo que términos de orden superior a segundo en $\psi_{\mathbf{k}}$ y $\psi_{\mathbf{k}}^*$ para $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ son despreciados en los cálculos. Con estas consideraciones, y utilizando las relaciones de conmutación de la ec. 1.50, el hamiltoniano se expresa de la siguiente manera.

$$\hat{H} = \frac{gN_0^2}{2V} + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{2gN_0}{V} \right) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \frac{gN_0}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}) \quad (1.54)$$

De la forma del hamiltoniano y la definición de los operadores $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{b}_{\mathbf{k}}$, se sigue que conserva el número total de átomos N , más no N_0 . Así, viene bien expresarlo conteniendo esta cantidad que se mantiene fija, y para ello se utiliza que $N = N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}$.

$$\hat{H} \approx \frac{gN^2}{2V} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{gN}{V} \right) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \frac{gN}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}) \quad (1.55)$$

El factor entre paréntesis es la suma de la energía de una partícula en la caja sin interacciones, y se le suma la contribución de la interacción, idéntica al potencial químico $\mu = gn$ de la aproximación de Thomas-Fermi; se le denota por ε_k . Para encontrar el espectro de excitaciones se debe diagonalizar el hamiltoniano. Para hacerlo, se utilizan las *transformaciones de Bogoliubov*, que introducen operadores $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$, que son combinaciones de $\hat{b}_{\pm\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{b}_{\pm\mathbf{k}}$. Los coeficientes $u_{\mathbf{k}}$ y $v_{\mathbf{k}}$ se deben determinar, y se pueden escoger como números reales.

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \\ \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}} \hat{b}_{-\mathbf{k}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{b}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^\dagger \\ \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger - v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}} \end{cases} \quad (1.56)$$

Al imponer que $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger$ y $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$ cumplan las relaciones de conmutación de la ec. 1.50, particularmente $[\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}, \hat{\alpha}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$, se obtiene la siguiente condición para $u_{\mathbf{k}}$ y $v_{\mathbf{k}}$.

$$u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1 \quad (1.57)$$

Se sustituye ec. 1.56 en la ec. 1.55:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{gN^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} + \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}) \left(\varepsilon_k (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) - \frac{2gN}{V} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \varepsilon_k \right) + \right. \\ & + (\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}) \left(\frac{gN}{V} (u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) - 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \varepsilon_k \right) + \\ & \left. + 2\varepsilon_k v_{\mathbf{k}}^2 - \frac{2gN}{V} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \right] \end{aligned} \quad (1.58)$$

Para deshacerse del tercer término en la suma, se escoge que $u_{\mathbf{k}}$ y $v_{\mathbf{k}}$ cumplan

$$\frac{gN}{V}(u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2) - 2u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}\varepsilon_k = 0 \quad (1.59)$$

Esta condición, junto con la ec. 1.57, permiten obtener expresiones para $u_{\mathbf{k}}$ y $v_{\mathbf{k}}$ en términos de ε_k y $\bar{\varepsilon}_k$, que se define a continuación.

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_k}{\bar{\varepsilon}_k} + 1 \right] \quad , \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_k}{\bar{\varepsilon}_k} - 1 \right] \quad , \quad \bar{\varepsilon}_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 - \left(\frac{gN}{V} \right)^2} \quad (1.60)$$

Utilizando las expresiones anteriores, el hamiltoniano se reescribe por última vez en la ec. 1.61. Los primeros dos términos son escalares, de modo que el único término a diagonalizar es proporcional a $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$. El hamiltoniano tiene una forma similar al de un gas ideal de Bose, que corresponde al primer término de la ec. 1.53, más una constante. Se interpreta que $\hat{\alpha}^\dagger$ y $\hat{\alpha}$ son operadores de creación y aniquilación de *excitaciones elementales*, que obedecen un hamiltoniano y reglas de selección de un gas de Bose. A estas excitaciones les corresponde un espectro de energías $\bar{\varepsilon}_k$.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{gN^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} (\bar{\varepsilon}_k - \varepsilon_k) + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \bar{\varepsilon}_k \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} \\ &= E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \bar{\varepsilon}_k \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Si $\varepsilon_k^{(0)} = \hbar^2 k^2 / 2m$ es el espectro de energías del gas ideal de Bose, como $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(0)} + gn_0$, entonces se reescribe $\bar{\varepsilon}_k$ de la siguiente manera.

$$\bar{\varepsilon}_k = \sqrt{(\varepsilon_k^{(0)})^2 + \frac{2gN}{V} \varepsilon_k^{(0)}} \quad (1.62)$$

1.3.2. Criterio de Landau

Con base a las excitaciones cuantizadas propuestas por Landau y halladas en la sección anterior con el método de Bogoliubov para el gas de Bose interactuante, se establece un criterio para la superfluidez.

La transformación galileana para la energía de un sistema con energía E y momento \mathbf{p} a otro sistema de referencia que se mueve con velocidad relativa \mathbf{v} es

$$E' = E - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.63)$$

Considérese el gas interactuante de Bose con energía E_0 en algún sistema de referencia, y un obstáculo (algún potencial localizado $V(\mathbf{r})$) que se mueve a velocidad \mathbf{v} . Debido al obstáculo, el gas adquiere una excitación de energía $\varepsilon(p)$ y momento \mathbf{p} . En el sistema de referencia del obstáculo, la energía del sistema es entonces

$$E' = E_0 + \varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}Mv^2 \quad (1.64)$$

donde M es la masa del fluido. Contemplando un flujo de partículas, $M = Nm$. La energía aportada por la excitación es $\varepsilon(\mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$, debido a que el estado base es de momento cero. Cuando esta energía sea cero o negativa, la creación de la excitación es energéticamente favorable y es posible que la presencia del obstáculo produzca una excitación con momento paralelo a su velocidad. Así que la velocidad debe ser al menos aquella para la cual alguna excitación cumpla $v = \varepsilon(p)/p$. De aquí surge la *velocidad crítica de Landau*, definida por la mínima velocidad que cumple este criterio.

$$v_c = \min \left(\frac{\varepsilon_p}{p} \right) \quad (1.65)$$

En ausencia de excitaciones, el fluido es incapaz de disipar energía, y se dice que el sistema es *superfluido*.

Para el gas de Bose no interactuante $\varepsilon(p) = p^2/2m$, y como el mínimo de momento es cero, entonces $v_c = 0$. En cambio, para el gas de Bose débilmente interactuante, de la ec. 1.62 se sigue que

$$v_c = \min \frac{1}{p} \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 + \frac{2gN}{V} \left(\frac{p^2}{2m} \right)} = \sqrt{\frac{gn}{m}} \quad (1.66)$$

De la expresión anterior también se puede ver que para excitaciones de momentos bajos, es decir, longitud de onda larga, tienen dispersión del tipo de ondas de sonido. Así, la velocidad crítica es justamente la velocidad del sonido.

$$v_c = \frac{\varepsilon}{p} = \frac{\omega}{k} \approx \sqrt{\frac{gn}{m}} := c_s \quad (1.67)$$

1.3.3. Vórtices cuantizados

Una característica observable de la fase superfluida es la presencia de vórtices. La función de onda del estado base de un gas de Bose interactuante es $\psi_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} \exp(i\varphi(\mathbf{r}, t))$. Expresada de esta manera, la densidad de corriente de probabilidad de esta función de onda adquiere una forma sencilla que permite establecer una analogía con la ecuación de continuidad de la hidrodinámica clásica.

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hbar}{2mi} (\psi_0^* \nabla \psi_0 - \psi_0 \nabla \psi_0^*) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} [\sqrt{n} e^{-i\varphi} \nabla (\sqrt{n} e^{i\varphi}) - \sqrt{n} e^{i\varphi} \nabla (\sqrt{n} e^{-i\varphi})] \\ &= \frac{\hbar}{m} n(\mathbf{r}, t) \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Como una densidad de corriente en un fluido es dada por $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$, se identifica a la velocidad del superfluido como el gradiente de la fase de la función de onda.

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi \quad (1.69)$$

Por ser igual a un gradiente, el flujo debe ser irrotacional: $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$. No obstante, si la fase contiene singularidades, puede darse que la circulación del fluido sea distinta de cero. No obstante, los valores resultan ser cuantizados debido a que a un valor de ψ_0 dado le corresponden infinitos valores de φ , que distan en múltiplos enteros de 2π . Así, si se considera calcular la circulación del fluido alrededor de alguna singularidad de φ ,

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \oint_C \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} (2\pi l) \neq \int_S (\nabla \times \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{a} \quad (1.70)$$

donde l es un valor entero.

Capítulo 2

Potenciales ópticos

Dentro de los métodos utilizados comúnmente para confinar átomos neutros se encuentran, por un lado, las trampas magnéticas y, por otro, las trampas ópticas. Las trampas ópticas se pueden valer de dos mecanismos distintos para atrapar a los átomos: utilizando luz resonante con alguna transición para ejercer una fuerza dispersiva producto de la absorción y emisión de fotones [41], o bien, utilizando luz lejos de la resonancia, induciendo un dipolo eléctrico e interaccionando con dicho dipolo [42].

Las trampas ópticas con luz fuera de la resonancia, conocidas como **trampas ópticas dipolares** (ODT por sus siglas en inglés), a diferencia de sus alternativas, permiten alcanzar las temperaturas necesarias para la degeneración de sistemas fermiónicos y cuentan además con una ventaja importante: la posibilidad de moldear su geometría mediante moduladores espaciales de luz, abriendo la posibilidad a un gran rango de experimentos. Quizá la principal desventaja de estas trampas es que producen potenciales considerablemente menos profundos que sus alternativas, de modo que procesos previos de enfriamiento son necesarios, en los que se recurre a los otros tipos de trampas [43]. En los experimentos de gases ultrafríos se recurre a las ODT en una última etapa de enfriamiento conocida como *enfriamiento evaporativo* [7] [44], en la que se llegan a temperaturas de degeneración.

En el Laboratorio se utilizan tres láseres para enfriar y atrapar a las muestras de ${}^6\text{Li}$. Dos de ellos trabajan con luz cercana a las resonancias D1 y D2 (~ 670 nm) del

${}^6\text{Li}$, dedicadas a las técnicas de enfriamiento láser por efecto Doppler y por gradiente de polarización, conocido también como efecto Sísifo [45]. El tercer láser, de 1064 nm, se utiliza para confinar a los átomos en una ODT.

Se cuenta con un cuarto haz láser, de 532 nm, que permitirá la realización potenciales repulsivos. Estos utilizan el mismo principio detrás de las ODT pero en vez de ejercer fuerzas confinantes ejerce fuerzas repulsivas. Esto será utilizado para moldear el potencial al que las muestras están sujetas, abriendo las posibilidades a nuevos experimentos.

En este capítulo se presenta una descripción de la interacción entre la luz como campo clásico y un átomo como sistema cuántico. Entender la interacción de la luz con los átomos es fundamental para motivar el uso de haces láser en la manipulación de gases ultrafríos, que es el tema central de este trabajo. Se utiliza una descripción semiclassical y una simplificación del átomo a un sistema cuántico de dos niveles para calcular las fuerzas entre átomo y luz. De la fuerza dipolar deducida se da una breve descripción de una ODT y algunas configuraciones usuales en experimentos. Al final, se comenta sobre las simplificaciones realizadas y por qué consideraciones más generales son innecesarias en las condiciones de nuestro experimento.

2.1. Sistema de dos niveles

El estudio de la interacción de la luz con el átomo desde el sistema de dos niveles requiere de simplificaciones considerables. La estructura del átomo se simplifica a solo dos niveles: el estado base y el estado excitado. La luz se considera como un campo clásico armónico, linealmente polarizado, con forma $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$. Su interacción con el átomo se aproxima como aquella de un dipolo oscilante $\hat{W}(t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$. Esta aproximación, conocida como *aproximación dipolar*, tiene validez en el régimen en que la longitud de onda de la luz es mucho mayor al tamaño del átomo, $\lambda \gg a_0$, por lo que puede aplicarse a nuestro caso dado que $a_0 \sim 0.50 \times 10^{-10}$ m, y que la longitud de onda del láser verde es $\sim 0.5 \times 10^{-6}$ m.

Las deducciones siguientes se basan en [46]. Considérese la interacción del dipolo

como perturbación.

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \quad (2.1)$$

El hamiltoniano imperturbado tiene eigenfunciones $\{\psi_1, \psi_2\}$ y eigenenergías $\{E_1, E_2\}$, que satisfacen la ecuación espacial de Schrödinger. Luego, las funciones de onda solución al hamiltoniano total \hat{H} serán combinaciones lineales de estas funciones de onda, con sus respectivas partes temporales. Definiendo $\omega_i = E_i/\hbar$, una función de onda cualquiera se escribiría, en notación de Dirac, de la siguiente manera.

$$|\psi(t)\rangle = c_1 |1\rangle e^{-i\omega_1 t} + c_2 |2\rangle e^{-i\omega_2 t} \quad (2.2)$$

Si se sustituye este estado en la ecuación de Schrödinger, uno encuentra las ecuaciones que rigen la evolución de los coeficientes c_1 y c_2 .

$$i\dot{c}_1(t) = \Omega \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) c_2(t) e^{-i\omega_0 t} \quad (2.3)$$

$$i\dot{c}_2(t) = \Omega^* \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) c_1(t) e^{i\omega_0 t} \quad (2.4)$$

donde se ha definido $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$, la frecuencia de resonancia del sistema. En el proceso surge una cantidad importante, conocida como *frecuencia de Rabi*, denotada por Ω , y definida como

$$\Omega = \frac{\langle 1 | e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 | 2 \rangle}{\hbar} \quad (2.5)$$

Esta frecuencia cuantifica el acoplamiento entre los estados base y excitado en virtud de la perturbación. Los láseres del laboratorio tienen frecuencia máxima de $\sim 1.3\omega_0$ (verde) y mínima de $\sim 0.6\omega_0$ (infrarrojo). De tal manera que $|\omega - \omega_0| \ll |\omega + \omega_0|$, lo que implica que de los dos términos que quedan al distribuir el producto en las ecuaciones 2.3 y 2.4, el término con la suma oscila mucho más rápido que aquel con la resta y su contribución promedia cero en tiempos considerables. Por ende, los términos $\omega + \omega_0$ pueden despreciarse, aplicando lo que se conoce como *aproximación*

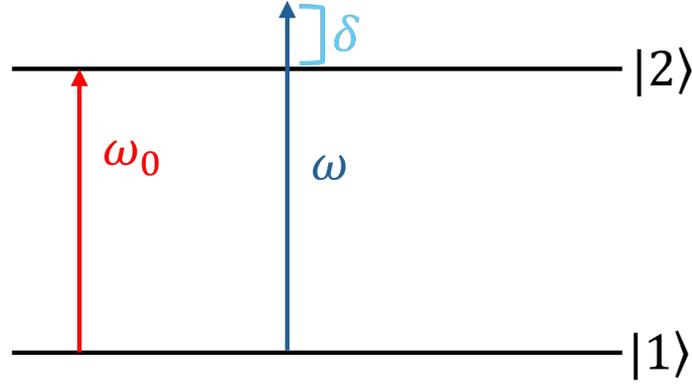


Figura 2.1: Sistema de dos niveles.

de onda rotante. El resultado es un sistema de dos ecuaciones a dos variables acoplado, que resulta en la siguiente ecuación de segundo orden.

$$\ddot{c}_2 + i\delta\dot{c}_2 + \left|\frac{\Omega}{2}\right|^2 c_2 = 0 \quad (2.6)$$

En esta ecuación se introduce un nuevo parámetro que conoceremos como **desintonía**: $\delta = \omega - \omega_0$, que es la diferencia entre la frecuencia de excitación del sistema ω (la frecuencia de los láseres que se utilizan) y la frecuencia de resonancia ω_0 (correspondiente a la transición de interés).

Si se impone que $c_1(0) = 1$ y $c_2(0) = 0$, entonces uno obtiene una solución armónica, como se muestra en la ec. 2.7.

$$|c_2(t)|^2 = \frac{|\Omega|^2}{\delta^2 + |\Omega|^2} \text{sen}^2\left(\frac{\sqrt{\delta^2 + |\Omega|^2}}{2}t\right) \quad (2.7)$$

La población del estado base puede calcularse según $|c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2$. Esto quiere decir que las poblaciones de estos estados oscilan periódicamente con el tiempo, limitados por la δ en el sentido que modula la amplitud de estas, presentando inversión de población e incluso alcanzando $|c_2|^2 = 1$ en el caso de luz resonante. Estas son las llamadas *oscilaciones de Rabi*. La amplitud de la oscilación es una curva lorentziana en la desintonía.

Es importante tener en cuenta que en este resultado no se considera la emisión espontánea. Al introducir términos asociados al decaimiento espontáneo, la inversión

de población deja de ser viable, y el estado base permanece dominante sobre el estado excitado. Este comportamiento es característico de las transiciones relevantes para este trabajo, las cuales corresponden a transiciones dipolares eléctricas. No obstante, existen otros tipos de transiciones en las que el decaimiento espontáneo es altamente improbable, como las que ocurren entre los niveles hiperfinos del estado base del litio. Estas corresponden a transiciones dipolares magnéticas, prohibidas por interacción eléctrica, en las cuales sí se observan oscilaciones de Rabi [47].

2.1.1. Ecuaciones ópticas de Bloch

Para estudiar la evolución temporal del sistema de dos niveles e introducir el rol de la emisión espontánea en el sistema, se introduce un sistema de ecuaciones conocido como ecuaciones ópticas de Bloch.

Tomemos el estado de la ec. 2.2. La matriz de densidad que este define es:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Los elementos diagonales ρ_{11} y ρ_{22} representan las poblaciones de los estados base y excitado, respectivamente, y los no diagonales ρ_{12} y ρ_{21} son conocidos como *coherencias*. Las coherencias determinan la respuesta del sistema a la frecuencia que lo impulsa. Un sencillo cálculo muestra que el valor esperado del dipolo depende de estas coherencias:

$$-e\langle x \rangle = -2e \langle 1 | x | 2 \rangle \operatorname{Re}\{\rho_{12} e^{i\omega_0 t}\} \quad (2.9)$$

El operador $\hat{\rho}$ satisface la ecuación de Heisenberg. De modo que si uno conoce el hamiltoniano del sistema, puede conocer las ecuaciones que rigen la evolución de $\hat{\rho}$ y sus elementos.

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (2.10)$$

El hamiltoniano en cuestión, escrito en forma matricial, se muestra en la ec. 2.11.

Este resultado se sigue fácilmente de la definición de la frecuencia de Rabi Ω , ec. 2.5.

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \langle 1 | \hat{H} | 1 \rangle & \langle 1 | \hat{H} | 2 \rangle \\ \langle 2 | \hat{H} | 1 \rangle & \langle 2 | \hat{H} | 2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hbar\omega_1 & \hbar\Omega \cos(\omega t) \\ \hbar\Omega \cos(\omega t) & \hbar\omega_2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La sustitución de $\hat{\rho}$ y \hat{H} en la ec. 2.10 es un cálculo largo, el cual, nuevamente, puede consultarse en [46]. De entre las cosas que debe resaltarse de este proceso es que se introduce un cambio de variables mediante la desintonía $\delta = \omega - \omega_0$.

$$\begin{aligned} c_1 &= \tilde{c}_1 e^{i\delta t/2} \\ c_2 &= \tilde{c}_2 e^{-i\delta t/2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

A las ecuaciones que resultan de este proceso se les conoce como *ecuaciones ópticas de Bloch*. Los elementos de $\hat{\rho}$ con tilde se definen igual que los elementos originales, pero usando \tilde{c}_i en vez de c_i . Notemos que $\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11}$ y $\tilde{\rho}_{22} = \rho_{22}$.

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12}) \\ \dot{\rho}_{22} &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \\ \dot{\rho}_{12} &= -i\delta\tilde{\rho}_{12} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para introducir el efecto de la emisión espontánea en las coherencias y poblaciones, vale la pena atacar el problema en analogía con un dipolo clásico.

2.1.2. Amortiguamiento en un dipolo clásico

Dado un oscilador armónico amortiguado de frecuencia natural ω_0 y con un forzamiento de la forma $F(t) \cos(\omega t)$, su ecuación de movimiento se ve de la siguiente manera.

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \cos(\omega t) \quad (2.14)$$

La solución a esta ecuación tiene la forma de la ec. 2.15, donde U es la componente en fase y V la componente en cuadratura.

$$x = U(t) \cos(\omega t) - V(t) \sin(\omega t) \quad (2.15)$$

Para continuar, supondremos que la variación temporal de U y V son lentas en comparación con la frecuencia ω , de tal manera que para los tiempos que conciernen al forzamiento del dipolo se puede considerar que $\ddot{U} = \ddot{V} = 0$, $\dot{U} \ll \omega V$ y $\dot{V} \ll \omega U$. Además, supondremos que la frecuencia de excitación es cercana a la de resonancia, así como se hizo en la aproximación de onda rotante. De esta manera, $\omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$. Con estas consideraciones, al sustituir la ec. 2.15 en la ec. 2.14 ecuaciones para U y V de primer orden.

$$\begin{aligned} \dot{U} &= (\omega - \omega_0)V - \frac{\beta}{2}U \\ \dot{V} &= -(\omega - \omega_0)U - \frac{\beta}{2}V - \frac{F(t)}{2m\omega} \end{aligned} \quad (2.16)$$

La solución estacionaria (ec. 2.17) para estas ecuaciones nos da información sobre el rol de estas dos amplitudes en el proceso de interacción de la luz con los átomos-dipolo.

$$\begin{aligned} U &= \frac{F}{2m\omega} \cdot \frac{-\beta/2}{(\beta/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \\ V &= \frac{F}{2m\omega} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\beta/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

La energía del sistema bajo las aproximaciones hechas en la deducción de ec. 2.14 depende de ambas amplitudes del dipolo. Yendo aún más lejos, la variación de la energía nos indica el rol de las amplitudes en fase y cuadratura en el proceso de intercambio de energía entre el dipolo y la luz. Sustituyendo las expresiones ec. 2.16 en \dot{E} se obtienen dos términos. El primero indica que existe una disminución en la energía proporcional a ella misma. Luego, en ausencia de forzamiento, la energía decae exponencialmente. El segundo término da el efecto del forzamiento, es decir, el efecto de la interacción entre el dipolo y la luz.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \approx \frac{1}{2}m\omega^2(U^2 + V^2) \quad (2.18)$$

$$\dot{E} = m\omega^2(U\dot{U} + V\dot{V}) = -\beta E - \frac{1}{2}F\omega V \quad (2.19)$$

La forma del segundo término es una lorentziana en la desintonía δ . Este comportamiento ya lo habíamos identificado en nuestro primer estudio del sistema de dos niveles al descubrir que las poblaciones de los niveles $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ son dadas por esta curva.

Volvamos un paso atrás a la ec. 2.9, para interpretar el rol de los elementos de la matriz de densidad por medio de este enfoque clásico del dipolo. Según esta ecuación, y utilizando el cambio de variable de ec. 2.12,

$$\begin{aligned} -e\langle x \rangle &= -e \langle 1|x|2 \rangle (\tilde{\rho}_{12}e^{i\omega t} + \tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega t}) \\ &= -e \langle 1|x|2 \rangle [\cos(\omega t)(\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{21}) + i \sin(\omega t)(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21})] \\ &= -e \langle 1|x|2 \rangle [u \cos(\omega t) - v \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

El valor de expectación del dipolo tiene la misma forma que la solución para el dipolo clásico, como es de esperarse. Pero esta forma nos permite asociar las componentes en fase y cuadratura con los elementos de $\hat{\rho}$.

$$\begin{aligned} u &= \tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{21} \\ v &= -i(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Estas dos cantidades, junto con $w = \rho_{11} - \rho_{22}$ que no es más que la diferencia entre poblaciones de los dos niveles, definen un vector $\mathbf{R} = u\hat{\mathbf{e}}_1 + v\hat{\mathbf{e}}_2 + w\hat{\mathbf{e}}_3$ conocido como *vector de Bloch*. Las ecuaciones ópticas de Bloch (ec. 2.13) pueden escribirse en términos de las componentes de este vector. Las particularidades del vector de Bloch no son de interés aquí, pero es interesante destacar que este es un vector unitario y, si δ y Ω permanecen constantes, entonces su evolución es aquella de un vector que precesa en torno a $\mathbf{W} = \delta\hat{\mathbf{e}}_1 + \Omega\hat{\mathbf{e}}_3$.

Usando entonces las ec. 2.13, la evolución del vector de Bloch queda descrita por

las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \dot{\rho}_{12} + \dot{\rho}_{21} = v\delta \\
 \dot{v} &= -i(\dot{\rho}_{12} - \dot{\rho}_{21}) = -u\delta + \Omega w \\
 \dot{w} &= \dot{\rho}_{11} - \dot{\rho}_{22} = -\Omega v
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Si comparamos las ecuaciones para u y v con aquellas para U y V en ec. 2.16, se puede ver que \dot{U} depende de $V\delta$ de la misma manera que \dot{u} de $v\delta$. Caso similar con el término δ de \dot{v} y \dot{V} . Para \dot{V} se tiene un término que depende del forzamiento, y \dot{v} un término que depende de Ω . Pero la frecuencia de Rabi depende precisamente de la interacción campo-dipolo, como se puede ver de su definición. Más aún, como la energía del sistema de dos niveles es proporcional a la población del estado excitado, $E = \hbar\omega_0\rho_{22}$, entonces

$$\dot{E} \sim \dot{\rho}_{22} = -\frac{1}{2}\dot{w} = \frac{\Omega}{2}v \tag{2.23}$$

Comparando con ec. 2.19, y de la discusión anterior, podemos ver que Ω se relaciona con el forzamiento. No obstante, del desarrollo clásico que conduce a las ecuaciones 2.17 y 2.19 podemos ver que existen términos adicionales que no se incluyen en aquellas ecuaciones derivadas del estudio del sistema de dos niveles. Estos términos son precisamente aquellos que dependen del amortiguamiento β , que en el lenguaje cuántico del átomo vendría siendo la contribución de la emisión espontánea.

De tal manera que si concebimos una tasa de decaimiento espontáneo γ que determina la pérdida de energía por este medio, la dependencia debe ser proporcional a la población del estado excitado: $\dot{E} \sim -\gamma\rho_{22}$. Pero ya vimos que del modelo clásico $\dot{E} \sim -\beta E$. Es así que β determina el decaimiento en la energía por razones distintas al forzamiento en el sistema, y en analogía γ determina el decaimiento en población del estado excitado por razones distintas a la acción de la interacción átomo-dipolo. Por este motivo, se asocia β en términos de energía con γ en términos de población, y las contribuciones que β tiene en \dot{U} y \dot{V} se tomarán para considerar el decaimiento espontáneo en las ecuaciones ópticas de Bloch.

A \dot{u} y \dot{v} se les corrige añadiendo términos $(-\gamma/2)u$ y $(-\gamma/2)v$, respectivamente. A $\dot{\rho}_{22}$ se le añade un término de la forma $-\gamma\rho_{22}$. En consecuencia, las OBE en términos del vector de Bloch considerando decaimiento espontáneo se ven como sigue.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \delta v - \frac{\gamma}{2}u \\ \dot{v} &= -\delta u + \Omega w - \frac{\gamma}{2}v \\ \dot{w} &= -\Omega v + 2\gamma\rho_{22} = -\Omega v + \gamma(1 - w)\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde se usó que $\rho_{22} = (1 - w)/2$. Las ec. 2.25 son las OBE con decaimiento espontáneo en términos de los elementos de la matriz de densidad.

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{11} &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) + \gamma\rho_{22} \\ \dot{\rho}_{22} &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) - \gamma\rho_{22} \\ \dot{\tilde{\rho}}_{12} &= -\left(i\delta + \frac{\gamma}{2}\right)\tilde{\rho}_{12} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} &= -\left(-i\delta + \frac{\gamma}{2}\right)\tilde{\rho}_{21} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{22} - \rho_{11})\end{aligned}\tag{2.25}$$

2.1.3. Soluciones estacionarias

Sean todas las derivadas temporales de los elementos de $\hat{\rho}$ iguales a cero en ec. 2.25. De las últimas dos ecuaciones se pueden hallar expresiones para las coherencias en términos de $w = \rho_{11} - \rho_{22}$.

$$\tilde{\rho}_{12} = \frac{\frac{i}{2}\Omega w}{i\delta + \gamma/2} \quad , \quad \tilde{\rho}_{21} = \frac{\frac{i}{2}\Omega w}{i\delta - \gamma/2}\tag{2.26}$$

Usando estas expresiones, de las primeras dos ecuaciones se deduce una expresión para w en términos de δ , γ y Ω .

$$\begin{aligned}
0 &= 2\gamma\rho_{22} + i\Omega(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}) \\
&= \gamma(1 - w) - \frac{\Omega^2 w}{2} \cdot \frac{\gamma}{\delta^2 + \gamma^2/4} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{1 + S} \\
&= 1 - w \left[1 + \frac{\Omega^2/2}{\delta^2 + \gamma^2/4} \right] \\
&:= 1 - w(1 + S)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$S = \frac{2\Omega^2/\gamma^2}{1 + 4\delta^2/\gamma^2} := \frac{s_0}{1 + 4\delta^2/\gamma^2} \tag{2.28}$$

Definimos aquí el llamado *parámetro de saturación* S , siempre positivo, y que define la diferencia entre las poblaciones de los estados. A $s_0 = 2\Omega^2/\gamma^2$ se le conoce como *parámetro de saturación en resonancia*, y es el valor máximo que S puede alcanzar con Ω . De tal modo que para una intensidad de luz fija, i.e. Ω constante, el valor mínimo que puede tener la diferencia de poblaciones es $w = 1/(1 + s_0)$. De esta manera el nombre *saturación* cobra sentido. Una definición alternativa para s_0 es en términos de la *intensidad de saturación*, $s_0 = I/I_{sat}$, dejando de esta manera más claro cómo se relaciona con la intensidad de la luz, una cantidad más familiar para los instrumentos de medición en el laboratorio que la frecuencia de Rabi. La equivalencia de ambas definiciones puede obtenerse al estudiar la sección transversal óptica (optical cross-section), que no es del interés de esta tesis.

De ec. 2.26 y las definiciones de u y v , o bien de ec. 2.16, se puede deducir su expresión para las soluciones estacionarias para las componentes del vector de Bloch.

$$\begin{aligned}
u &= \frac{2\delta}{\Omega} \cdot \frac{s_0}{1 + s_0 + 4\delta^2/\gamma^2} \\
v &= \frac{\gamma}{\Omega} \cdot \frac{s_0}{1 + s_0 + 4\delta^2/\gamma^2}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

La población del estado excitado puede expresarse en términos de esta nueva cantidad.

$$\begin{aligned}
\rho_{22} &= \frac{1-w}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1+S} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{s_0}{1 + 4\delta^2/\gamma^2 + s_0}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Es de destacar que al incluir la emisión espontánea, la diferencia de poblaciones es siempre no negativa: $w \geq 0 \Rightarrow \rho_{11} \geq \rho_{22}$. Esto contrasta con los resultados hallados para las poblaciones $|c_2|^2$ y $|c_1|^2$ en la primera sección del capítulo, donde podía existir inversión de población e incluso una población total del estado excitado para el caso de luz resonante. El valor mínimo que puede alcanzar w es cero, y eso es el caso especial en que $S \gg 1$ (intensidad de luz muy alta), y entonces $\rho_{11} \approx \rho_{22} \approx 1/2$. Lo más que se puede aspirar a llegar es una igualdad de poblaciones, requiriendo intensidades altas y desintonías bajas para llegar a este caso.

2.2. Fuerzas de radiación

2.2.1. Fuerza de esparcimiento

La luz porta momento, y esto es algo que puede estudiarse clásicamente y cuánticamente. El tratamiento cuántico nos dice que cada fotón lleva un momento igual a $\hbar\mathbf{k}$. Si un átomo absorbe un fotón, entonces habrá ganado dicho momento en virtud de la conservación. Este hecho es la base de las técnicas de enfriamiento que se utilizan en muchos experimentos con átomos fríos.

El intercambio de momento entre luz y átomo se puede describir como una fuerza que actúa sobre ellos. A esta fuerza se le conoce como *de esparcimiento*, y en una descripción donde las escalas de tiempo son tales que muchos ciclos de absorción y emisión toman lugar, uno puede escribir esta fuerza como el producto del cambio de momento $\hbar\mathbf{k}$ con la tasa a la que ocurre la dispersión de fotones, esto es $\Gamma_{ph} = \gamma\rho_{22}$.

$$\mathbf{F}_{scat} = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{I/I_{sat}}{1 + I/I_{sat} + 4\delta^2/\gamma^2} \hbar\mathbf{k} \tag{2.31}$$

A intensidades altas esta fuerza se aproxima asintóticamente a su valor máximo, $\gamma\hbar\mathbf{k}/2$, lo cual indica que la tasa de dispersión se aproxima a $\gamma/2$, que concuerda con el hecho que la población tiende a repartirse equitativamente en los dos niveles.

De esta fuerza surgen conceptos como el desacelerador Zeeman, las melazas ópticas y también las trampas magneto-ópticas, todas estas técnicas son utilizadas en el LMU. Pero la fuerza que es realmente de interés en este trabajo no surge en virtud de la absorción y dispersión de fotones, sino de la acción refractora del medio sobre la luz.

2.2.2. Fuerza dipolar

Consideremos un átomo con polarizabilidad $\alpha(\omega)$, de tal manera que el dipolo inducido en él por un campo eléctrico \mathbf{E} es $-\mathbf{e}\mathbf{r} = \alpha(\omega)\mathbf{E}$. El dipolo no es un dipolo permanente, sino que surge por la acción del campo eléctrico. La energía de un dipolo interactuando con un campo eléctrico es $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$, de tal manera que para una pequeña variación del campo $d\mathcal{E}$, el dipolo que se produce (en dirección paralela al campo), requiere de una energía $dU = \alpha(\omega)\mathcal{E}d\mathcal{E}$, y si inicialmente no hay campo y el valor final de este es E , entonces

$$U = -\frac{1}{2}\alpha(\omega)E^2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \quad (2.32)$$

Con esta expresión para la energía de interacción se puede calcular la fuerza que la luz ejerce sobre el átomo-dipolo.

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \alpha(\omega)E\nabla E \quad (2.33)$$

Consideremos que el campo eléctrico que induce el dipolo es de la forma $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{\mathbf{x}}$. De esta manera, el dipolo inducido se orienta en dirección al campo eléctrico: $-\mathbf{e}\mathbf{r} = -ex\hat{\mathbf{x}}$. Consideremos además que nos posicionamos en el sistema de referencia del átomo ($\mathbf{r} = 0$), y que el dipolo inducido en el átomo está en fase con el campo que lo excita (así como se muestra en la ec. 2.9).

$$\mathbf{F} = -e \langle 1|x|2 \rangle (u \cos(\omega t) - v \sin(\omega t)) (\nabla E_0 \cos(\omega t) + \mathbf{k} E_0 \sin(\omega t)) \quad (2.34)$$

El promedio temporal en un intervalo que abarca varios ciclos de oscilación reduce los términos cruzados a cero y los términos cuadráticos se reducen a 1/2.

$$\bar{\mathbf{F}} = -\frac{1}{2} e \langle 1|x|2 \rangle [u \nabla E_0 - v E_0 \mathbf{k}] \quad (2.35)$$

El segundo término en la ec. 2.35 ya lo conocemos, y es precisamente la fuerza de esparcimiento. Esto se comprueba recordando que $\Omega = e \langle 1|x|2 \rangle E_0 / \hbar$, y utilizando la expresión para v de ec. 2.29. El primer término corresponde a la fuerza llamada *dipolar*.

$$\mathbf{F}_{dip} = -\frac{\hbar}{2} u \nabla \Omega = -\frac{\hbar \delta}{\Omega} \cdot \frac{s_0}{1 + s_0 + 4\delta^2/\gamma^2} \nabla \Omega \quad (2.36)$$

Es de notar que esta fuerza se anula en resonancia, pues es proporcional a δ . En particular, nos interesa el caso en que la desintonía es muy grande comparada con la tasa de decaimiento γ y con la frecuencia de Rabi Ω . Reescribiendo la ec. 2.36 de manera que quede expresada en términos de γ/δ y Ω/δ , uno obtiene una expresión para esta fuerza cuando la luz está muy fuera de resonancia.

$$\mathbf{F}_{dip} \approx -2 \frac{\hbar}{4\delta} \Omega \nabla \Omega = -\frac{\hbar}{4\delta} \nabla (\Omega^2) \quad (2.37)$$

Utilizando la relación entre Ω y la intensidad de la luz por medio del parámetro de saturación en resonancia s_0 , se encuentra que esta fuerza dipolar es paralela o antiparalela al gradiente de intensidad, dependiendo del signo de la desintonía. Eso es equivalente a decir que el potencial óptico producido por un haz láser desintonizado es proporcional al perfil de intensidad de la luz, y el átomo es repelido o atraído por los máximos de intensidad dependiendo, nuevamente, del signo de la desintonía.

$$\mathbf{F}_{dip} \approx -\frac{\hbar \gamma^2}{8\delta} \nabla \left(\frac{I}{I_{sat}} \right) \quad , \quad U_{dip} \approx \frac{\hbar \gamma^2}{8\delta} \cdot \frac{I}{I_{sat}} \quad (2.38)$$

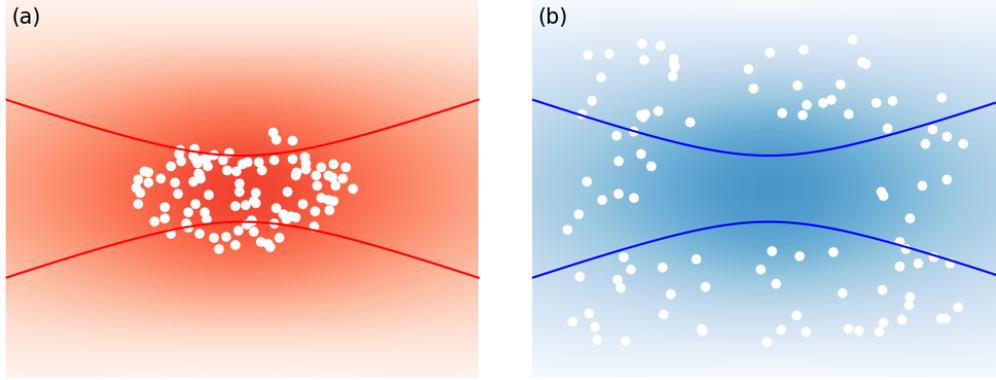


Figura 2.2: Se muestra esquemáticamente el efecto de un haz gaussiano enfocado sobre átomos en los casos en que su frecuencia está desintonizada (a) al rojo ($\delta < 0$) y (b) al azul ($\delta > 0$). La escala de colores representa la intensidad.

2.3. Trampas dipolares

A lo largo del capítulo se ha descrito a los átomos por medio de un sistema de dos niveles y estudiando el efecto de un campo eléctrico oscilante sobre el momento dipolar eléctrico del mismo. Mediante este modelo semiclásico se han deducido expresiones útiles para el entendimiento de la interacción entre luz y átomos y, particularmente, se han deducido dos fuerzas que actúan en un régimen estacionario. Toca ahora enfocarse en una de las aplicaciones más importantes de esta fuerza en experimentos de física atómica: las ODT.

Su valor radica, principalmente, en que la dependencia del potencial de la posición es la misma que la de la intensidad de la luz que lo produce: si se moldea la intensidad, se moldea el potencial. En su forma más sencilla, las ODT son simples haces gaussianos enfocados por alguna lente. Se utilizan potencias muy altas y desintonías negativas también grandes para, por una parte, aumentar la profundidad del potencial confinante ($\sim I/\delta$) y, por otra, reducir el efecto de la fuerza de esparcimiento que calienta la muestras ($\sim I/\delta^2$). Las trampas de luz desintonizada al rojo atrapan al potencial en el máximo de intensidad (ver Figura 2.2). La simplicidad de su implementación y su capacidad de concentrar átomos en un punto del espacio las hacen herramientas poderosas para experimentos de física atómica.

Un haz gaussiano que se propaga en dirección \hat{z} tiene un perfil de intensidad que

es dado por la expresión:

$$I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left(-\frac{2r^2}{w(z)^2} \right) \quad (2.39)$$

donde r es la distancia de un punto al eje de propagación del haz, el eje de máxima intensidad [48]. El radio del haz se define como la distancia al eje a la cual la intensidad cae en un factor de $1/e^2$. El comportamiento del radio a lo largo del eje de propagación es hiperbólico y se describe mediante la función $w(z)$ (ec. 2.40). Su valor mínimo, w_0 , se conoce como *cintura de haz*, y se alcanza en $z = 0$, el foco del haz. z_R se conoce como *rango de Rayleigh* y representa la distancia a lo largo del eje de propagación a la cual el radio del haz es el doble que su cintura.

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}, \quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2.40)$$

La intensidad máxima del haz en su foco, I_0 , se relaciona con la potencia del mismo mediante la cintura según la siguiente expresión:

$$I_0 = \frac{2P_0}{\pi w_0^2} \quad (2.41)$$

Cerca del centro del potencial este puede aproximarse como armónico expandiendo a segundo orden como se muestra en la ec. 2.42. De esta expansión se obtienen los parámetros ω_r y ω_z , conocidos como *frecuencias de trampa*. Para cuando la intensidad no tenga simetría axial, ω_x y ω_y toman el lugar de ω_r , con formas análogas, habiendo también cinturas w_{x0} y w_{y0} . El signo de la contribución de segundo orden depende de si el potencial es atractivo o repulsivo.

$$U(\mathbf{r}) \approx U(0) \pm \frac{1}{2}m(\omega_r^2 r^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.42)$$

Las frecuencias de trampa llevan la información de la forma del potencial en su fondo o cima, y dependen de la potencia y la cintura del haz, ambos parámetros

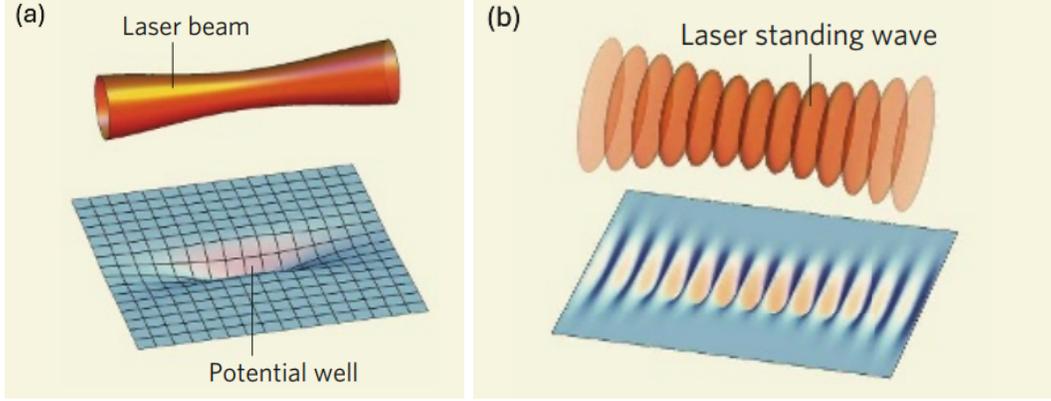


Figura 2.3: (a) Un potencial atractivo creado por un haz enfocado. (b) Un haz interfiere con su reflejo y produce una onda estacionaria. Este concepto generalizado a más dimensiones da pie a las *optical lattices*. Imágenes obtenidas de [51].

ajustables experimentalmente.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\hbar\gamma^2}{8|\delta|I_{sat}} \cdot \frac{2P_0}{m\pi^3w_0^4}} \quad , \quad \omega_z = \sqrt{\frac{\hbar\gamma^2}{8|\delta|I_{sat}} \cdot \frac{P_0}{m\pi^3w_0^2z_R^2}} \quad (2.43)$$

Esta aproximación es ampliamente utilizada en el estudio de la dinámica de los gases ultrafríos, cuyas bases fueron mencionadas en el capítulo 1. Dependiendo de la razón ω_r/ω_z se dice que se cuenta con una trampa prolata ($\omega_r/\omega_z > 1$) u oblata ($\omega_r/\omega_z < 1$).

La combinación de múltiples haces desintonizados al rojo permite crear regiones de confinación más allá del perfil paraboloidal de la ec. 2.42. Utilizar dos haces cruzados en cierto ángulo puede dar pie a modificar las frecuencias de trampa, incluso pudiendo eliminar la anisotropía inherente a $\omega_r \neq \omega_z$. Reflejar un haz láser normalmente para producir una onda estacionaria produce interferencia a lo largo de la dirección axial, modulando la intensidad sinusoidalmente con máximos cada $\lambda/2$ (ver Figura 2.3), ofreciendo un confinamiento más estrecho, posibilitando técnicas de enfriamiento por transiciones Raman que alcanzan altas densidades de espacio-fase [49]. El uso de múltiples haces cruzados con polarización adecuada puede producir las famosas *redes ópticas* (*optical lattices*) [50].

Las trampas repulsivas también se emplean en el confinamiento de átomos, aunque su diseño requiere una planificación más sofisticada en la distribución del perfil

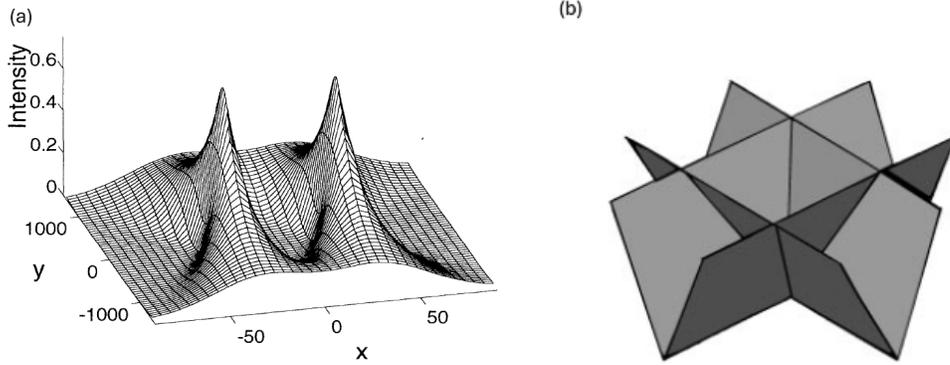


Figura 2.4: (a) El perfil de intensidad en una trampa formada por dos *light sheets* que forman una V. El perfil es aquel en un plano a cierta altura del vértice de la V. Imagen obtenida de [52]. (b) Un potencial repulsivo formado por *light sheets*, creando una trampa en forma de pirámide invertida para átomos de sodio. Los átomos se acumulan en la cúspide de la pirámide bajo la acción de la gravedad. Imagen obtenida de [53].

de intensidad. Mediante el uso de un haz enfocado, es posible restringir el acceso de los átomos a una región específica, lo que resulta útil, por ejemplo, para minimizar pérdidas en una trampa magnética [7]. Un método ampliamente utilizado en este contexto es el empleo de *hojas de luz* (*light sheets*), las cuales permiten generar potenciales con paredes abruptas [52] [53] (Figura 2.4). Una ventaja significativa de las trampas repulsivas es que los átomos tienden a acumularse en las regiones de menor intensidad, lo que reduce la perturbación energética en comparación con las trampas desintonizadas al rojo. Esta característica las hace especialmente adecuadas para aplicaciones en espectroscopía de alta precisión.

En el LMU, el haz de 1064 nm ($\delta < 0$) confina con una potencia inicial de 200 W, que disminuye gradualmente hasta ~ 40 mW al final del enfriamiento evaporativo. Se cuenta además con un haz secundario, perpendicular al primero tanto en dirección de propagación como polarización, cuya labor principal es reducir la variación de la posición del condensado dentro de la trampa, particularmente en la dirección axial que tiene un confinamiento más débil que el radial. En proceso de implementarse está también una trampa producida por un haz gaussiano enfocado con una lente cilíndrica, rompiendo la simetría axial, confinando fuertemente una sola dirección para producir así trampas cuasi-2D.

2.4. Más allá del sistema de dos niveles

El sistema de dos niveles y la analogía con un oscilador armónico clásico son buenas herramientas para entender a un nivel sencillo de dónde surgen las fuerzas de esparcimiento y dipolar. No obstante, en la sección 1.1.1 se mostró la compleja estructura interna del ${}^6\text{Li}$. Queda la pregunta de cómo conciliar lo deducido en el capítulo con la complejidad real del problema. Aún más, considerando las transiciones del litio, si solo la transición al doblete D tiene una desintonía positiva respecto de 532 nm, queda justificar por qué el potencial ejercido por esta longitud de onda es repulsivo.

La luz como campo eléctrico oscilante induce corrimientos de energía en la estructura. Estos corrimientos se pueden obtener mediante teoría de perturbaciones hasta segundo orden, un caso ampliamente estudiado conocido como *efecto Stark AC* [54]. Utilizando teoría de perturbaciones, el primer orden que contribuye al corrimiento es el orden segundo. El corrimiento es dado por la ec. 2.44, y su deducción puede consultarse en [33].

$$\alpha(\omega) = \sum_{i>0} \frac{2(E_i - E_0) |\langle i | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}} | 0 \rangle|^2}{(E_i - E_0)^2 - (\hbar\omega)^2} = \frac{e^2}{m} \sum_{i>0} \frac{f_{i0}^x}{\omega_{i0}^2 - \omega^2} \quad (2.44)$$

$$f_{\alpha\beta}^x = \frac{2m\omega_{ij}}{e^2\hbar} |\langle \alpha | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}} | \beta \rangle|^2$$

A los $f_{\alpha\beta}$ se les conoce como *fuerza de oscilador*, y cuantifica la probabilidad absorción o emisión de radiación entre dos niveles de energía. Las transiciones consideradas son respecto del estado base $|0\rangle$. La suma de estos sobre todos los niveles respecto de un j fijo (por ejemplo, el base) es 1 (regla de la suma de Thomas–Reiche–Kuhn [14]), de modo que funcionan como pesos. El dipolo eléctrico contempla a todos los electrones del átomo: $\mathbf{d} = -e \sum_i \mathbf{r}_i$.

El decaimiento espontáneo en la ec. 2.44 se considera como una contribución imaginaria a la energía. Si el estado tiene un tiempo de vida γ^{-1} , tiempo en que hay una caída de amplitud de e^{-2} , esta caída puede ser contemplada en $\exp(-iEt/\hbar)$ mediante $E \rightarrow E - i\hbar\gamma/2$. Esto convierte a $\alpha(\omega)$ en una cantidad compleja.

Para simplificar el estudio de átomos multielectrónicos es usual considerar que el

potencial coulombiano percibido por los electrones de valencia es apantallado por los electrones interiores, especialmente en los alcalinos. La primera transición en la parte óptica del espectro para los alcalinos es la transición $nP - nS$, y las posteriores, por reglas de selección, requieren también transiciones a estados P de niveles superiores. No solo eso, sino que la fuerza de oscilador de esta primera transición es, generalmente, dominante sobre el resto. Por ello es común considerar un solo electrón y su primera transición, reduciendo el problema al átomo de dos niveles.

En los casos de luz desintonizada de la transición, la población de los estados excitados es negligible en comparación con la población del estado base, de modo que, efectivamente, la parte real de la corrección, $\text{Re}\{\Delta E_g\} = -\frac{1}{2} \text{Re}\{\alpha(\omega)\} \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_t$ funge como potencial sobre el átomo. La parte imaginaria, por otra parte, determina la tasa de absorción del estado base: $\gamma_g = -\frac{2}{\hbar} \text{Im}\{\Delta E_g\}$.

Para el litio, la primera transición óptica es $2S \rightarrow 2P$, el doblete D_1 y D_2 . La siguiente transición desde el estado base es $2S \rightarrow 3P$, con frecuencia 2.07 veces mayor a la de la primera (ver Tabla 1.2). El factor $1/(\omega_{n0}^2 - \omega^2)$ en los sumandos de la ec. 2.44 para la transición $2S \rightarrow 3P$ es un 21 % de aquel para $2S \rightarrow 2P$ cuando la frecuencia corresponde a $\lambda = 532$ nm, y 15 % cuando $\lambda = 1064$ nm. Se puede también comparar las fuerzas de oscilador de estas transiciones y con ello comparar también las contribuciones de las transiciones a la polarizabilidad:

$$\begin{aligned} \frac{f_{2S \rightarrow 3P}^x}{f_{2S \rightarrow 2P}^x} &= \frac{\omega_{2S \rightarrow 3P} |\langle 2S | x | 3P \rangle|^2}{\omega_{2S \rightarrow 2P} |\langle 2S | x | 2P \rangle|^2} = \frac{\lambda_{2S \rightarrow 2P} |0.527 a_\mu|^2}{\lambda_{2S \rightarrow 3P} | -0.894 a_\mu|^2} \approx 0.72 \\ \left| \frac{f_{2S \rightarrow 3P}^x}{\omega_{2S \rightarrow 3P}^2 - \omega_{532}^2} \right| / \left| \frac{f_{2S \rightarrow 2P}^x}{\omega_{2S \rightarrow 2P}^2 - \omega_{532}^2} \right| &\approx 0.72 \times 0.21 \approx 0.15 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Esto es, la contribución a $\alpha(\omega)$ por parte de $2S \rightarrow 3P$ es un 15 % de la de $2S \rightarrow 2P$, quizá no tan despreciable. Nótese además que esta contribución de signo contrario a la primera, pues $(\omega_{2S \rightarrow 3P}^2 - \omega_{532}^2) < 0$, cosa que sucede para cualquier transición a niveles superiores debido a que la desintonía para ellos es negativa. Haciendo lo mismo para la transición $2S \rightarrow 4P$ se encuentra que la fuerza de oscilador de la transición es un 1.47 % y su término correspondiente en la suma es un 0.2 % respecto de las mismas cantidades para $2S \rightarrow 2P$. Esto es, se pueden considerar tan solo las primeras dos

transiciones para el problema de $\alpha(\omega)$, y con ello se encuentra que usando el sistema de dos niveles se sobreestima la polarizabilidad, y por ende el potencial dipolar, en $\sim 17\%$ para el láser verde. A pesar de esto, la sobreestimación no es suficientemente grave, al menos para fines de este trabajo, para desacreditar lo deducido en el capítulo. Aún más, despeja toda duda de que un láser de 532 nm ejerce potenciales repulsivos sobre las muestras de litio.

Queda comentar sobre el rol que juegan las escalas de energía al momento de considerar (o no) estructuras más detalladas en los niveles. En particular, se debe tener en cuenta cómo se compara la desintonía δ con las separaciones por estructura fina e hiperfina, $\Delta\omega_{FS}$ y $\Delta\omega_{HFS}$. Por decir, si $\omega_{\alpha\rightarrow\beta}$ es de la magnitud de una transición entre niveles n_1 y n_2 , y si $|\delta| \gg |\Delta\omega_{FS,\beta}|$, donde la desintonía se toma respecto del centro de las separaciones por estructura fina del nivel β , entonces $(\omega_{\alpha\rightarrow\beta_i}^2 - \omega^2)$ son similares para todos los subestados β_i , y la suma $\sum_i f_{\alpha\rightarrow\beta_i}$ será justamente $f_{\alpha\rightarrow\beta}$.

La separación entre las líneas D_1 y D_2 del litio es de $2\pi \times 10$ GHz, cuatro órdenes de magnitud debajo de la desintonía δ para el láser verde ($\sim 2\pi \times 1.12$ THz). Considerar siquiera la separación por estructura fina entre D_1 y D_2 es innecesario para el cálculo del potencial, y con mayor razón lo es cualquier consideración de los niveles hiperfinos. En otros contextos donde el haz láser sea capaz de resolver estructura fina o hiperfina es necesario un cálculo más cuidadoso de $\alpha(\omega)$ donde, seguramente, será necesario considerar también la polarización de la luz. Más detalles sobre este tema pueden consultarse en [42].

Capítulo 3

Potenciales arbitrarios

Este capítulo constituye la parte central del trabajo, y se dedica a la producción de perfiles de intensidad arbitrarios. La arbitrariedad, no obstante, tiene sus limitaciones, la más importante es que, por la naturaleza del método utilizado, la capacidad de modificar $U(\mathbf{r})$ se limita a dos dimensiones, siendo constante a lo largo de la dirección de propagación del haz. Una herramienta que ha ido cobrando importancia en experimentos de átomos ultrafríos para moldear $U(\mathbf{r})$ es el Dispositivo Digital de Microespejos (DMD, por sus siglas en inglés). Sus características físicas y ópticas, así como las funcionalidades y opciones de control, se describen en la sección 3.1.

En última instancia, el DMD será parte integral del proceso experimental del LMU. Sin embargo, antes de ser montado para este fin debe ser caracterizado y probado por separado. Para esto se diseñó un arreglo óptico que simula las condiciones en las que el dispositivo se implementará en el experimento. El arreglo se describe en la sección 3.2.

Si bien el fabricante proporciona una interfaz gráfica amigable al usuario, esta aplicación no explota todas las capacidades del dispositivo, cosa que sí se puede realizar mediante un lenguaje de programación como Python. Cuando se hubo aprendido a utilizar las funciones básicas del dispositivo, se escribieron módulos individuales de código, cada uno logrando una única tarea que puede llegar a repetirse en diferentes ocasiones a lo largo del proceso experimental. Entre los módulos se debe destacar aquel dedicado al algoritmo de retroalimentación. Este algoritmo pretende compen-

sar las inhomogeneidades e imperfecciones entre el haz producido al final del arreglo óptico y el perfil deseado. El algoritmo, así como un poco del resto de módulos, son descritos en la sección 3.3. Los módulos más relevantes pueden consultarse en el apéndice A.

Por último, se exploró la capacidad del DMD para producir secuencias de imágenes, con una máxima tasa de refresco de 22.7 kHz. Para ello, se midió la respuesta del dispositivo, probando las tasas de refresco más rápidas, explorando también diferentes modos de operación del dispositivo. La exploración de potenciales dependientes del tiempo se describe en la sección 3.4.

3.1. Características del DMD

El DMD es un dispositivo que consta de un arreglo rectangular de espejos cuadrados del tamaño de micras, y cada espejo, durante la operación, está inclinado en dos estados posibles. El DMD que se utilizará en el LMU es un DLP7000 0.7 XGA 2x LVDS Type A producido por Texas Instruments, acoplado a un módulo V-7000 producido por Vialux. Vialux, además, provee una interfaz de control ALP-4 que permite controlar el chip del DMD desde una computadora [55] [56].

3.1.1. Características físicas

El chipset DLP7000 XGA es, en sí mismo, el DMD. Este contiene la superficie de 1024 x 768 microespejos de aluminio. La malla de microespejos se caracteriza por una única distancia, que define la separación entre bordes correspondientes de dos espejos consecutivos, tanto horizontal como verticalmente. Esta distancia es de $13.68 \mu\text{m}$, y no representa la dimensión de los espejos, pues también toma en cuenta la pequeña separación entre ellos (ver Figura 3.1).

A cada espejo se le asigna una única celda de memoria, independiente del resto. Su posición angular es dada por el estado binario de dicha celda, alternando entre $+12^\circ$ (estado ON) y -12° (estado OFF) respecto de la normal a la ventana, girando en torno a una diagonal. El estado ON se dirige hacia el microespejo (0,0) en la

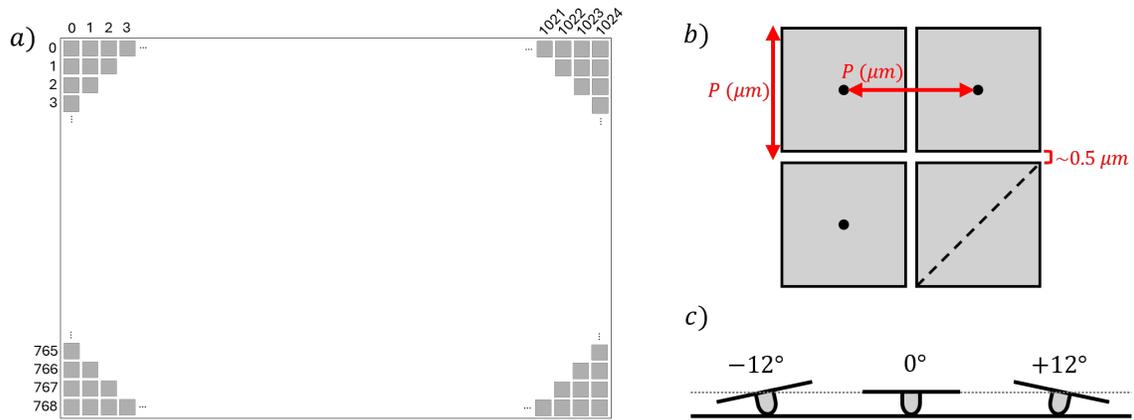


Figura 3.1: a) Superficie activa del DMD. b) Los centros de los espejos se separan por $P = 13.68 \mu m$. Existe una separación pequeña entre espejos adyacentes. El eje de rotación de los espejos es diagonal. c) Estados de inclinación de los espejos.

esquina superior izquierda. Texas Instruments aclara que pueden existir variaciones de a lo más 1° en la inclinación de estos espejos a través del arreglo, pudiendo causar inhomogeneidades perceptibles para algunas aplicaciones [56]. Variaciones de esta magnitud entre pixeles adyacentes no deberían tener un efecto perceptible para los fines del laboratorio y, si hubiese alguna, el algoritmo de retroalimentación (sec. 3.3) se encarga de corregirlas.

Los espejos cubren un 92% del arreglo rectangular, el resto perdiéndose en el espacio entre espejos adyacentes. Esto indica que existe una separación del orden de media micra entre cada espejo.

Adicional a estos espejos, un margen de 10 microespejos parcialmente funcionales rodea el arreglo activo. Estos espejos solo pueden estar ya sea en reposo (0°) o en estado OFF (-12°), al cual acceden cuando el dispositivo está alimentado. No son controlables por el usuario.

Como se observa en la Figura 3.1, los espejos en estados ON y OFF se inclinan en torno a una diagonal. Esto presenta un problema para un arreglo montado sobre una mesa óptica, donde se busca mantener la luz propagándose paralelo a su superficie. Por este motivo el DMD se utiliza montado a 45° , alineando los ejes de inclinación de los espejos con la vertical a la mesa, como se puede observar en la Figura 3.2. De esta manera un haz que incide paralelo a la superficie de la mesa se mantiene paralelo al

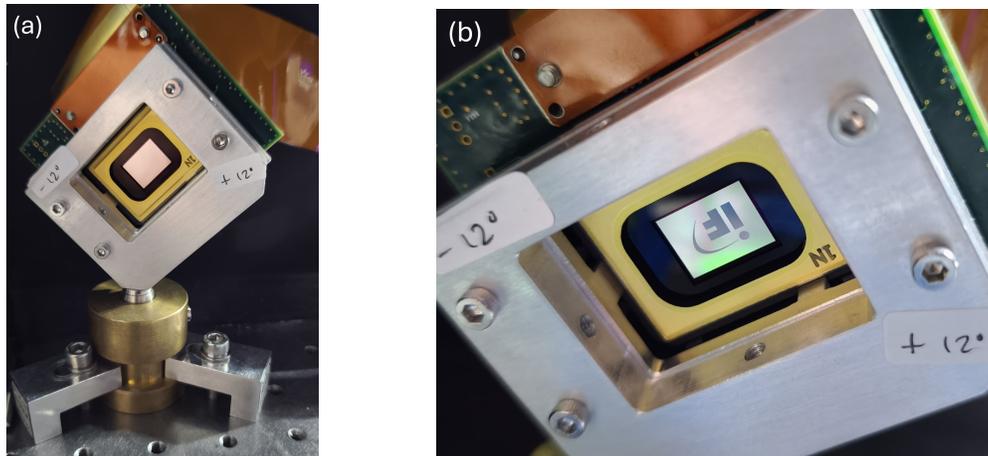


Figura 3.2: (a) El DMD en su montura, a 45° respecto de la mesa óptica. (b) Acercamiento a la superficie del DMD mostrando una imagen binaria del logotipo del IFUNAM.

reflejarse, independiente del estado de los espejos.

3.1.2. Propiedades ópticas

El DMD es, a fin de cuentas, un elemento óptico que permite un control sobre el perfil de la luz incidente, por ello cabe destacar sus propiedades ópticas.

Los espejos de aluminio del DMD están diseñados para ser utilizados en el espectro visible, entre 400 y 700 nm. Entre el DMD y el exterior existe una ventana transparente a esta parte del espectro, que nominalmente tiene una transmisión de 97 % en un solo paso. Los espejos en sí mismos tienen una reflectividad del 88 % [56]. Debido a su naturaleza, la superficie activa del DMD no es una sola, sino que se compone de los miles de espejos individuales, con separaciones del orden de una longitud de onda incidente (~ 500 nm). Es de esperarse que existan efectos importantes de difracción en la luz que se refleja.

En efecto, los hay. Nominalmente, la eficiencia de difracción es de 68 % cuando un haz incide a 24° y se observa a 0° , ambos ángulos medidos respecto a la normal a la ventana. Se debe tener en cuenta las propiedades ya mencionadas del arreglo: la reflectividad de los espejos, la transmisión a través de la ventana, y que además la superficie refleja solo en un 92 % del total debido al espaciado entre espejos. El número exacto de esta eficiencia no es realmente importante, pero indica que mucha

potencia se pierde sin remedio. No obstante, uno puede hacer un estudio del DMD considerado como una rejilla de difracción para identificar la dirección óptima desde la cual iluminar el DMD para maximizar la eficiencia de difracción.

Como recordatorio de teoría de difracción en campo lejano, para un arreglo uniforme de $M \times N$ aberturas idénticas, el perfil de intensidad presenta máximos y mínimos en ubicaciones bien definidas debido a efectos de difracción e interferencia [57], y es descrito por la ecuación 3.1.

$$\begin{aligned} I(p, q) &= I^{(0)}(p, q) \cdot \left| \sum_{ij} \exp[-ik(\xi_{ij}p + \eta_{ij}q)] \right|^2 \\ &= I^{(0)}(p, q) \cdot \left(\frac{1 - \cos(kNdp)}{1 - \cos(kdp)} \right) \left(\frac{1 - \cos(kMhq)}{1 - \cos(khq)} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

p y q contienen la información de la dirección desde la que proviene la fuente de luz y la dirección de observación. Se definen en la ec. 3.2, donde r' y s' son las distancias desde la abertura a la fuente P_0 y al punto de observación P , respectivamente (véase la Figura 3.3 (a)).

$$p = \frac{x_0}{r'} + \frac{x}{s'} \quad , \quad q = \frac{y_0}{r'} + \frac{y}{s'} \quad (3.2)$$

$I^{(0)}$ es el perfil de intensidad producido por una única abertura por efecto de difracción, que para una abertura rectangular como es el caso se comporta como el cuadrado de una función $\text{sinc}(x) = \text{sen}(x)/x$, la cual se maximiza para $p = q = 0$. Los factores que modulan a $I^{(0)}$ se deben a la interferencia por un arreglo de aberturas distribuidas en un arreglo rectangular uniforme, con posiciones dadas por (ξ_{ij}, η_{ij}) y determinadas por distancias d y h . Estos factores se maximizan cuando $kdp = 2\pi n$ y $khq = 2\pi m$, donde n y m son enteros e identifican a los llamados *órdenes de interferencia* [58].

Para el caso particular de difracción debido al DMD se deben hacer consideraciones adicionales. Las coordenadas x y y refieren al plano de la superficie del DMD, mientras que z corresponde a la dirección normal. Debido a que el dispositivo está montado a 45° y que tanto el haz láser incidente como el orden que se escoja en la reflexión están

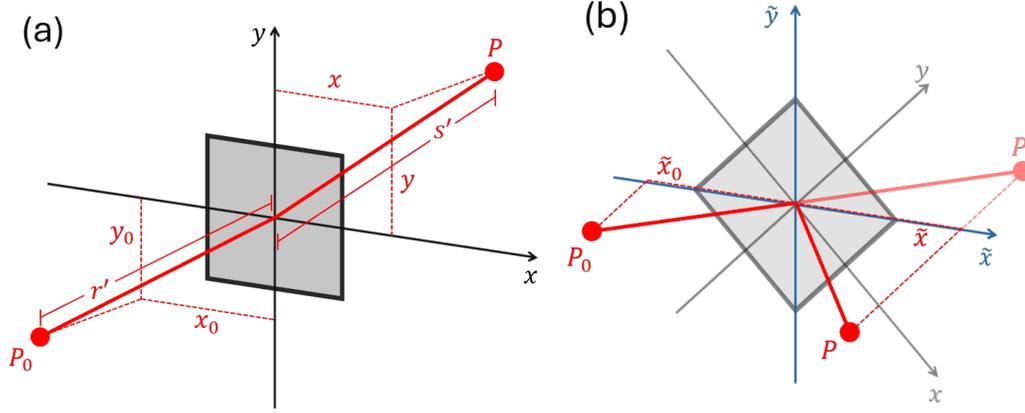


Figura 3.3: (a) En la difracción se considera un punto fuente P_0 y un punto de observación P y sus posiciones respecto a una abertura. (b) Cuando un haz incide en un plano que es normal al eje de rotación de los espejos, el haz reflejado se mantiene en dicho plano. Los puntos sobre este cumplen $x = y$, de modo que en un nuevo marco (\tilde{x}, \tilde{y}) rotado 45° los puntos cumplen $\tilde{y} = 0$.

en un plano paralelo a la mesa se debe pedir que $x_0 = y_0$ y $x = y$. Consecuentemente, $p = q$.

Para tratar el problema de incidencia a 45° respecto de la orientación de la rejilla de espejos, conviene realizar un cambio de coordenadas de manera que el problema se reduce a una sola dimensión. Se realiza una rotación en torno al eje z y se obtienen nuevas coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) (ec. 3.3). En analogía con las definiciones de la ec. 3.2 se definen \tilde{p} y \tilde{q} en el sistema rotado. Considerando que $d = h = 13.68 \mu\text{m}$, la condición $p = q$ implica que $\tilde{q} = 0$ y, además, proporciona una condición para los máximos de interferencia en el nuevo sistema (ec. 3.4). La Figura 3.3 (b) muestra el caso de interés, en el que un haz incide y se refleja en el mismo plano (paralelo a la mesa óptica), donde se cumple $\tilde{y}_0 = \tilde{y} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \tilde{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + q) \\ \tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - q) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\frac{\tilde{x}_0}{r'} + \frac{\tilde{x}}{s'} = \tilde{p} = \frac{m\lambda}{d/\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

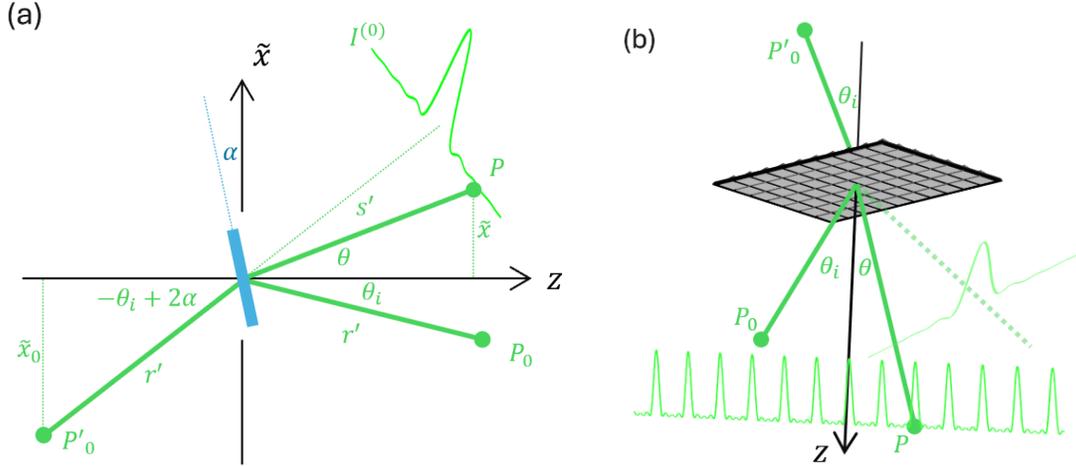


Figura 3.4: (a) La formación del patrón de difracción de un solo espejo inclinado un ángulo α . (b) El patrón de interferencia producido por el arreglo de aberturas-espejo. Se muestra también el patrón de difracción. θ_i se debe escoger para que el máximo de difracción se acerque a algún orden de interferencia.

Aún no se ha considerado que las aberturas son espejos inclinados cierto ángulo. En una rejilla de difracción, la contribución al campo por parte de la interferencia concierne únicamente a la distribución de las aberturas en la rejilla. Por ende, el efecto de la inclinación de los espejos queda contenido en el patrón de difracción de una abertura individual. Este hecho independiza, de cierta manera, ambos patrones. Cabe entonces realizar la distinción \tilde{p}_{dif} y \tilde{p}_{int} (la ec. 3.4 concierne a \tilde{p}_{int}) de manera que la interferencia y la difracción de abertura individual sean tratadas independientemente.

Para considerar la inclinación de los espejos, tomaremos una fuente virtual que produce el mismo efecto pero para espejos sin inclinación. La maximización del patrón de difracción impone una relación entre la dirección de observación θ y el ángulo de incidencia θ_i . $I^{(0)}(p, q)$ sigue maximizándose con $p = q = 0$, por lo que $\tilde{p}_{dif} = 0$. Supóngase una fuente de luz P_0 que ilumina un espejo inclinado un ángulo $\alpha = \pm 12^\circ$, desde una distancia r' y en un ángulo θ_i respecto de \hat{z} (ver Figura 3.4). Desde el espacio de observación ($z > 0$) la fuente es percibida en un punto P'_0 , que se encuentra en $z < 0$ a una distancia igualmente de r' respecto de la abertura-espejo y haciendo un ángulo $-\theta_i + 2\alpha$ respecto de $-\hat{z}$. Nótese que \tilde{x}_0/r' y \tilde{x}/s' pueden escribirse como senos del ángulo de incidencia de la luz emitida por la fuente virtual, $-\theta_i + 2\alpha$, y de

la dirección de observación, θ . Con esto, $\tilde{p}_{dif} = 0$ construye a θ :

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{p}_{dif} &= \frac{\tilde{x}_0}{r'} + \frac{\tilde{x}}{s'} && \Rightarrow && \theta = -\theta_i + 2\alpha \\ &= -\text{sen}(-\theta_i + 2\alpha) + \text{sen } \theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es decir, el máximo de difracción se encuentra en la dirección que dicta la ley de reflexión. θ_i sigue siendo una variable libre, sin restricciones, pero no cualquier ángulo de incidencia es óptimo para maximizar el patrón de interferencia, habiendo fijado $\theta = -\theta_i + 2\alpha$. Se debe encontrar θ_i para el cual θ coincida con un orden m , de esta manera empalmando los patrones de difracción e interferencia.

Desde el espacio de observación, y para efectos de interferencia, se percibe a la fuente P_0 desde su posición recíproca respecto del plano $z = 0$, es decir, haciendo un ángulo θ_i respecto de $-\hat{\mathbf{z}}$. Luego, la ec. 3.4 se reescribe como:

$$-\text{sen}(-\theta_i) + \text{sen}(-\theta_i + 2\alpha) = \tilde{p}_{int} = \frac{m\lambda}{d/\sqrt{2}} \quad (3.6)$$

Esto se puede reescribir como una función de θ_i y un orden m igualada a cero, condición a la que llamaremos **de máxima eficiencia**.

$$f(\theta_i, m) = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d/\sqrt{2}} - \text{sen } \theta_i\right) + \theta_i - 2\alpha = 0 \quad (3.7)$$

Nótese que m indica un orden respecto a un arreglo de aberturas en el plano $z = 0$, ignorando la inclinación de los espejos. Es por ello que para una fuente sobre el eje z que incide a $\theta_i = 0$, el orden $m = 0$ no corresponde con el máximo, como sería de esperarse en una rejilla de difracción convencional. La inclinación de los espejos mueve el patrón de difracción, que modula al de interferencia.

En la Figura 3.5 se grafica $f(\theta, m)$, junto con la línea constante 0, para mostrar su intersección con las curvas a m fija, que es donde se cumple la condición de máxima intensidad.

En la práctica, construir un arreglo óptico para un haz de un tamaño considerable (del orden de la superficie del DMD, ~ 1.7 cm de diámetro) requiere de comprometer

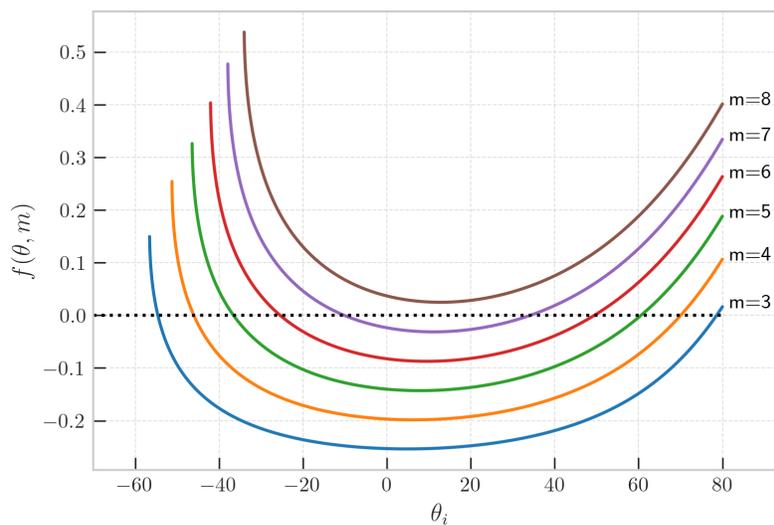


Figura 3.5: $f(\theta, m)$ para algunos órdenes de difracción. La línea punteada indica el cero, donde la condición de máxima eficiencia se cumple.

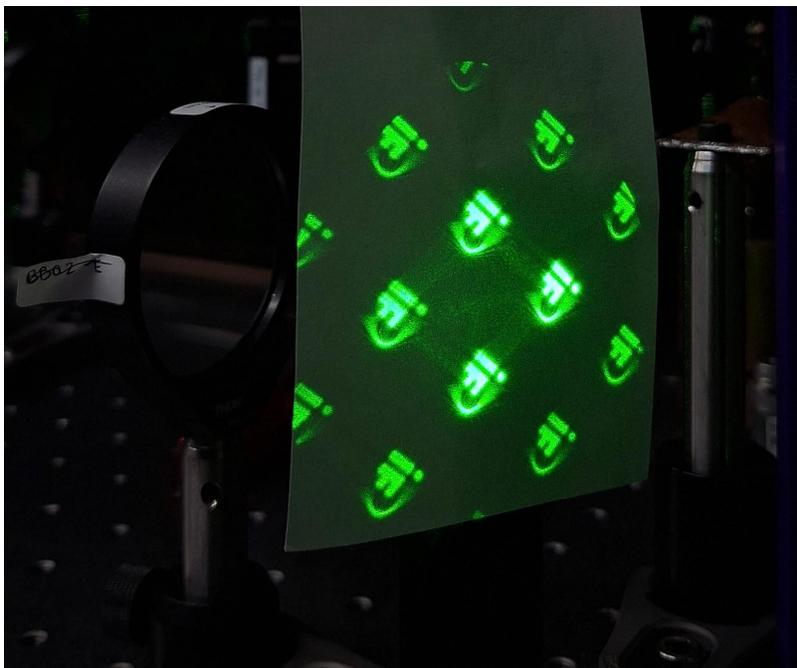


Figura 3.6: Los varios órdenes de difracción en un plano a aproximadamente 50 cm del DMD, justo detrás de la primera lente posterior (ver Figura 3.9, donde se muestra el arreglo óptico utilizado.)

el cumplimiento de la condición de máxima eficiencia con la optimización del espacio que ocupa el arreglo. Para un arreglo compacto, lo mejor es incidir a $\theta_i = 12^\circ$ de manera que la luz incida normal en los espejos y se refleje en la misma dirección. Como se muestra en la Figura 3.5, los órdenes más cercanos al 0 para este ángulo de incidencia son $m = 7$ y $m = 8$, así que la intensidad se reparte mayoritariamente entre ellos. Se puede esperar una eficiencia de difracción muy similar a aquella reportada por Texas Instruments. Para $\theta_i = 24^\circ$ se reporta 68 % de eficiencia, el orden más cercano es $m = 7$ y $f(24^\circ, 7) = -0.022$. En comparación, para $\theta_i = 12^\circ$, el orden más cercano es $m = 8$ y $f(12^\circ, 8) = 0.025$. Si bien no cumple con la condición, se prioriza la simplificación del arreglo y se evita la distorsión de la imagen producida por incidencia a ángulos grandes.

3.1.3. Control y funcionamiento

El control del DMD se realiza desde una computadora conectada via USB al dispositivo. Para comunicarse con el DMD se instala el ALP-4.3 Controller Suite de ViALUX, que permite el control de alta velocidad sobre el chip DLP 7000 de Texas Instruments. ViALUX proporciona además una aplicación llamada EasyProj, que permite la asignación de imágenes y secuencias sencillas al DMD, pero con limitada funcionalidad.

La parte que es de interés para el laboratorio es la API que proporciona las funciones requeridas para el manejo del hardware [59]. Esta API consiste de tres archivos que, en base C/C++, permiten utilizar esos lenguajes de programación para escribir proyectos más complejos. En conjunto a la API de ViALUX, se utilizará un módulo de Python llamado ALP4lib [60], desarrollado para controlar DMDs de ViALUX que se basan en las API ALP4.X. El módulo proporciona la conexión entre el software del DMD y Python, para facilidad de uso.

A continuación se describen las principales funcionalidades del DMD que se utilizarán en los experimentos. Habiendo inicializado el DMD, lo primero que se debe hacer para mandar imágenes al dispositivo es destinar la memoria RAM necesaria. Se debe especificar la cantidad de imágenes en la secuencia y la profundidad de bits

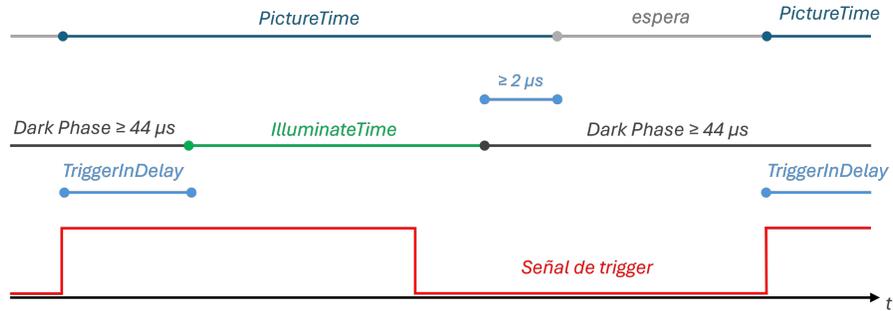


Figura 3.7: Parámetros de tiempo del DMD. Se muestra una señal de trigger y la acción del parámetro *TriggerInDelay*. En este caso se establece que el DMD reaccione a una señal creciente, de manera que *PictureTime* inicia cuando la señal sube el escalón.

de cada una (1 bit en modo binario, hasta 12 bits en escala de grises, y hasta 32 bits en el modo PWM, que no se describirá). Para fines del laboratorio, se utiliza el DMD en modo binario, que es el que permite la máxima tasa de refresco.

Ya que la memoria ha sido destinada, la secuencia se manda al dispositivo. En este paso uno puede especificar si la secuencia desea repetirse un determinado número de veces o indefinidamente, establecer regiones de interés para optimizar la transición entre imágenes, e indicar funcionalidades avanzadas. Lo que es importante destacar en esta etapa es que se puede especificar el modo binario a utilizar. Existen dos: el modo binario normal (por defecto) y el modo ininterrumpido.

Para explicar la diferencia entre estos modos es necesario entender los parámetros de tiempo que están involucrados en una secuencia mostrada por el DMD (ver Figura 3.7). *PictureTime* determina el tiempo en que una imagen en la secuencia puede ser mostrada. No debe confundirse con el tiempo en que los espejos se colocan en posición para crear la imagen, *IlluminateTime*, que es siempre menor. El tiempo restante, en que los espejos están en estado OFF, se conoce como fase oscura, y está acotada inferiormente por la máxima tasa de refresco, $44 \mu s$. *IlluminateTime* debe terminar por lo menos $2 \mu s$ antes de que acabe *PictureTime*.

El modo binario ininterrumpido se distingue por omitir la fase oscura. De este modo, el parámetro *IlluminateTime* es ignorado. Luego, se puede establecer un *PictureTime* mínimo de $44 \mu s$, siendo que el mínimo permitido por el software del DMD es $58 \mu s$ para el modo normal de operación.

Cambios en el estado del DMD se ven reflejados tras una señal de trigger, que puede ser interna o externa. A los dos modos se les conoce como modo maestro (MASTER) y modo esclavo (SLAVE). Por defecto, el DMD opera en modo maestro, el cual se caracteriza por utilizar un reloj interno. Para que un espejo pueda cambiar su estado se requiere, primero, que el DMD haya recibido la información de la siguiente imagen en la secuencia. El reloj interno manda pulsos de trigger constantemente, y los espejos están en espera para que, habiendo transcurrido PictureTime de la imagen presente, se reaccione al siguiente pulso de trigger y se ejecute el cambio. El parámetro *SynchDelay* establece un tiempo que debe transcurrir iniciado el nuevo PictureTime para que IlluminateTime pueda comenzar, y es cero por defecto.

Por otro lado, el modo esclavo escucha a una señal de trigger externo. Cuando PictureTime de la imagen presente termina, el siguiente pulso recibido desencadena el cambio de imagen. Similar a *SynchDelay* en el modo maestro, el parámetro *TriggerInDelay* retrasa el momento en que se muestra la nueva imagen después de recibido el trigger. Cualquier trigger que se mande al DMD previo al término del PictureTime en turno es ignorado. El modo esclavo es más adecuado para los experimentos en el LMU, pues de esta manera se tiene control sobre el cambio de imagen en el DMD desde el sistema de control del laboratorio, acoplando así el control del DMD a los otros procesos del experimento.

Para verificar que se dispone de una tasa de refresco de 22.272 kHz (1 en cada 44 μ s) se midió la señal reflejada por el DMD con un fotodiodo (150 MHz de frecuencia de muestreo). Se compararon los modos normal e ininterrumpido y se comprobó que, en efecto, existe una fase oscura de mínima duración de 44 μ s en el modo normal. Se hallaron fuertes oscilaciones en la intensidad capturada al inicio de IlluminateTime que se atribuyen a cambios bruscos en la eficiencia de difracción durante el proceso en que los espejos cambian de estado. Esta transición dura alrededor de 14 μ s, que concuerda con lo reportado por Texas Instruments: 4 μ s para cambio de estado, 12.5 μ s incluyendo el tiempo en que se estabilizan los espejos.

Se halló que, aun en el modo ininterrumpido, IlluminateTime no puede durar el lapso entero de PictureTime, y que al final de cada cuadro el DMD manda todos los

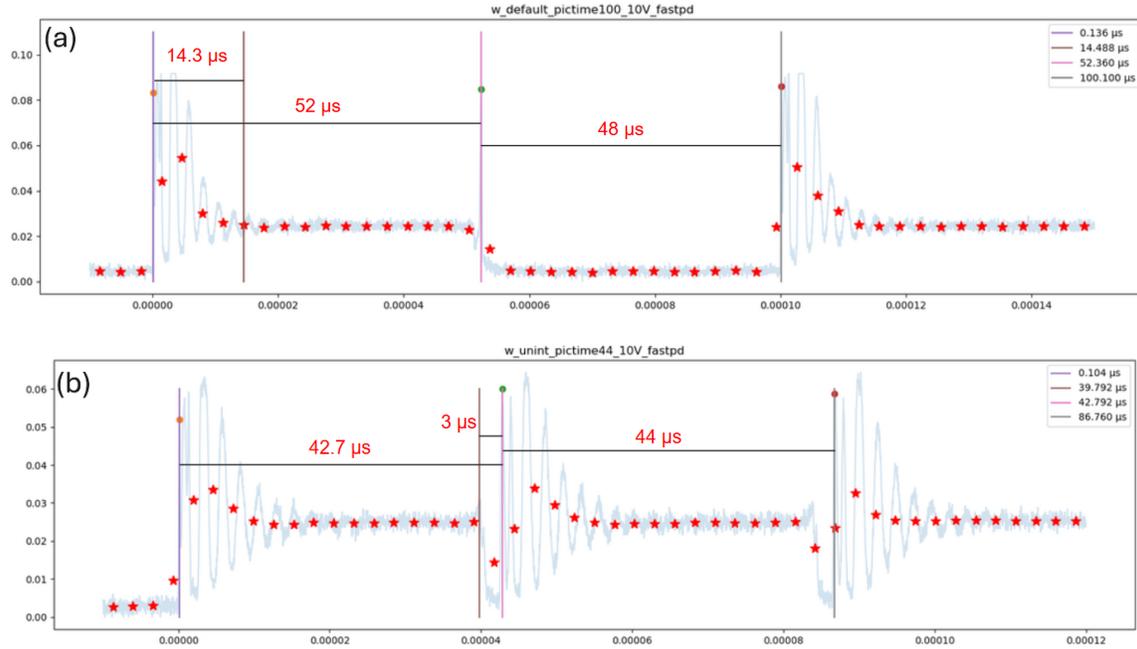


Figura 3.8: (a) Secuencia de imágenes blancas en modo normal: existe una fase oscura de mínimo $44\mu s$. (b) Secuencia de imágenes blancas en modo ininterrumpido: los espejos, al final de `IlluminateTime`, se acomodan en posición OFF por un breve instante ($\sim 3\mu s$). La señal recibida se muestra tenue en el fondo, y las estrellas marcan un valor promediando en pequeños lapsos de tiempo.

espejos a su estado OFF. En la 3.8 (b) se muestra la señal reflejada en la dirección ON por una de imágenes completamente blancas. La pequeña fase oscura entre dos cuadros dura alrededor de $3\mu s$, que claramente forma parte de `PictureTime`, como lo muestran las marcas de tiempo identificadas.

Como se verá en la sección 3.4, es posible que para ciertas aplicaciones se requiera de esta máxima tasa de refresco, de ahí que se midió la respuesta para confirmar que se puede disponer de ella.

3.2. Arreglo óptico para caracterización

3.2.1. Descripción del arreglo

A continuación se describe el arreglo óptico que se diseñó para las pruebas realizadas con el DMD. Mediante estas pruebas se aprendió el funcionamiento del dispositivo,

se crearon los procesos de impresión de imágenes en el perfil de intensidad del haz incidente, implementó la toma de imágenes de una manera automatizada, y se probó el algoritmo de retroalimentación para corregir los perfiles obtenidos.

El arreglo de interés comienza a la salida de una fibra óptica; previo a esta existe óptica dedicada al control de la intensidad del haz láser. El tamaño del haz a la salida de la fibra es de alrededor de $870\mu\text{m}$ cintura, el cual solo cubre una pequeña fracción de la superficie total del DMD. Por ello, es necesario magnificarlo determinada cantidad de veces para que la superficie entera esté bien iluminada. Los dos primeros telescopios, de 1:3 y 1:5, magnifican el haz 15 veces para obtener una cintura de haz de 1.31 cm. Este haz magnificado es dirigido al DMD mediante un espejo, incidiendo sobre la ventana a $\theta_i = 5^\circ$ respecto de los espejos en estado ON. La diagonal del DMD mide 1.75 cm, de modo el diámetro del haz, un poco mayor a una pulgada, es suficiente para cubrir la superficie entera.

La óptica que sigue al DMD se alinea respecto de la luz reflejada cuando los espejos están en estado ON, inclinados a $+12^\circ$. Un segundo espejo redirige el haz hacia una línea de puntos en la mesa óptica. Se coloca un telescopio 10:1, a una distancia de aproximadamente 50 cm del DMD, precisamente la distancia focal de la primera lente en el telescopio. Entre las lentes del telescopio existe una bifurcación en el camino, y la elección se toma con un espejo montado en una montura plegable que puede estar presente o no en el camino del haz. El camino principal se muestra en verde en la Figura 3.9 se escoge al remover el espejo del camino; el camino secundario se muestra en gris y se escoge al subir el espejo. Sea cual sea el camino, le sigue una lente de 5 cm que completa el telescopio 10:1, y en el foco de las lentes se coloca un iris parcialmente cerrada que toma el rol de filtro espacial. Una lente sirve como un transformador de Fourier, en el sentido que en su foco produce la transformada del perfil entrante. Los iris parcialmente cerrados bloquean la luz más alejada del máximo central, que corresponde a las frecuencias espaciales altas del perfil entrante. La segunda lente de los telescopios colecta la luz que atraviesa el iris y reconstruye con ella un perfil similar al entrante pero suavizando los cambios de intensidad.

Enfoquémonos por ahora en el camino principal (verde). Posterior al telescopio

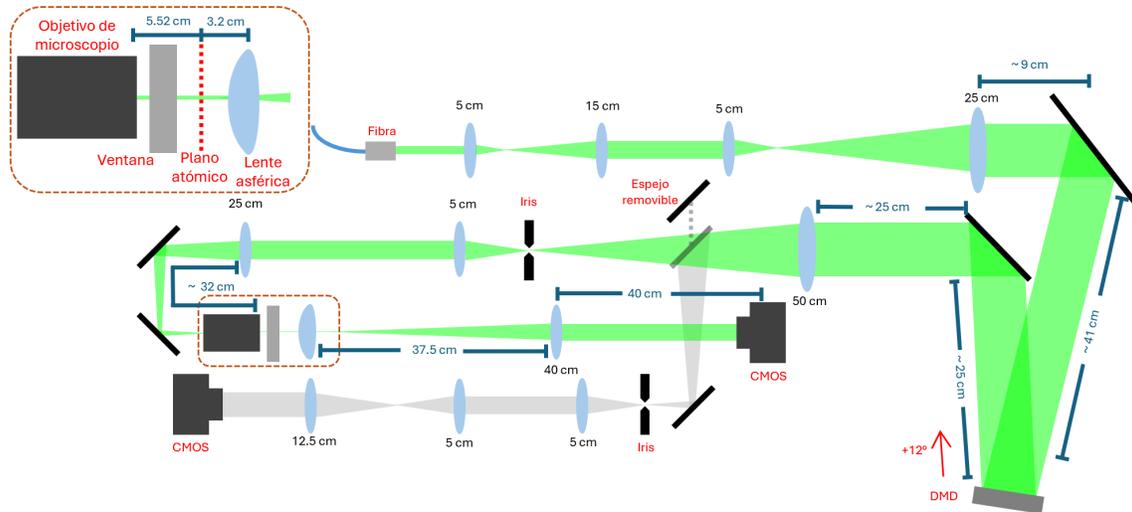


Figura 3.9: Arreglo óptico utilizado en las pruebas del DMD. El camino gris representa el camino del haz cuando el espejo plegable se interpone. Este camino se dedica a la aplicación del algoritmo de retroalimentación. Arriba a la izquierda se muestra un acercamiento a la sección del arreglo en torno al *plano atómico*, donde se proyecta el perfil.

10:1 el haz se encuentra con un segundo telescopio, conformado por un objetivo de microscopio diseñado en el LMU y su lente de tubo de 25 cm de distancia focal. El objetivo de microscopio es una copia de aquel que está montado en el experimento y que, por ahora, se encarga de proporcionar imágenes de alta resolución de los gases producidos. Las características de este objetivo puede consultarse en otra tesis del grupo [61], pero de destacar es la resolución medida de $1.72(5) \mu\text{m}$ y la distancia focal de $5.52(3) \text{ cm}$ para 532 nm . Con esta distancia focal, la lente de tubo de 25 cm y el objetivo demagnifican 4.529 veces.

Detrás del objetivo se encuentra una ventana transparente, similar a las presentes en la cámara de ciencia donde se producen los gases. La idea de esto es emular las condiciones en las que el DMD se implementará finalmente en el experimento. En ese escenario final, el objetivo y la ventana son el último paso antes de que el haz verde se encuentre con la nube de átomos. La demagnificación total de la imagen que produce el DMD es 45.29, de tal modo que un píxel de $13.68 \mu\text{m}$ de lado se transforma en un píxel de $0.3 \mu\text{m}$ en el plano focal del objetivo, que llamaremos *plano atómico*. La superficie total del DMD entonces cubre una superficie de $232 \times 309 \mu\text{m}$, que es del

orden de las dimensiones de los gases que se producen en laboratorio.

Para las pruebas se requiere conocer el perfil final de luz. Para ello, se coloca un último telescopio, conformado por una lente esférica¹ de 3.2 cm y una lente de 40 cm que magnifica la imagen para ser capturada por la cámara CMOS, modelo DCC1545M de Thorlabs, con píxeles de tamaño 5.2 μm y una superficie sensible de 6.66 x 5.32 mm. El objetivo de microscopio y la lente esférica son altamente sensibles a su posición relativa a las demás componentes, y por ello se les coloca sobre monturas traslacionales que permiten modificar su posición con precisión micrométrica.

El segundo camino, en gris, es demagnificado 2.5 veces y visto por una CMOS del mismo modelo. Este segundo camino se dedica a implementar la rutina de retroalimentación, que corrige las diferencias entre el perfil que produce el DMD y el perfil que se desea obtener. El motivo por el cual se implementa de esta manera es, principalmente, que así estará en el arreglo final, pues no hay manera de coleccionar la luz que atraviesa la cámara de ciencia. Además, al pasar por menor cantidad de óptica sensible a la posición, se reducen las distorsiones y permite que el algoritmo se implemente de mejor manera. Por supuesto que la imagen percibida por la cámara en este segundo camino diferirá de la imagen final proyectada sobre los átomos. Para ello es vital comparar los resultados de la retroalimentación con las imágenes al final del camino principal.

3.2.2. Resolución

De interés para la realización de experimentos es conocer la resolución con la que se cuenta para diseñar potenciales. Más concretamente, nos atañe la función de dispersión de punto (PSF) [58], que representa la respuesta del sistema óptico a una fuente puntual de luz. Objetos muy pequeños serán proyectados en el plano imagen según la PSF. En sistemas libres de aberraciones, limitados solo por difracción, la PSF produce un patrón de Airy en el plano imagen, que puede ser ajustado mediante una función gaussiana para encontrar su anchura. Conforme el tamaño de la fuente aumente, la imagen diferirá en mayor medida de este patrón de Airy.

¹AL4532 \varnothing 45 mm S-LAH64 Aspheric Lens, $f = 32$ mm, NA = 0.61 de Thorlabs

En realidad hay dos resoluciones de importancia: la primera es la resolución del camino principal, que se encarga de proyectar la imagen del DMD en el plano atómico; la segunda concierne al camino secundario, que lleva a la cámara destinada al algoritmo de retroalimentación. Debido a que solo se cuenta con un objetivo de microscopio, la primera resolución no se puede corroborar, pero, como ya se mencionó, ha sido previamente medida de $1.72(5) \mu\text{m}$ para 532 nm . Utilizando esta medición y el valor total de la demagnificación, 45.29 , se puede calcular cuál es el tamaño máximo que resulta irresoluble para el sistema. Considerando los tamaños en unidades de píxeles del DMD,

$$\frac{(13.68 \mu\text{m})l}{45.29} < 1.7\mu\text{m} \quad \Rightarrow \quad l < 5.62 \quad (3.8)$$

Así, un cuadrado de 5 píxeles de lado representa, en teoría, el tamaño máximo irresoluble para el sistema óptico del camino principal. Si bien esto implica una pérdida de detalle en la proyección del DMD, no constituye una desventaja. En primer lugar, una demagnificación menor resultaría en un desaprovechamiento de las regiones más externas de la superficie de espejos. En segundo lugar, esta *nueva unidad* es 5^2 veces más intensa que en el caso en el que el tamaño máximo irresoluble corresponda a un solo píxel. Precisamente, este balance entre resolución y aumento de intensidad en la unidad resoluble motivó la elección del factor de demagnificación para el primer camino óptico.

En cuanto a la resolución del camino secundario, se diseñó la imagen de la Figura 3.10 con el objetivo de medirla. La imagen consiste en un arreglo de 5×4 de cuadrados con lados que comienzan desde 2 píxeles, incrementando en 2 hasta llegar a 40 píxeles de lado.

Se segmentó la imagen de tal manera que cada segmento contiene un solo cuadrado, y para cada uno se calcularon los perfiles integrados horizontales y verticales. La forma de los perfiles para los cuadrados más chicos asemeja una curva gaussiana, mientras que para los más grandes el efecto de los bordes cuadrados cobra importancia. Los perfiles integrados se ajustaron mediante dos funciones: el primero un

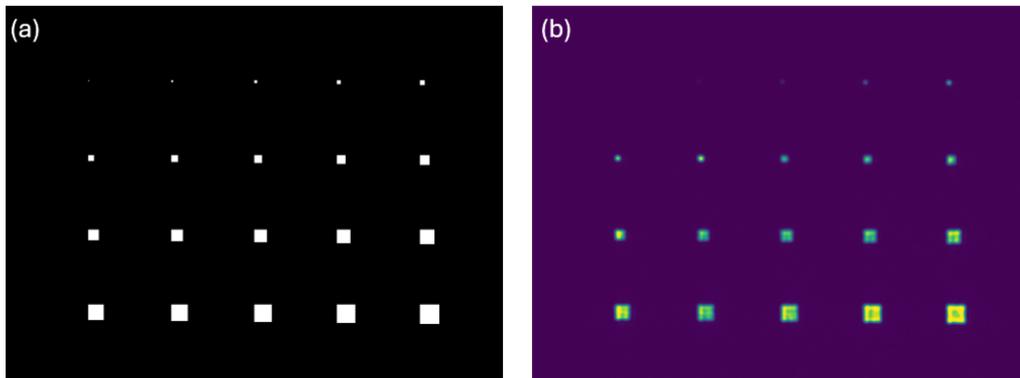


Figura 3.10: (a) Imagen enviada al DMD para medir la resolución del mismo. (b) Imagen captada por cámara al final del camino secundario (de retroalimentación).

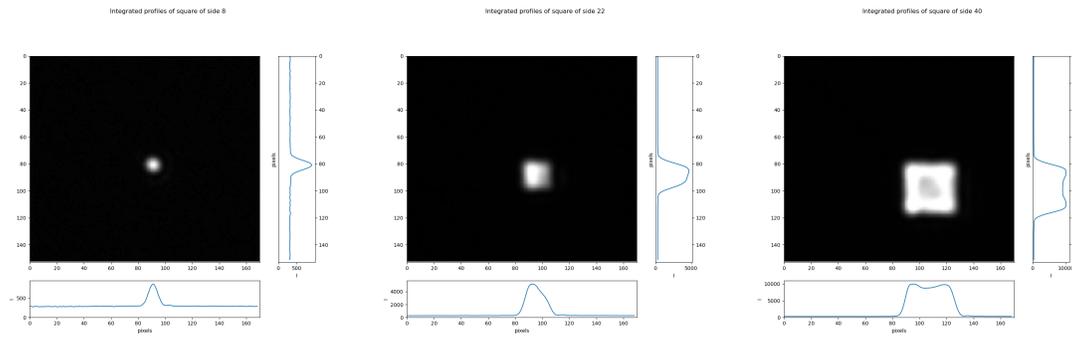


Figura 3.11: Perfiles integrados para las imágenes de los cuadrados de 8, 22 y 40 píxeles de lado. A partir de 22 píxeles, el ajuste trapezoidal da mejores resultados que el gaussiano.

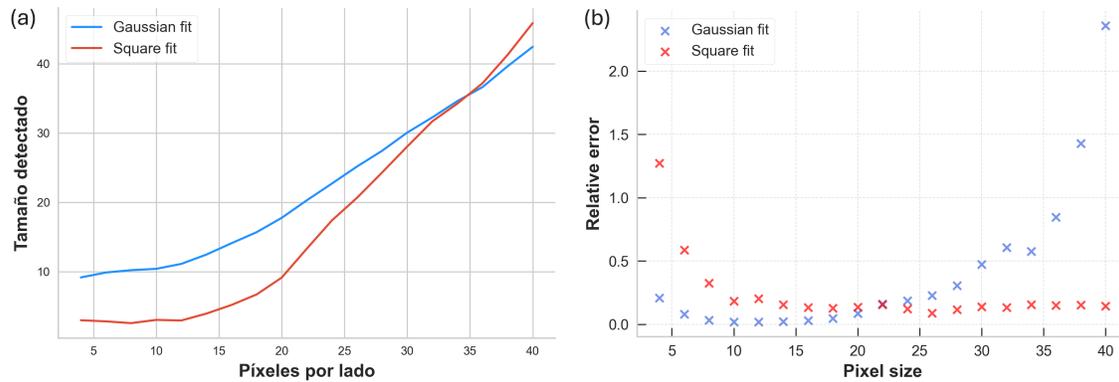


Figura 3.12: (a) Tamaños calculados mediante los ajustes de los perfiles integrados. (b) Como medida de error en los ajustes, suma de los errores relativos de los parámetros de las funciones de ajuste.

ajuste gaussiano, y el segundo un ajuste trapezoidal² esto es, una modificación de una función cuadrada permitiendo una transición mediante rectas con pendiente finita en vez de rectas verticales. En la Figura 3.12 se muestra, por un lado, los tamaños obtenidos mediante estos dos ajustes y, por otro, la suma de los errores relativos de cada parámetro involucrado en los dos ajustes a modo de medida del error total del ajuste. Los tamaños que se reportan en la gráfica son expresados en píxeles de DMD (se multiplica por un factor de $5.2 \mu\text{m}/(45.29 \cdot 13.68\mu\text{m})$).

Puede observarse que para $l = 22$ px se da que el ajuste trapezoidal proporciona mejor medida para el ancho de los perfiles integrados. Así, para el camino secundario la resolución puede considerarse de 22 píxeles.

3.3. Potenciales estáticos

En esta sección se describe el proceso detrás de la producción de perfiles de intensidad *arbitrarios*, que pueden ser diseñados en una imagen para ser proyectados por el DMD. El dispositivo permite la emulación de una escala de grises mediante lo que se conoce como modulación por ancho de pulsos (Pulse-Width Modulation, PWM), que no es más que disminuir la intensidad de luz percibida modulando el porcentaje de tiempo en que la luz se emite (en este caso, se refleja), a una frecuencia mayor que lo que el sistema receptor puede percibir, disminuyendo la intensidad promediada en el tiempo [55]. No obstante, esta característica del DMD no aprovecha la máxima capacidad de refresco (22.727 kHz), de modo que no es adecuada para los experimentos que se llevarán a cabo en el LMU.

Además de quedar limitada a dos dimensiones, la arbitrariedad en los perfiles diseñados se atiene a que pueda ser representado por una imagen en escala de grises (8 bits, de 0 a 255) y de dimensiones 768×1024 iguales a la superficie de espejos del

²La función se define de la siguiente manera:

$$f(x; x_0, a_1, a_2, A, b) = \begin{cases} A + b & , \text{ si } |x - x_0| \leq a_1 \\ b & , \text{ si } |x - x_0| \geq a_2 \\ \frac{A}{a_1 - a_2} [|x - x_0| - a_2] + b & , \text{ si } a_1 < |x - x_0| < a_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

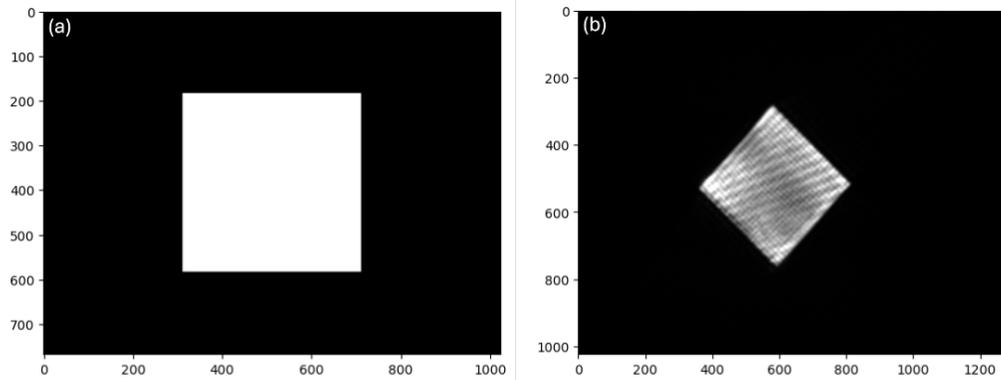


Figura 3.13: Comparación de (a) imagen objetivo enviada al DMD y (b) la imagen que es capturada por la CMOS al final del camino principal.

DMD. Los valores entre 0 y 255 se simulan no mediante PWM, sino mediante lo que en computación gráfica se conoce como *tramado*: crear la ilusión de profundidad de color (8 bits) con una paleta limitada (1 bit). Debido a que la resolución del sistema óptico no será capaz de resolver píxeles individuales, no resulta un problema el hecho que en realidad el perfil de luz sea moldeado mediante imágenes binarias.

3.3.1. Diseño de las imágenes

La Figura 3.13 muestra la comparativa entre la imagen objetivo que se envía al DMD y la imagen que captura la cámara al final del camino principal. Fuera de la inhomogeneidad en la intensidad de luz capturada, existe un ángulo por el cual la figura está rotada en b) respecto de a). Claro que este ángulo era de esperarse, pues, recordando, el DMD está montado a 45° respecto de la superficie de la mesa óptica.

Debido que al momento de implementar el algoritmo de retroalimentación se deben comparar la imagen objetivo con lo que captura la cámara, se debe encontrar la manera de mapear pixel por pixel una imagen a otra. Es esto lo que consiste como *primer paso* en la preparación de una imagen objetivo, **calibración de imagen**. Conociendo cómo se transforma una imagen en el arreglo óptico se puede ir en el sentido contrario: diseñar las imágenes objetivo para obtener una imagen real deseada.

Para comparar las imágenes se hace uso de una **transformación afín**. Una transformación afín es *casi* una transformación lineal, en el sentido que un vector es trans-

formado mediante una matriz A pero se le suma un vector B . Si $X = (x, y)$ es el vector que se desea transformar, entonces su transformado se puede escribir de la siguiente manera.

$$X' = AX + B \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De manera condensada, se puede escribir la transformación como una sola matriz M de 2×3 aplicada a un vector $(x, y, 1)$, como se muestra en la ec. 3.11. Para encontrar esta transformación basta con escoger tres puntos no colineales en la imagen origen, y conocer sus transformados en la imagen destino.

$$X' = TX = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & b_0 \\ a_{10} & a_{11} & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

De tal manera que si al DMD se manda una imagen objetivo con 3 puntos no colineales y se captura una imagen con la cámara, se tienen los dos conjuntos de puntos necesarios para calcular la transformación. La imagen objetivo consta de tres círculos suficientemente grandes como para que la luz que se refleje en ellos sea detectada por la cámara. La imagen capturada es analizada para localizar los puntos transformados. El perfil de estos puntos transformados es aproximadamente gaussiano, y el pixel que se da como *punto transformado* es el que corresponde al máximo local en esta vecindad.

Ubicados los puntos, se hace la correspondencia entre punto origen y punto transformado y se procede a calcular la matriz de transformación. Para ello se utiliza la librería OpenCV de Python [62], que cuenta con dos funciones: `getAffineTransform(pts_ogn, pts_dst)` y `warpAffine(img, T, (M, N))`. La primera calcula la matriz, y la segunda la aplica a una imagen `img` y la adecua a un tamaño `(M, N)`. Este proceso se ilustra en la Figura 3.14, donde se puede apreciar la similitud entre (a) y (d). Esto es lo que permite hacer comparaciones entre las imágenes que se mandan al DMD y lo que recibe la cámara, para evaluar la diferencia entre ellas y realizar correcciones.

Conociendo la matriz de transformación T , uno puede diseñar la imagen que quie-

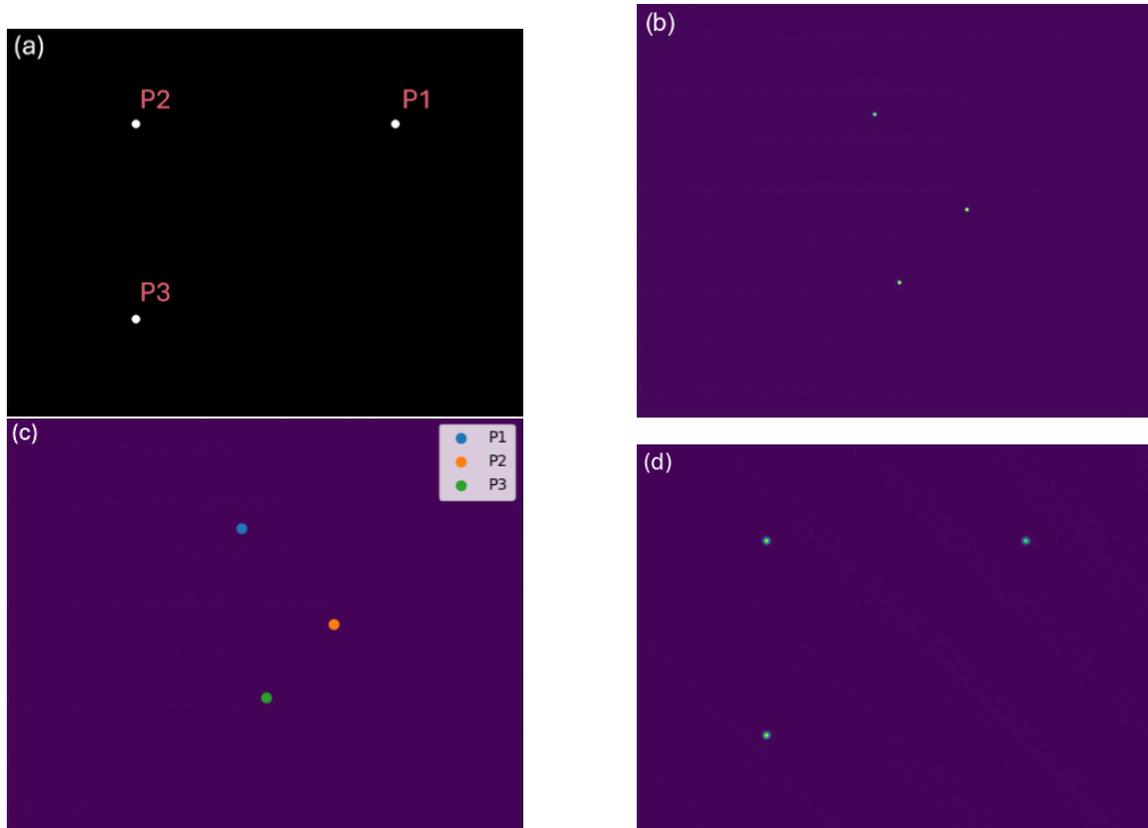


Figura 3.14: Calibración de la cámara. (a) Imagen objetivo. (b) Imagen capturada por la cámara. (c) Se identifican los puntos. (d) Resultado de aplicar la transformación a la imagen capturada.

re obtener en la cámara, sin transformar así como en Fig. 3.14 (b), y luego aplicar esa transformación mediante `warpAffine(img, T, (M, N))`, donde (M, N) son las dimensiones de una imagen del DMD. Si se manda esta imagen al DMD, lo que se recibe es la imagen deseada, como se ilustra en la Figura 3.15. Esto es fundamental para los experimentos, pues el DMD siempre estará rotado 45° respecto de la ODT y del sistema de imagen. De tal manera que cuando se diseñen patrones y secuencias, se pueden diseñar como *resultado deseado* (Figura 3.15 (c)) y aplicar la transformación para obtener las imágenes objetivo (Figura 3.15 (a)).

Pasemos ahora a otro aspecto del diseño de imágenes, atacando ahora la limitante de trabajar con una paleta de colores limitada. Si el objetivo es diseñar potenciales ópticos arbitrarios, o tan arbitrarios como los experimentos que se planeen lo requieran, utilizando luz monocromática, la arbitrariedad se entiende limitada en un

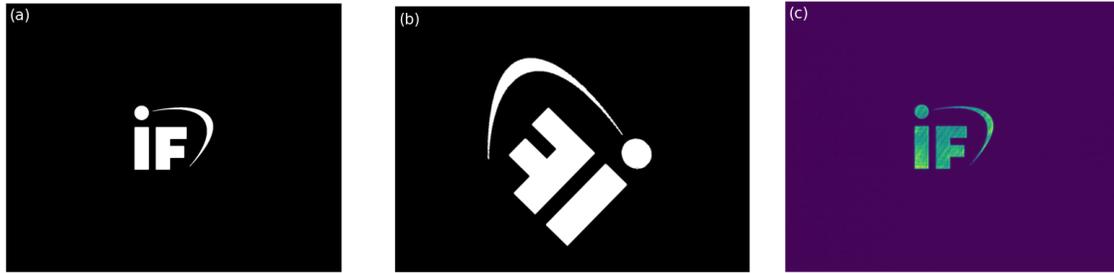


Figura 3.15: (a) Imagen que se desea observar (1024×1280). (b) Se aplica la transformación para obtener la imagen que debe ser enviada al DMD (768×1024). (c) Imagen final capturada (1024×1280).

rango continuo de intensidad entre la oscuridad total y una intensidad máxima. Estas características son bien satisfechas si se diseña una imagen en escala de grises. El problema: el dispositivo que se utilizará para proyectar el potencial consta de espejos que pueden estar en solo dos estados. Si se tuviera un sistema óptico bien alineado y con resolución suficiente, el perfil de intensidad creado será una distribución con discontinuidad en las fronteras de los píxeles adyacentes.

Por fortuna, el sistema óptico no es perfecto y no es capaz de resolver pixel por pixel. Así, píxeles blancos y negros juntos dan la apariencia de ser en realidad alguna tonalidad de gris, dependiendo del balance de blanco y negro en esa área. Solo queda la pregunta: ¿cómo determinar el balance correcto?

Para ello, hay que empaparse un poco del inmenso mundo de la computación gráfica. Supóngase que como imagen objetivo se tiene una matriz de 768×1024 de 8-bits, es decir, cada entrada adquiere un valor entero entre 0 (negro) y 255 (blanco). Para convertirla a imagen binaria, 0 y 255 solamente, podría uno pensar que basta asignar a cada píxel 0 o 255, dependiendo de cuál es el más cercano. A estas técnicas se les conoce como *cuantización por valor umbral (thresholding)*. No obstante, esto no es suficiente para heredar la información que había en la imagen original, cuestión que no solo se limita a la complejidad de la imagen o variación en sus valores. Si la imagen es una simple matriz de puros valores 128, el tono de gris justo a la mitad del rango, entonces quedaría redondeada a una imagen blanca de solo 255. En contraste, una imagen muy similar de píxeles con valor 127, prácticamente indistinguibles una de la otra, resultaría en una imagen completamente negra de píxeles 0. En ambas

imágenes, dada un área determinada de la misma el balance de blanco y negro es aproximadamente 1:1 [63]. El resultado de convertir a imagen binaria mediante este sencillo método de cuantización pierde esto de vista totalmente.

Para resolver esta problemática, existen técnicas de *difusión de error*. Por *error* se debe entender la diferencia que hay entre el píxel original $I_{ij}^{(8)}$ de 8-bits y el resultado de cuantizar por valor umbral $I_{ij}^{(1)} \in \{0, 255\}$: $\Delta I_{ij} = I_{ij}^{(8)} - I_{ij}^{(1)}$. Como puede verse, $|\Delta I_{ij}|$ se maximiza cuando $I_{ij}^{(8)}$ es cercano a la mitad del rango, como en el ejemplo anterior: mayor error indica mayor información perdida. Una técnica de difusión de error se encarga de esparcir el error ΔI_{ij} a los píxeles aledaños que aún no han sido transformados. De esta manera, cuando llegue el momento de transformarlos, lo harán con la información del error de las transformaciones anteriores, compensando la pérdida.

Las técnicas de tramado tienen como objetivo randomizar el error por cuantización. Existen muchas técnicas de tramado, difiriendo en la matriz kernel que aplican sobre la imagen. En este trabajo se utiliza el **tramado de Floyd-Steinberg (FS)** [64], el cual después de cuantizar un píxel $I_{ij}^{(8)}$, suma el error de cuantización ΔI_{ij} a los píxeles aledaños que aún no han sido cuantizados. La Figura 3.16 ilustra el proceso. La cuantización se lleva a cabo de manera secuencial, barriendo fila por fila en manera de zig-zag hasta abarcar toda la imagen. El resultado de este método y su efectividad puede apreciarse en la Figura 3.17.

Para la aplicación de este tramado se utiliza el módulo `Image` de la librería `Pillow` de Python. Esta librería provee la clase `Image`, que cuenta con un atributo indicador de la profundidad de bits. Al convertir un objeto `Image` de 8-bits a 1-bit, se aplica FS por defecto.

Ya por último, disponemos de una herramienta que ayuda al algoritmo FS a simular una escala de grises. Esta herramienta ya no es computacional sino física, y hace uso de la teoría de formación de imagen. Como herramienta de suavizado de perfiles ópticos, se utiliza un iris que sirve como **filtro espacial**, como ya se comentó en la descripción del arreglo óptico (sec. 3.2).

Una imagen, en el sentido físico, puede considerarse como un perfil de intensidad

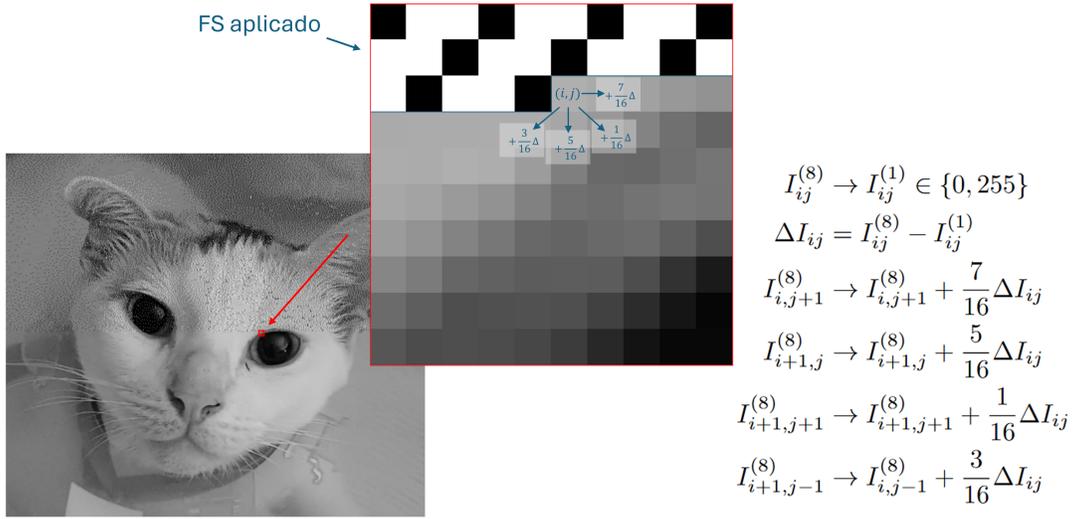


Figura 3.16: El algoritmo FS se aplica fila por fila. Mi gatita Ramona me ayuda a ilustrar un momento intermedio del proceso. La mitad superior de la imagen ya ha sido sujeta al algoritmo, y el cuadrado que se muestra en detalle rodea el siguiente píxel a cuantizar. En determinado paso en que se cuantiza $I_{ij}^{(8)}$, se calcula el error ΔI_{ij} y se modifica el valor de los píxeles adyacentes sumando cierto porcentaje de este error. Si, por ejemplo, $I_{ij}^{(8)}$ se va a 0, entonces es más probable que los píxeles adyacentes vayan a 255. Similarmente, si se va a 255 es más probable que estos vayan a 0 [63] [65].

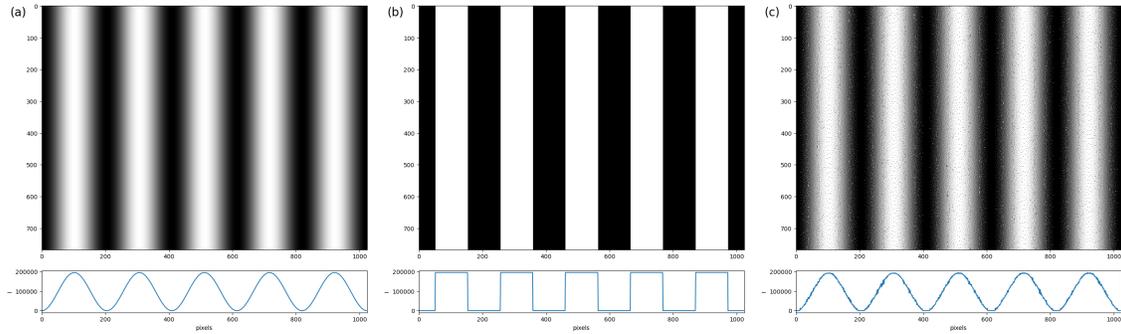


Figura 3.17: (a) Imagen de un posible patrón a enviar al DMD: un perfil que varía sinusoidalmente en la dirección horizontal, en escala de grises. (b) Resultado de la cuantización por valor umbral. ($I_{ij}^{(8)} < 128 \rightarrow 0, I_{ij}^{(8)} \geq 128 \rightarrow 255$). (c) Resultado de aplicar FS a la imagen original. Esta es una imagen binaria, así como lo es (b), pero ha heredado la información sobre las tonalidades grises gracias a la difusión del error por cuantización. Debajo de cada imagen se muestra el perfil integrado a lo largo del eje vertical.

bidimensional $I(x, y)$. Este perfil de intensidad puede expresarse como una construcción de señales armónicas, y las contribuciones de cada frecuencia nos son dadas por la transformada de Fourier. De acuerdo a la teoría de difracción de Fraunhofer, el perfil de intensidad en el campo lejano es la transformada de Fourier de la función de apertura $A(x, y)$, y esta función es, a su vez, proporcional a la intensidad de la luz proveniente de la fuente en un punto (x, y) de la apertura [58]. Por otra parte, una lente es un elemento que trae el campo lejano a una distancia corta: su distancia focal. Es por ello que las lentes son buenos computadores de transformadas de Fourier: el perfil de intensidad en el plano focal es la transformada de Fourier del perfil entrante.

A menos que el perfil de intensidad tenga una periodicidad bien definida, la transformada presenta un espectro continuo de frecuencias, cuya contribución varía también continuamente. Si bien existen frecuencias que dominan, especialmente cuando el perfil presenta periodicidad importante o figuras bien definidas, siempre habrá contribución de las frecuencias altas. Estas frecuencias altas se encuentran alejadas del eje óptico, donde domina la frecuencia cero. Recordando que la transformada de una constante es una delta de Dirac en el origen, esta frecuencia cero no es más que la transformada de una intensidad base que, cuando menos, es no negativa. Por ende, en todo arreglo óptico real, siempre se perderá la información de las frecuencias espaciales más altas, ya que existe una apertura mínima que colecta solo la contribución de las frecuencias más cercanas a cero. Esto implica una pérdida en la resolución de un sistema de imagen.

La teoría de formación de imagen de Abbe [58] contempla el uso de una lente transformadora que en su plano focal forma la transformada del perfil entrante, y que cada punto en el plano focal constituye una fuente puntual de ondas secundarias que, por difracción, forman también una transformada en el campo lejano. La formación de imágenes es, entonces, un doble proceso de difracción. Para traer la imagen del campo lejano a una distancia corta se utiliza una segunda lente, la *lente formadora de imagen*, que se encarga de construir la imagen en su plano focal. Esto es lo que ocurre en un telescopio, donde la distancia entre las lentes de focos f_1 y f_2 es la suma de estas: $f_1 + f_2$. El perfil de luz que es colectado por la lente transformadora

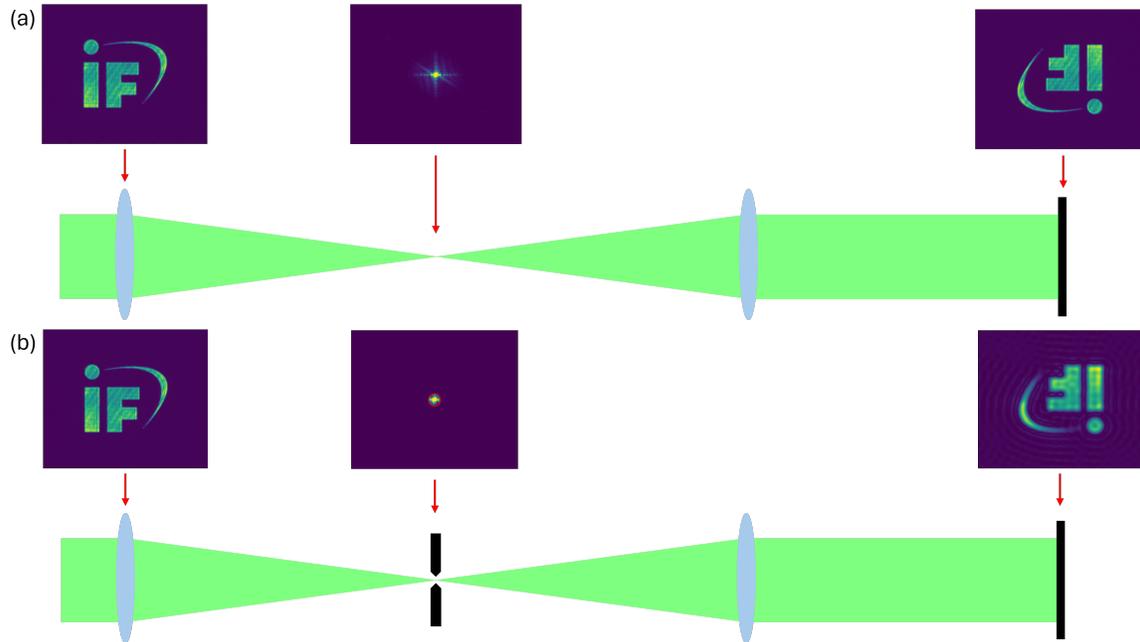


Figura 3.18: (a) La formación de imagen se lleva a cabo por una doble difracción. La segunda lente forma la imagen en su plano focal. (b) Se coloca un iris que bloquea las frecuencias espaciales altas. La imagen se forma pero pierde detalle, pareciendo difuminada.

f_1 es transformado y en su foco se encuentra la distribución de frecuencias espaciales, cuyas intensidades contienen la información sobre el propio perfil. La lente formadora de imagen f_2 colecta la luz de esta transformada y en su foco reconstruye la imagen, invertida y, si $f_1 \neq f_2$, magnificada o demagnificada. Al tener la lente f_2 un diámetro finito, no es capaz de colectar la luz de las frecuencias altas y, por ende, la imagen producida pierde información sobre los detalles más finos del perfil.

La pérdida de esta información es, en ocasiones, de mucha utilidad. En particular para los fines de este proyecto, se necesita de un mecanismo que suavice el perfil de intensidad para facilitar la formación de potenciales ópticos suaves. En este contexto, suavizar hace referencia a deshacerse de cambios bruscos en la intensidad, como lo es el ruido en la señal proveniente de fuentes espurias. Debido a que el gradiente en intensidad es producido mediante un tramado, deshacerse de las frecuencias espaciales altas solo mejora el resultado en la simulación de los tonos grises. Colocar un iris parcialmente cerrado en el plano focal de la lente transformadora provoca una pérdida de los detalles más finos del perfil entrante y produce una imagen con un gradiente

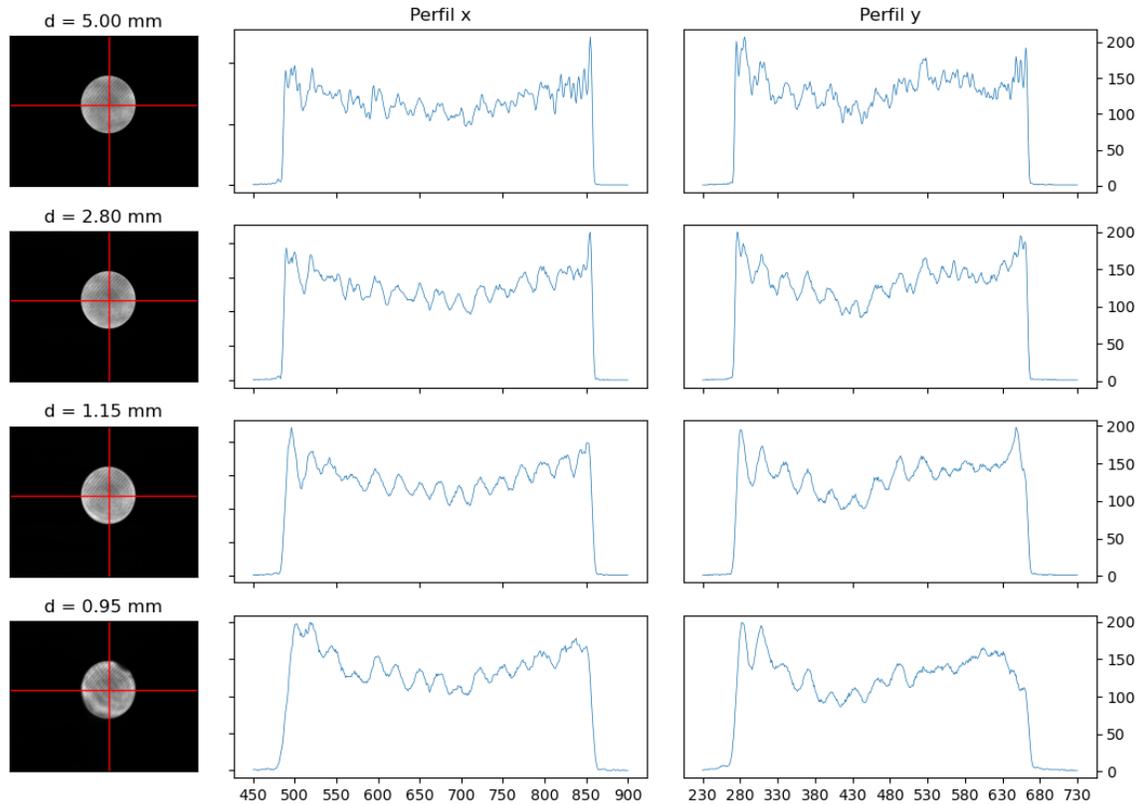


Figura 3.19: Efecto del iris en la imagen recibida por la cámara CMOS. Cada renglón corresponde a un diámetro de apertura en el iris. La primera columna figura la imagen recibida al mandar un círculo de radio 300 px al DMD. La segunda y tercer columnas muestran los perfiles de intensidad en la imagen correspondientes a las líneas rojas. Se puede observar como en ambas direcciones el perfil pierde detalle, la curva se suaviza. Para $d = 0.95$ mm se puede observar ya una alteración importante en el perfil, haciendo inutilizable esta apertura.

de intensidad menor. Estos detalles finos, para los potenciales que desean producirse, no representan información relevante.

De acuerdo a la Figura 3.19, se considera que una apertura de 1.15 mm proporciona un limpiado de frecuencias altas adecuado, y es la apertura del iris que se utilizará al implementar el algoritmo de retroalimentación.

3.3.2. Algoritmo de retroalimentación

Hasta ahora se ha descrito cómo se pueden diseñar perfiles de luz con la ayuda de una imagen objetivo en escala de grises. Observando la figura 3.13, y fuera de lo ya discutido sobre la necesidad de una calibración para calcular la matriz de trans-

formación, es claro que el perfil recibido no es precisamente el deseado. Incluso en este sencillo caso de un cuadrado de espejos encendidos, el perfil carece de la homogeneidad deseada. Esto es de esperarse, pues el haz láser utilizado sale de la fibra con un perfil de intensidad gaussiano y por ello, si bien se le magnifica lo suficiente como para que su sección más intensa abarque la totalidad del DMD, nunca será homogéneo. Aunado a esto, el haz pasa por una gran cantidad de elementos ópticos, antes y después del DMD, cada uno añadiendo imperfecciones y aberraciones producto de diversos factores, como polvo que pueda haber en sus superficies, mal alineamiento o inevitables defectos por difracción.

Lo que es cierto es que se necesita una manera adicional de moldear el haz láser, una que permita, con cierto error, obtener el perfil deseado.

Para este fin se implementa un **algoritmo de retroalimentación** basado en el trabajo de Giulia del Pace, en su contribución al grupo de Gases Cuánticos Ultrafríos del Laboratorio Europeo para la Espectroscopía No-lineal (LENS) [66]. El funcionamiento es, a grandes rasgos, sencillo de explicar. El algoritmo se encarga de comparar la imagen capturada por la cámara con la imagen objetivo, calcula la diferencia entre ellas y con esta diferencia se realizan correcciones a la imagen que es mandada al DMD. Al final de cada paso se calcula una medida de error. Este es un proceso iterativo que, idealmente, a cada paso reduce el error hasta llevarlo debajo algún límite que se especifique. El resultado de este proceso es una imagen que, al mandarse al DMD, produce el perfil deseado.

Para realizar una descripción adecuada del proceso, establezcamos un poco de notación que servirá para identificar a las múltiples imágenes involucradas.

- Sea \mathbf{T} la imagen objetivo, una imagen de 8-bits de 768×1024 píxeles. Esta es la imagen que desea observarse con la cámara.
- Sean $\mathbf{DMD}_0, \mathbf{DMD}_1, \dots$ las imágenes que son enviadas al DMD. Estas son imágenes de 1-bit, también de 768×1024 píxeles.
- Sean $\mathbf{CMOS}_0, \mathbf{CMOS}_1, \dots$ las imágenes capturadas por la cámara. Estas son imágenes de 8-bits de 1024×1280 píxeles.

- Sean $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ las matrices de diferencia que se calculan al final de cada paso en el proceso. Estas son matrices de entradas enteras en un rango $[-255, 255]$ de 768×1024 . Son utilizadas para calcular \mathbf{DMD}_{i+1} .
- Sean $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ medidas de error entre el objetivo y $T(\mathbf{CMOS}_i)$. Este error es monitoreado al final de cada paso y comparado con un error deseado ε , que se especifica al comienzo del algoritmo. Este error puede definirse de diversas maneras, pero se usa aquí la raíz del error cuadrático medio (error RMS), definido de la siguiente manera:

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{1}{M \cdot N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \left(\frac{\mathbf{CMOS}_k[i, j] - \mathbf{T}[i, j]}{\mathbf{T}[i, j]} \right)^2} \quad (3.12)$$

El proceso siempre inicia con una calibración de la cámara. Se obtiene de esta manera la matriz de transformación T que permite comparar \mathbf{CMOS}_i con \mathbf{DMD}_i . Obteniendo esta matriz, se toma la imagen objetivo \mathbf{T} y se le convierte a imagen binaria usando el módulo `Image`. En este paso es que se aplica FS, y el resultado es la primer imagen enviada al DMD: $FS(\mathbf{T}) = \mathbf{DMD}_0$. Se captura el resultado, obteniendo \mathbf{CMOS}_0 , se le transforma con T y se compara con \mathbf{T} para calcular la primera diferencia: $\Delta_0 = T(\mathbf{CMOS}_0) - \mathbf{T}$. Se calcula el error ε_0 de acuerdo a su definición en la ec. 3.12. De esta manera concluye la primera iteración del proceso.

Entre la primera y segunda iteración se lleva a cabo un paso intermedio extraordinario. Se debe notar que la capacidad del algoritmo para realizar correcciones radica en disminuir la intensidad de las áreas que son más intensas de lo que se requiere, apagando espejos inicialmente encendidos. Si en determinada zona de espejos encendidos se detecta un error positivo ($T(\mathbf{CMOS}_i) < \mathbf{T}$), el algoritmo no puede *encender más* los espejos de esa zona. En este sentido existe una limitante sobre los perfiles de intensidad que pueden obtenerse, dada por el perfil de intensidad producido por la superficie entera encendida. En el caso de querer obtener una superficie de intensidad constante, para homogeneizar el perfil el algoritmo deberá apagar espejos en las zonas de mayor intensidad para nivelarlas con las zonas de menor intensidad, pues

$$\begin{array}{c}
\frac{T(\mathbf{CMOS}_0)}{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M1} & q_{M2} & \cdots & q_{MN} \end{bmatrix} \\
\text{ordenar} \left(\frac{T(\mathbf{CMOS}_0)}{\mathbf{T}} \right) = (q'_1, q'_2, \cdots, q'_{k-1}, \overset{\downarrow}{q'_k}, \cdots, q'_{MN}) \\
\text{percentil } p\% \Rightarrow \boxed{\alpha(p) = q'_k}
\end{array}$$

$q'_1 < q'_2 < \cdots$
 $\frac{k}{MN} \approx p\%$

Figura 3.20: Cálculo de α mediante el percentil p .

lo contrario no es posible. Del reconocimiento de esta limitante surge la necesidad de este paso intermedio. Se calcula la razón $T(\mathbf{CMOS}_0)/\mathbf{T}$ y se presta atención a las entradas de menor valor en la matriz que, por lo que se ha explicado, son las que el algoritmo no puede corregir. Si se tomara el mínimo valor, digamos α , y se usara este para reescalar \mathbf{T} , entonces se cumpliría que $\mathbf{T}^* = \alpha\mathbf{T} \leq T(\mathbf{CMOS}_0)$ para todos los píxeles, permitiendo que solamente apagando espejos se pueda conseguir que $T(\mathbf{CMOS}_i) \approx \mathbf{T}^*$. A α le llamamos *coeficiente de reescala*.

No obstante, al aplicar este método se encuentra que α puede llegar a ser muy pequeño y, en consecuencia, \mathbf{T}^* tiene valores de intensidad muy bajos. Esto resulta en una gran cantidad de espejos OFF en las imágenes \mathbf{DMD}_i . Por ello, en vez de tomar el mínimo de esos cocientes, se puede tomar un *percentil* adecuado, p . Ordenando de menor a mayor los cocientes, se escoge cierto percentil que será utilizado para calcular α (Figura 3.20). Por ejemplo, si se escoge el percentil 10%, α es el mínimo valor de $T(\mathbf{CMOS}_0)/\mathbf{T}$ debajo del cual se encuentra el 10% de los valores de la matriz ordenados en manera creciente. De esta manera se procura que aun buena parte de la superficie pueda ser corregida sin apagar una cantidad de espejos tan grande que la intensidad reflejada por el DMD se vea comprometida de manera importante. Cuanto menor sea el percentil, menor será α y menos intensa será la imagen resultante.

Para comenzar la segunda iteración se calcula \mathbf{DMD}_1 . Su cálculo ya no es como el de \mathbf{DMD}_0 , sino que, de ahora en adelante, se utiliza Δ_0 para corregir \mathbf{DMD}_0 . Es

en este momento que se introducen los parámetros k_p , k_i y $k_p^{(3)}$, a los que llamaremos *parámetros de retroalimentación*. Estos funcionan de manera muy similar a cómo un control PID realiza correcciones a una señal que algún dispositivo emite para que se asemeje a una señal deseada. En un control PID se definen igualmente tres parámetros: el parámetro de acción proporcional P , el de acción integral I y el de acción derivativa D [67]. Se especifica al controlador una señal set-point $SP(t)$ que se desea algún aparato emita. La emisión de dicho aparato $I(t)$ (input) es monitoreada por el controlador y se calcula la diferencia $e(t) = V(t) - SP(t)$. El controlador luego emite una señal $O(t)$ que es enviada al mismo aparato emisor o bien a algún otro dispositivo encargado de modular la señal que este emite. Este es un proceso de retroalimentación continuo que se asegura de minimizar $e(t)$ lo más pronto posible. En el caso de nuestro algoritmo, la siguiente imagen a mandar al DMD se calcula según la ec. 3.13.

$$\mathbf{DMD}_{\mathbf{k}+1} = \mathbf{DMD}_{\mathbf{k}} + k_p \Delta_{\mathbf{k}} + k_i \sum_{i=0}^{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{i}} + k_p^{(3)} \Delta_{\mathbf{k}}^3 \quad (3.13)$$

De esta manera se obtiene $\mathbf{DMD}_{\mathbf{1}}$. De aquí en adelante cada iteración se lleva a cabo de la misma manera. Se obtiene $\mathbf{DMD}_{\mathbf{k}+1}$ según la ec. 3.13, se captura $\mathbf{CMOS}_{\mathbf{k}}$, se calcula $\Delta_{\mathbf{k}}$ como ya se describió y también se calcula ε_k según la ec. 3.12. La diferencia con la iteración inicial es que de ahora en adelante se utiliza $\mathbf{T}^* = \alpha \mathbf{T}$ en vez de \mathbf{T} .

Al final de cada iteración se evalúa si $\varepsilon_k < \varepsilon$. De ser el caso el proceso termina, arrojando la matriz $\mathbf{DMD}_{\mathbf{k}}$ como resultado. Si no es el caso, entonces se realiza una nueva iteración. En ocasiones se da el caso que ε_k aumenta en pasos consecutivos y no converge a un valor. En estos casos se tiene una tolerancia de tres ciclos de retroalimentación y si en estos tres no disminuye, el proceso se da por terminado y se arroja la última matriz DMD. La Figura 3.21 muestra esquemáticamente lo que aquí se ha descrito.

Hecho esto, y habiendo también explicado las técnicas del apartado anterior, se han expuesto todas las herramientas que, por el momento, se tienen para producir

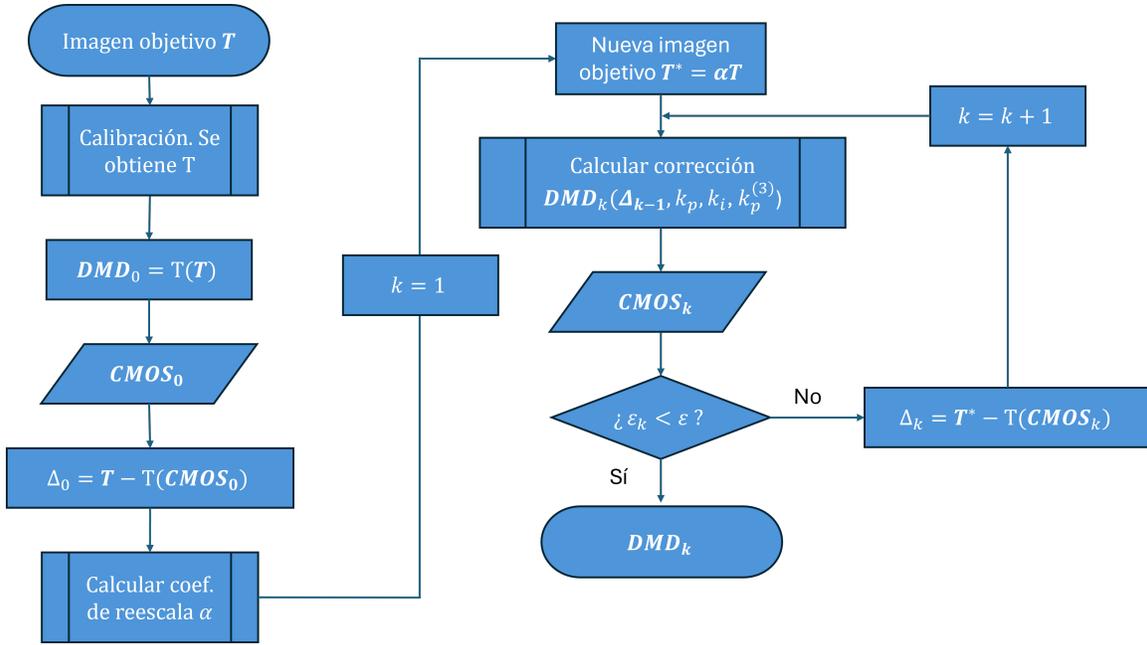


Figura 3.21: Diagrama de flujo del algoritmo descrito en esta sección. El algoritmo puede parar también si ε_k aumenta en repetidas veces consecutivas.

potenciales ópticos estáticos arbitrarios, entendiéndolo como arbitrarios bajo las limitaciones del sistema óptico. El resto se deja a una buena alineación de la óptica que se encargará de iluminar los gases cuánticos.

3.3.3. Parámetros del algoritmo

La parte más importante del algoritmo es el proceso de realizar las correcciones a \mathbf{DMD}_k (ec. 3.13), y es determinada por los parámetros de retroalimentación $k_p, k_i, k_p^{(3)}$ y α . Un conjunto de parámetros es más adecuado que otro si puede reducir el error ε_k lo más posible y de manera rápida. Para ello se repitió el proceso de retroalimentación probando diferentes parámetros en ciertos rangos, registrando los resultados para poder escoger valores adecuados.

Como se mencionó en la sección 3.1.3, se utiliza Python para realizar el control del DMD. Igualmente se utiliza para realizar los procesos descritos en las dos secciones anteriores. Particularmente útil es la clase `FeedbackMachine`, definida, como lo indica su nombre, para servir como la herramienta que implementa el algoritmo de retroalimentación. Definir el algoritmo como funcionalidad de una clase permite su

uso de manera repetida y ordenada. Mediante esta clase es que se puede aplicar el algoritmo de retroalimentación múltiples veces, variando los parámetros involucrados o aplicándose a una serie de imágenes objetivo diferentes.

La Figura 3.22 muestra la evolución del error probando valores de k_p en el rango $[0, 1]$ dejando fijos el resto de parámetros. Este parámetro corresponde a una corrección proporcional al error en turno, un error que en las primeras iteraciones es del orden de 10 en una escala de 255, por lo que k_p debe ser de décimas de unidad para ser óptimo. Se puede ver que para los valores k_p más bajos el error decrece más lentamente, pero para los más cercanos a 1 el error crece después de haber caído a un mínimo muy rápidamente. De aquí que se muestra que se debe escoger un $k_p \sim 0.5$. Debido a que k_i modula la contribución de la historia de los errores y que, particularmente para aquellos píxeles que muestren una mayor diferencia inicial, esta contribución ronda las decenas, se usa $k_i \lesssim 0.1$. Por último, $k_p^{(3)}$ modula una contribución está dedicada a procurar una convergencia más rápida del error para aquellos píxeles con mayor diferencia respecto de \mathbf{T}^* . Volviendo a considerar que para los píxeles más discrepantes, $\Delta \sim 10$, esto quiere decir que $\Delta^3 \sim 1000$, por lo que se escoge $k_p^{(3)} \sim 0.001$. Este término solo es relevante para el primer par de iteraciones del algoritmo.

Explorar diferentes valores de k_i y $k_p^{(3)}$ en los rangos sugeridos por el párrafo anterior no muestra que existan valores particulares que mejoren significativamente el rendimiento del algoritmo. Ante la ausencia de alternativas claramente mejores, se optó por utilizar $k_p = 0.8$, $k_i = 0.085$ y $k_p^{(3)} = 0.003$, conjunto que muestra un desempeño adecuado para pruebas que se realizaron con un perfil cuadrado de intensidad homogénea como el de la Figura 3.13.

El parámetro en el que se realizaron pruebas más profundas es α o, mejor dicho, el percentil p que se utiliza para calcularlo (Figura 3.20). Este valor es el principal determinante en la cantidad de espejos que se apagan y, por ende, en la intensidad que se pierde en el DMD. La sección 3.3.4 se dedica al apartado de la intensidad del haz de luz que llegará al plano atómico, y α es una variable de importancia en esa estimación.

Dejando fijos los parámetros de retroalimentación, se prueban diferentes percen-

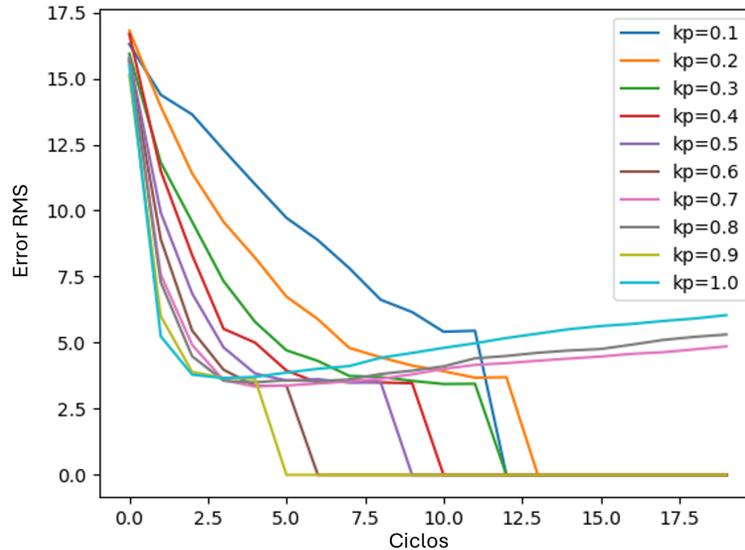


Figura 3.22: Evolución del error RMS para varios k_p a lo largo de una ejecución del programa de retroalimentación.

tiles para observar el efecto que tiene en los errores obtenidos y la intensidad final de la imagen al aplicar el algoritmo para corregir un perfil cuadrado homogéneo. Se monitorean las siguientes variables para conocer el efecto de la elección del percentil: el valor mínimo y final del error RMS, la variación de este error, los ciclos que toma la corrida del algoritmo y, por supuesto, el valor máximo de intensidad capturado por la cámara. Los ciclos son 20 por defecto a menos que la corrida se detenga prematuramente por un error que aumenta en tres ciclos consecutivos. La intensidad es expresada como un valor de 8-bits, siendo 255 el más intenso y aquel que satura la cámara.

La Figura 3.23 muestra los resultados de esta exploración. Se observa una pérdida significativa de intensidad únicamente para percentiles inferiores al 5%. Por encima de este umbral, la intensidad máxima registrada se estabiliza, por lo que elegir un percentil mayor no ofrece ventajas y, además, produce un ligero aumento en el error RMS. No hay evidencia de un efecto sobre el número de ciclos requeridos para alcanzar los valores mínimos, y solo en un caso el algoritmo se detiene prematuramente. Para este perfil homogéneo, un menor percentil ofrece una ligera reducción del error final, a costa de la intensidad.

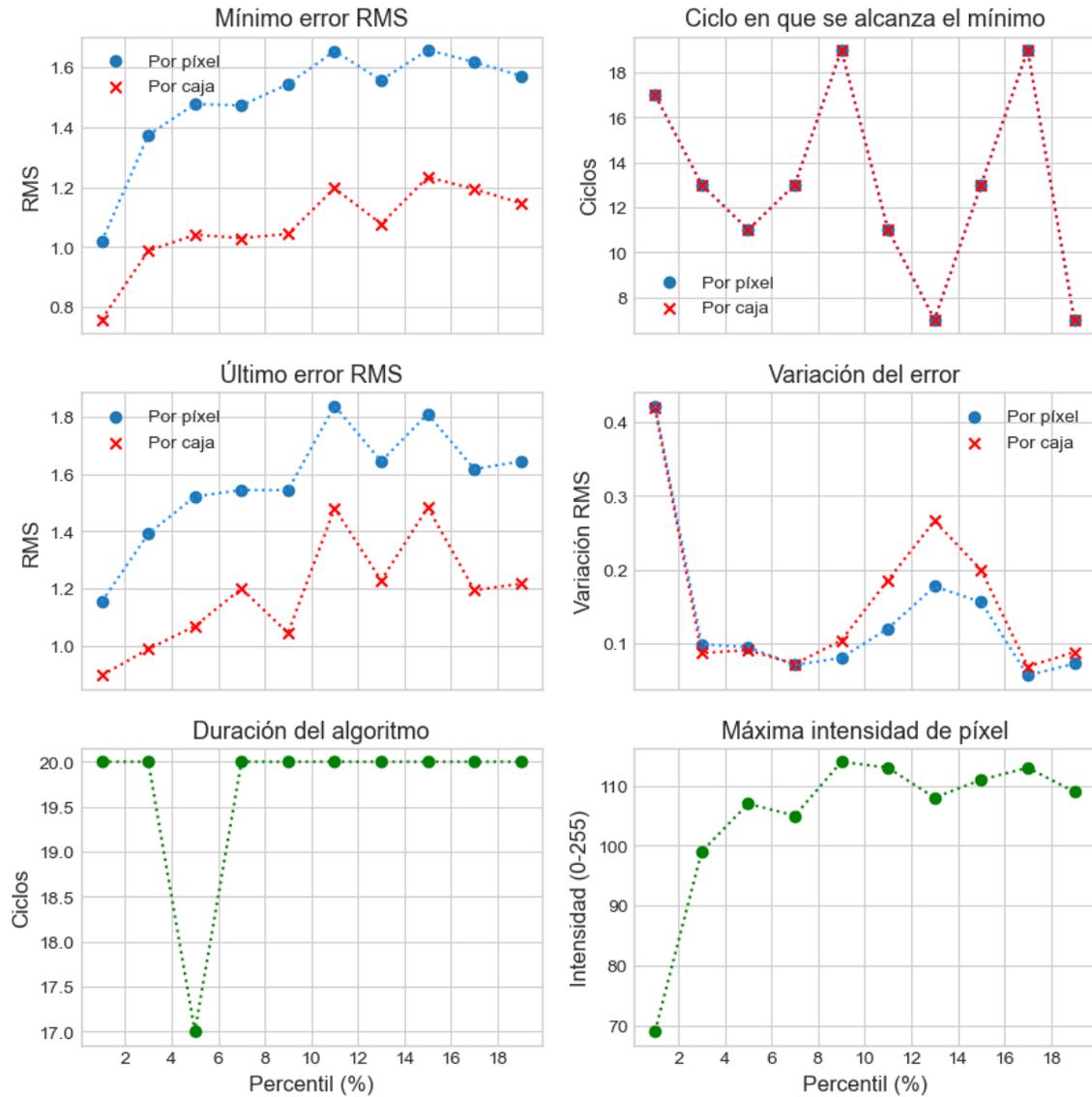


Figura 3.23: Efecto de la elección del percentil para el cálculo de α , utilizando como imagen objetivo un cuadrado de intensidad constante de 400×400 px. Adicional al error, se define un *por caja*, que no es más que particionar la imagen en cajas de varios píxeles (8×8 en este caso) y calcular el promedio en cada caja como si fueran píxeles compuestos. Los ciclos totales son siempre 20 (fijo) excepto cuando la corrida se interrumpe porque el error aumenta monótonamente.

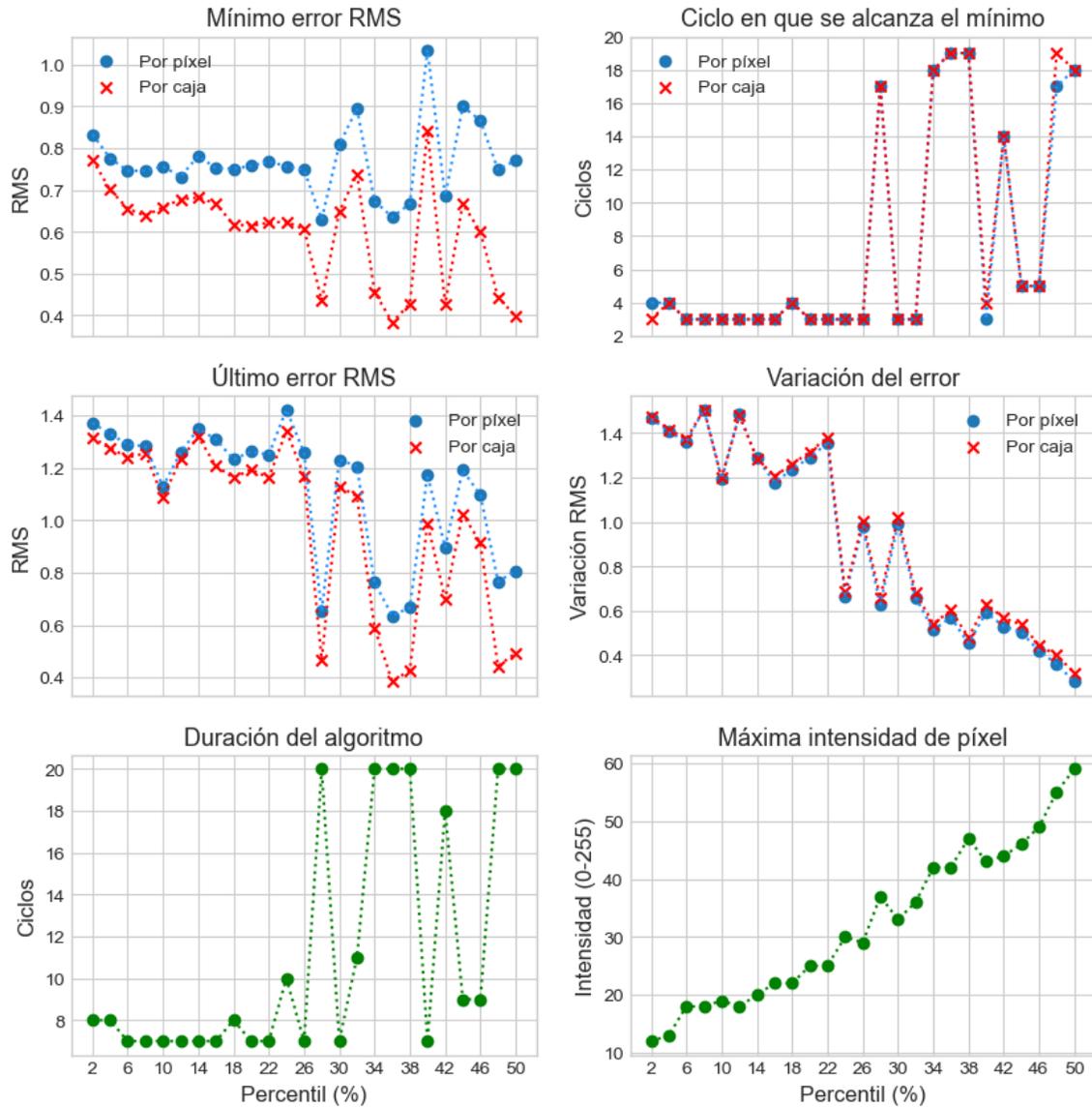


Figura 3.24: Efecto de la elección del percentil para el cálculo de α , utilizando como imagen objetivo un perfil sinusoidal como al que se muestra en la Figura 3.17.

También se considera un caso en el que el perfil deseado no es homogéneo. En particular, se analiza un perfil sinusoidal, como el mostrado en la Figura 3.17, que abarca el rango completo de grises (ver Figura 3.24). Se encuentra que en un caso en el que la imagen objetivo aprovecha la escala de grises en lugar de ser estrictamente binaria, el valor de α es comparativamente menor y se pierde una cantidad significativa de intensidad en el proceso.

A diferencia del perfil cuadrado homogéneo, el mínimo error alcanzado tiende a *desestabilizarse* a mayores percentiles, sin mostrar una reducción significativa. Sin embargo, la variación del error disminuye a medida que el percentil aumenta, lo que sugiere que valores más altos de α favorecen una mejor convergencia a un valor final. Esto coincide con que las corridas más largas se dan a percentiles mayores que 26, y que también se termina el algoritmo en un error más bajo.

Estos comportamientos son esperados, ya que un percentil menor implica una mayor diferencia que debe ser compensada. No obstante, dado que un menor α permite que un mayor porcentaje de la superficie sea corregida (pues una mayor proporción de la imagen objetivo reescalada queda, en intensidad, por debajo de la imagen captada por la cámara), se esperaría que el error final sea menor. Esto se cumple para el perfil homogéneo pero no para el sinusoidal, en el que mayor percentil da mejores valores de RMS. Esto parece indicar que realizar correcciones en regiones de poca intensidad es más difícil para el algoritmo, de modo que se deben ignorar los valores más pequeños de $T(\text{CMOS})/\mathbf{T}$ para evitar modificar fuertemente los valores de \mathbf{T} más grandes y así no comprometer el RMS. En la Figura 3.27 de la siguiente sección se puede observar lo que aquí se describe: los mínimos de intensidad son aplanados a 0 y no presentan una variación suave como los máximos, de manera que en estos casos podría requerirse un mayor tiempo de exposición o mayor intensidad del láser.

Tomando estos casos como característicos de perfiles homogéneos y no homogéneos, escoger un percentil entre 10 o 20 resulta adecuado. Lo que el lector debe rescatar de esta sección es, por un lado, la motivación detrás de la elección de k_p , k_i y $k_p^{(3)}$ y, más relevante, el efecto de la elección de α y cómo se distinguen los casos de perfiles homogéneos y los de perfiles que comprenden mayor rango de la escala de grises. La

elección de α afecta la efectividad del algoritmo en cuanto a error RMS total pero también limita las áreas a ser corregidas. Para un perfil que presente zonas de baja intensidad es preferible escoger p más alto, lo que también rescata la intensidad que se pierde. Para un perfil homogéneo, p bajo mejora el error, pero sacrifica la intensidad.

3.3.4. Una estimación de la potencia requerida

El objetivo final de este trabajo es preparar el camino para producir potenciales repulsivos de magnitud comparable con las trampas que confinan a las muestras. Conocer la forma de la ODT actual permite realizar una estimación de la profundidad de potencial que debe vencerse para que el perfil de intensidad arbitrario tenga los efectos deseados. Al final del proceso de producción de los gases, la potencia de la ODT es $P_0 \sim 40mW$. La cintura de la ODT se mide de $42.7(1) \mu m$, por lo que, de acuerdo a la ec. 2.41, el máximo de intensidad en la trampa para este orden de potencias es

$$I_0 \sim 1.396 \times 10^{-2} \frac{mW}{\mu m^2} \quad (3.14)$$

De la expresión para U en la ec. 2.38 y la ec. 2.42, el único parámetro dependiente de la frecuencia es la desintonía $\delta = c(1/\lambda - 1/\lambda_0)$. La razón entre la desintonía para infrarrojo de 1064 nm que utiliza la ODT y la desintonía para verde de 532 nm que se utilizará para realizar estos potenciales ópticos es $\delta_{532}/\delta_{1064} \sim 0.7$, de modo que para un mismo perfil de intensidad el potencial correspondiente al láser verde es ligeramente mayor en magnitud que aquel para infrarrojo.

Los gases producidos en la configuración de trampa prolata actual tienen, cuando mucho, dimensiones de $200 \mu m$ de largo y $20 \mu m$ de ancho, un área de sección transversal máxima de $\sim 4 \times 10^3 \mu m^2$. La magnificación de 45.29 dejaría desaprovechada gran parte de la superficie del DMD. Si se demagnifica la imagen del DMD para que el largo de la nube sea solo un poco menor que la diagonal del DMD, la magnificación debería ser de $M \sim 1/70$.

El láser verde del que se dispone tiene capacidad de emitir hasta 5 W de potencia. Por supuesto, no toda esta potencia es aprovechada, y en realidad, gran parte de los

5 W se pierden en el camino. Para modular su intensidad se utiliza un modulador acusto-óptico (AOM) que tiene una eficiencia máxima de $\sim 80\%$. Posterior al AOM el haz deberá pasar por una fibra óptica de alta potencia con eficiencia máxima igualmente de $\sim 80\%$. Para el arreglo óptico descrito en la sección 3.2, en el DMD incide alrededor de un 42% de la potencia que sale de la fibra debido a que las colas del perfil gaussiano quedan fuera de la superficie de espejos (este valor puede aumentarse magnificando menos el haz previo a incidir en el DMD). El propio DMD tiene una eficiencia de difracción de $\sim 68\%$. El resto de componentes ópticos aportan a la pérdida de potencia ya sea debido a efectos de difracción o por dispersión en sus superficies que, pesimistamente, podemos estimar de 30% . Con estas eficiencias, de los 5 W quedan $\sim 640mW$.

Considerando que el área del DMD es $1.47 \times 10^8 \mu\text{m}^2$, la intensidad de la luz en el plano atómico sería

$$I_0 = \frac{P}{AM^2} \approx \frac{640 \text{ mW}}{1.47 \times 10^8 \mu\text{m}^2 \cdot (1/45.29)^2} \approx 2.133 \times 10^{-2} \frac{\text{mW}}{\mu\text{m}^2} \quad (3.15)$$

Más aún, contemplando el coeficiente de reescala α , la intensidad queda multiplicada por este factor que es siempre menor que 1. Con estas intensidades, los potenciales producidos con infrarrojo y verde se comparan como

$$\frac{U_{532}}{U_{1064}} = \frac{I_{532}/\delta_{532}}{I_{1064}/\delta_{1064}} \sim 2.18\alpha \quad (3.16)$$

Este valor, si bien aparentemente suficiente para igualar la magnitud del potencial atractivo, indica que se requiere de un buen alineamiento para suprimir pérdidas de intensidad, procurar no utilizar α tan pequeño y, además, sugiere la elección de una mayor demagnificación que 45.29.

3.3.5. Resultado de la aplicación del algoritmo

En esta sección mostramos el resultado de aplicar el algoritmo a diferentes patrones básicos que demuestran la capacidad de este para producir perfiles arbitrarios. Para realizar las rutinas de retroalimentación, se fija el tiempo de exposición de la cámara

a 1.5 ms y se ajusta la intensidad del haz láser para saturar ligeramente en las partes más intensas, sin saturar completamente la región iluminada. Se fija el parámetro de escala α para abarcar el 15% inferior de intensidades en el área iluminada y se busca que el error ε entre iteraciones difiera en menos de 1%.

Las Figuras 3.25 a 3.29 muestran la comparación entre los perfiles con y sin aplicación del algoritmo. Para todas ellas, en (a) se muestra la imagen objetivo, en (b) el perfil de luz sin aplicar el algoritmo, en (c) la imagen objetivo obtenida del algoritmo, y en (d) el perfil final corregido. Además, se muestran los perfiles integrados en ambas direcciones y, para el caso de la Figura 3.29, los perfiles en las líneas indicadoras. El tiempo aproximado que toma al algoritmo corregir una sola imagen es alrededor de 15 segundos, y depende de cuán distinto sea el perfil inicial del objetivo. Si bien una sola imagen no toma mucho tiempo, preparar una secuencia completa, que puede llegar a tener del orden de cien imágenes, el tiempo puede llegar a ser del orden de un par de horas. Esto, en turno, no debe ser un problema si ya se han calibrado los parámetros del algoritmo, y será cosa de una sola vez para cada secuencia que desee utilizarse.

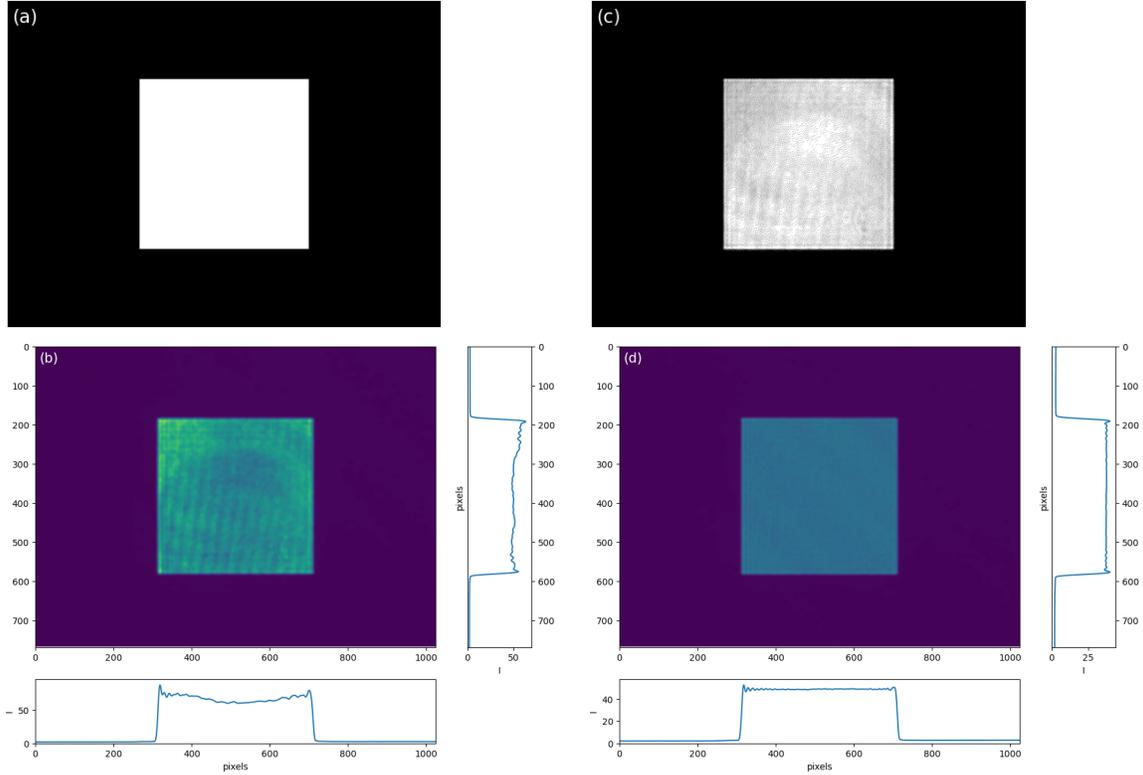


Figura 3.25: Patrón 1: cuadrado homogéneo de 400×400 px. (a) Imagen objetivo. (b) Imagen capturada sin retroalimentación. Después de aplicar el algoritmo se obtienen (c) la imagen que se debe enviar al DMD después de 20 ciclos de retroalimentación y (d) la imagen final capturada. Parámetros utilizados: $k_p = 0.8$, $k_i = 0.085$, $k_p^{(3)} = 0.001$.

3.4. Potenciales dinámicos

En esta última sección del capítulo se discute brevemente la extensión de este algoritmo para ser aplicado a una secuencia de imágenes objetivo para poder realizar potenciales dinámicos, así como de las capacidades que se tienen en cuanto velocidades reales que pueden producirse en el plano atómico.

En la sección 3.1.3 se discutió la capacidad del DMD para producir secuencias de imágenes en tiempos cortos. Para los experimentos que se realizarán, se utilizará el modo binario ininterrumpido para así poder explotar la máxima tasa de cambio de fotogramas: uno cada $44 \mu s$, evitando también las fases oscuras del modo normal de operación.

Para explorar fenómenos como la vorticidad en superfluidos, una secuencia que podría enviarse al DMD sería una figura que se desplace a través de la pantalla

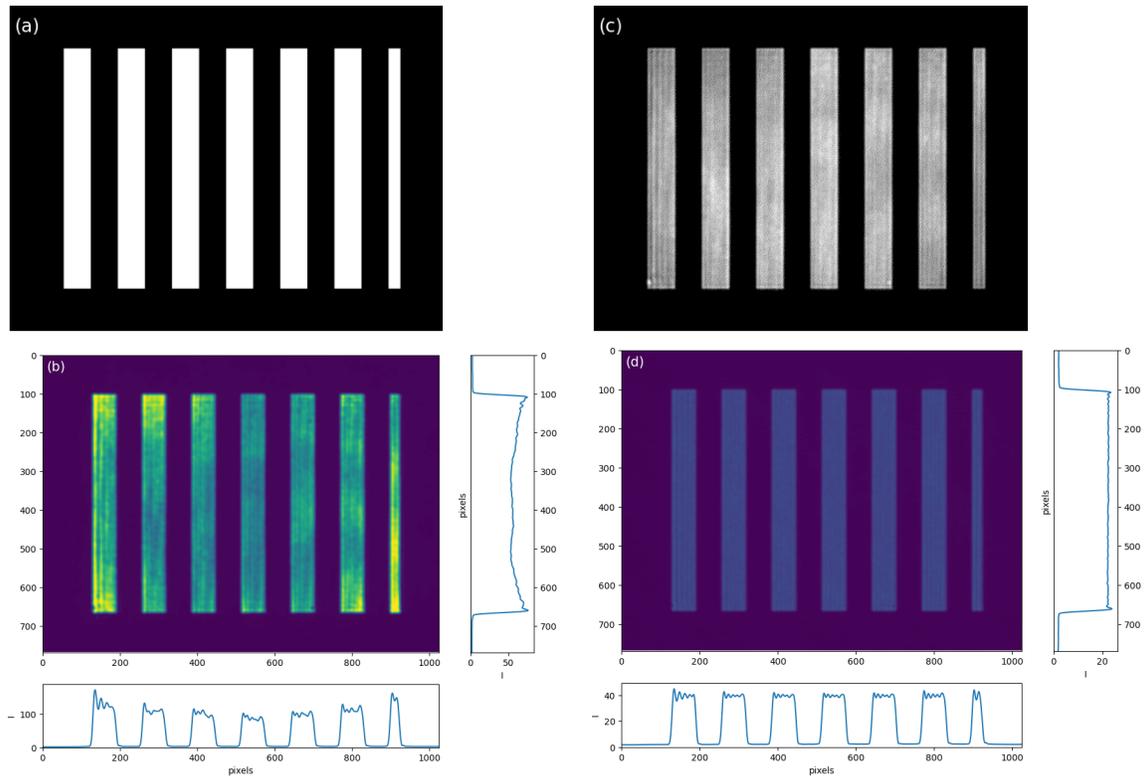


Figura 3.26: Patrón 2: franjas rectangulares. (a) Imagen objetivo. (b) Imagen capturada sin retroalimentación. Después de aplicar el algoritmo se obtienen (c) la imagen que se debe enviar al DMD después de 20 ciclos de retroalimentación y (d) la imagen final capturada. Parámetros utilizados: $k_p = 0.8$, $k_i = 0.085$, $k_p^{(3)} = 0.001$.

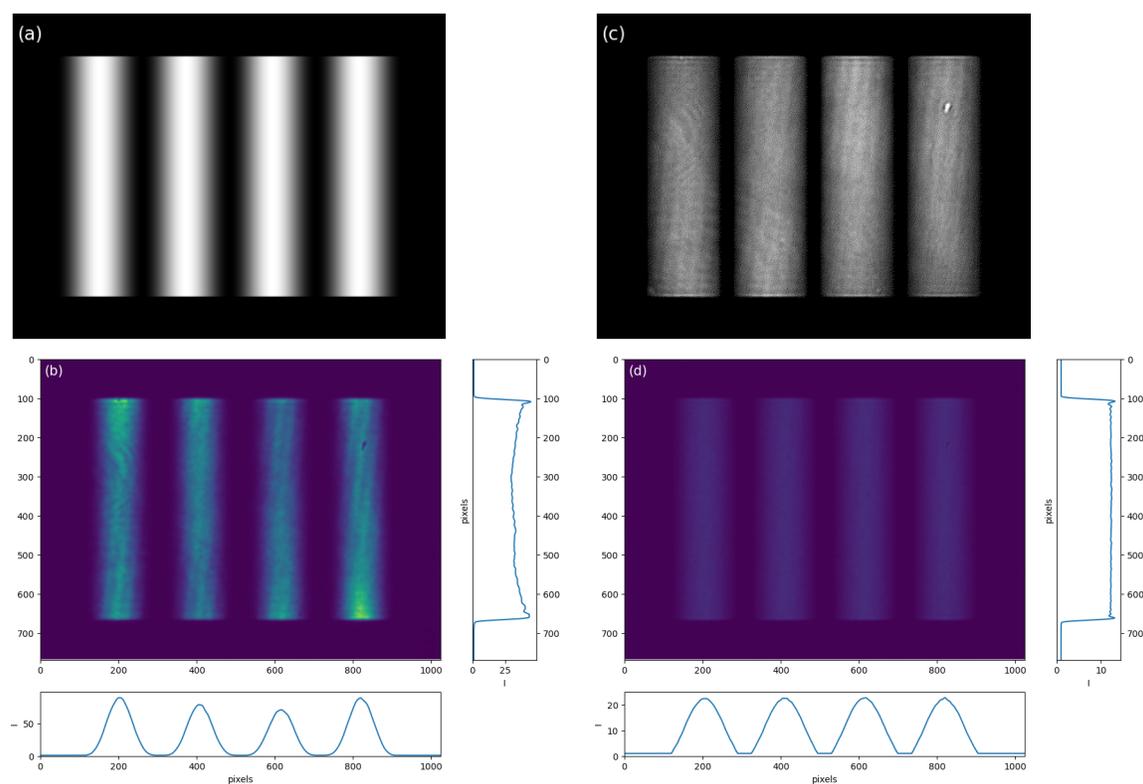


Figura 3.27: Patrón 3: perfil sinusoidal. (a) Imagen objetivo. (b) Imagen capturada sin retroalimentación. Después de aplicar el algoritmo se obtienen (c) la imagen que se debe enviar al DMD y (d) la imagen final después de 25 pasos de retroalimentación.

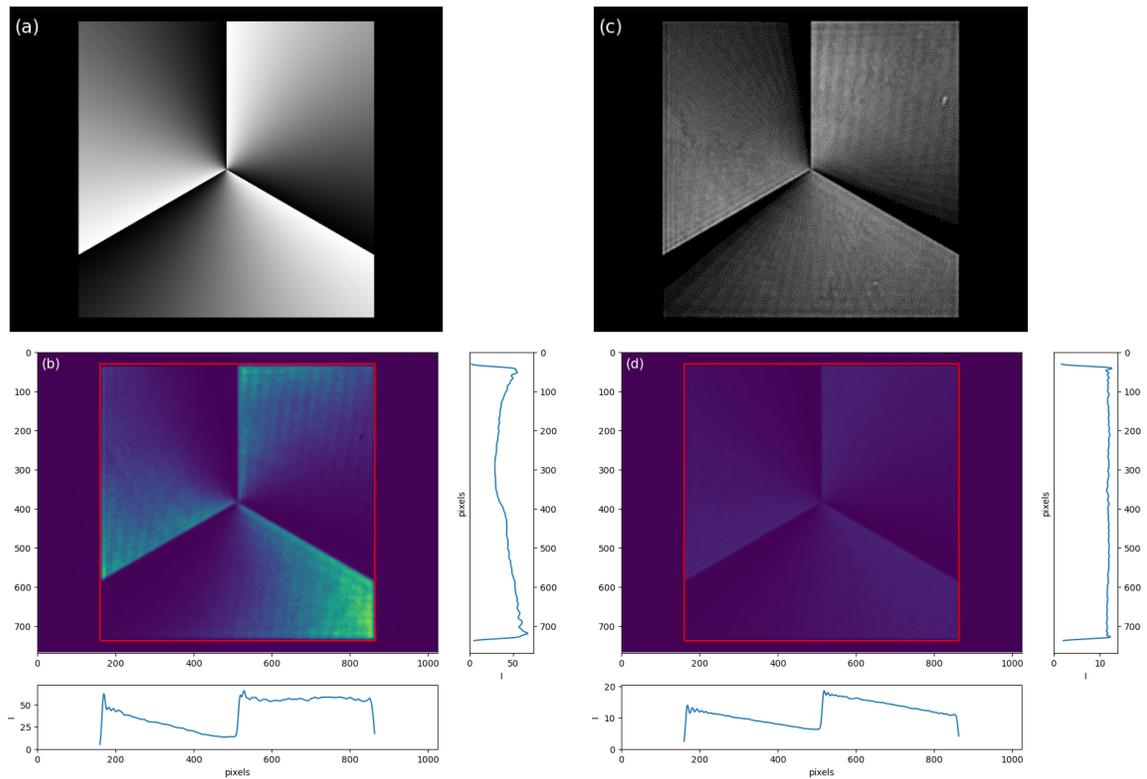


Figura 3.28: Patrón 4: un barrido angular. (a) Imagen objetivo. (b) Imagen capturada sin retroalimentación. Después de aplicar el algoritmo se obtienen (c) la imagen que se debe enviar al DMD y (d) la imagen final después de 25 pasos de retroalimentación.

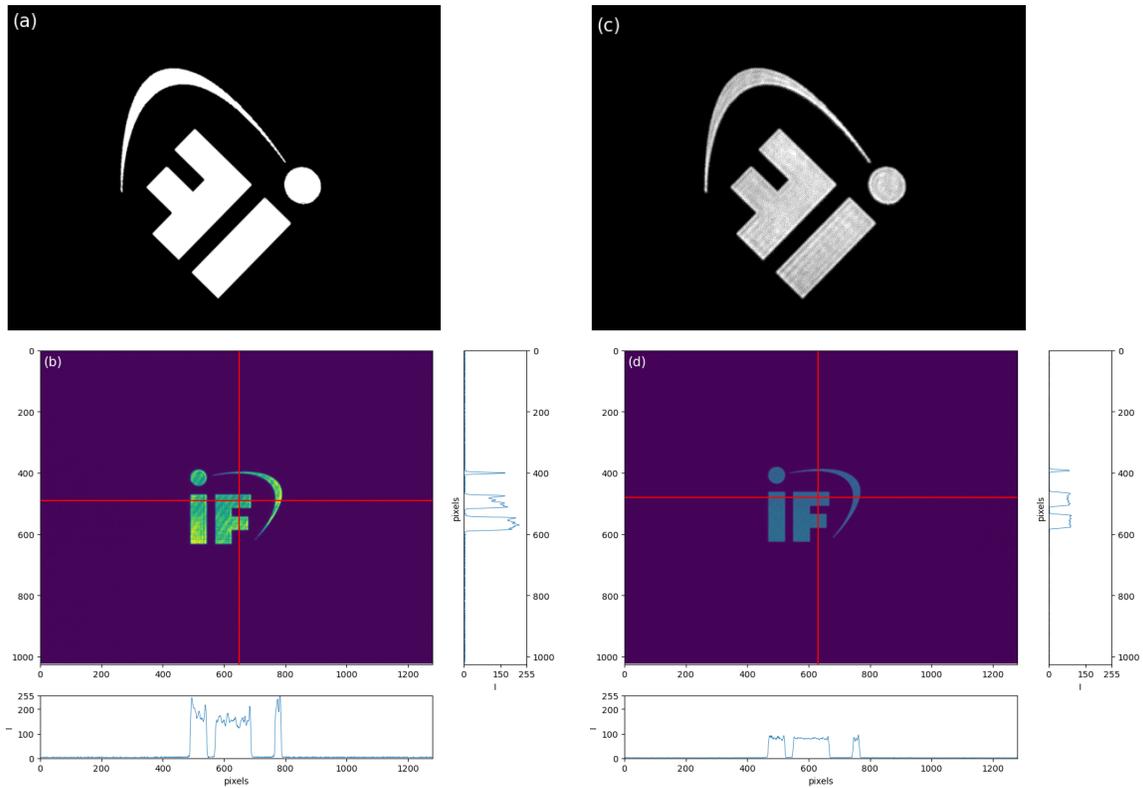


Figura 3.29: Patrón 5: el logotipo del IFUNAM. (a) Imagen objetivo. (b) Imagen capturada sin retroalimentación. Después de aplicar el algoritmo se obtienen (c) la imagen que se debe enviar al DMD y (d) la imagen final después de 25 pasos de retroalimentación. Las imágenes (a) y (c), a diferencia de las figuras anteriores, son pensadas para compensar la transformación que se lleva a cabo en el sistema óptico, por lo que (b) y (d) es lo que la cámara recibe. En los ejemplos anteriores a estas últimas se les ha aplicado la transformación afín T . En este ejemplo también se muestran los perfiles de línea indicados por las líneas rojas, en vez de perfiles integrados. Parámetros utilizados: $k_p = 0.8$, $k_i = 0.085$, $k_p^{(3)} = 0.003$.

en una secuencia con cierta frecuencia de muestra de fotogramas. Es claro que el *movimiento* del haz de luz que produzca esta secuencia no es continuo, limitado a la naturaleza discreta tanto del arreglo de espejos como de la máxima tasa de muestra de fotogramas. La escala de tiempo relevante en los experimentos de gases ultrafríos es el tiempo de respuesta de la densidad, \hbar/μ . Según cálculos para el ${}^6\text{Li}$ en una trampa armónica, este tiempo es $160 \mu\text{s}$ para el régimen BEC, $18 \mu\text{s}$ para el régimen unitario y $16 \mu\text{s}$ para el BCS [68]. Una secuencia que simule un movimiento continuo deberá considerar cambios en esta escala de tiempo, por lo que para algunas aplicaciones será necesario utilizar los 22.727 kHz que ofrece el dispositivo.

El movimiento más continuo que puede llegar a simularse con el DMD es una velocidad en el plano del DMD dada por la ec. 3.17. Para dar significado a esta cantidad se debe conocer la magnificación del sistema óptico que ilumina el plano atómico, M . Un píxel del DMD mide $13.68 \mu\text{m}$ de lado, por lo que, teniendo en cuenta M , un píxel equivale a $13.68\mu\text{m} \cdot M$. Para el arreglo óptico utilizado en este trabajo, la magnificación es de $M = 1/45.29$. Luego, la velocidad máxima en el plano atómico para este arreglo particular es $6.68 \mu\text{m}/\text{ms}$ (ec. 3.18).

$$v_{max}^{(px)} = \frac{1 \text{ px}}{t_{min}} = (1 \text{ px})f_{max} = 22.727 \times 10^3 \frac{\text{px}}{\text{s}} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} v_{max} &= v_{max}^{(px)} \cdot (13.68 \mu\text{m}) \cdot M \\ &= \left(22.727 \times 10^3 \frac{\text{px}}{\text{s}}\right) \cdot \left(\frac{13.68 \mu\text{m}}{45.29}\right) \\ &= 6.68 \frac{\mu\text{m}}{\text{ms}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

La magnificación puede ser modificada si, por ejemplo, se utiliza una lente de tubo diferente para el objetivo de microscopio. Una mayor magnificación permite mayor velocidad máxima, pero reduce la superficie que directamente afecta a la nube atómica.

Otro aspecto de interés para las secuencias es la velocidad angular de un objeto. La velocidad máxima sigue obedeciendo a ec. 3.17 y ec. 3.18, y como $v = \omega R$, esta depende del radio respecto del centro de la rotación. Una aplicación de una secuencia

que presente rotación puede darse con el patrón mostrado en la Figura 3.28 con el fin de modificar la fase de los condensados: un patrón en el que la intensidad depende del ángulo. El lado del cuadrado ronda los 700 píxeles, de modo que, respecto del centro de la pantalla, $R_{max} \sim 500$ px. Luego, $\omega_{max} \sim 0.05$ rad/ms = 2.6 deg/s. Esta cantidad es independiente de la magnificación, y depende totalmente de qué tan alejado se encuentre la figura que rota respecto del centro de la rotación.

Estas secuencias de imágenes serán también sujetas al algoritmo de retroalimentación. Aplicar el algoritmo a una secuencia es sencillo ya que se ha probado el algoritmo para una sola imagen. La única consideración adicional para el proceso es utilizar un mismo α para todas las imágenes en la secuencia pues de esta manera se reescalan los objetivos \mathbf{T} bajo un mismo factor. Debido a la inhomogeneidad de la intensidad, una secuencia que muestre, digamos, un objeto o barrera pequeña (que cubra solo una porción de la superficie total) moviéndose a lo largo de la pantalla, escoger un mismo percentil para calcular α resultaría en diferentes valores de este coeficiente debido a que se calcula sobre regiones de distinta intensidad. Por ello, para aplicar el algoritmo sobre la secuencia se debe, como paso preparativo, considerar la superposición de cada imagen en la secuencia y calcular α , usando un percentil que puede ajustarse según la necesidad, y con este α aplicar el algoritmo a cada imagen individual. De esta manera se asegura que la aplicación del algoritmo a todos los cuadros de la secuencia se realiza con objetivos de intensidades comparables.

Para mostrar un ejemplo, véase las figuras 3.30 y 3.31. Un anillo se desplaza a lo largo del eje largo de la superficie del DMD a una tasa fija. En la Figura 3.30 se muestran todos los píxeles que son encendidos en algún punto de la secuencia: la combinación de todos los cuadros en uno solo. Se calcula α para esta imagen objetivo, y este α es el que se utiliza en el algoritmo para calcular \mathbf{T}^* de cada una de las imágenes.

En la Figura 3.31 se grafica el perfil de intensidad x sobre la línea roja indicada, y un histograma de intensidades de la imagen con el máximo de la curva resaltado. Idealmente, para todas las imágenes de la secuencia el histograma debe ser el mismo tras la aplicación del algoritmo. Salvo para el último renglón, los perfiles de

intensidad son bastante similares, pero se puede observar un gradual ensanchamiento del histograma. Además, la intensidad con el máximo de cuentas también disminuye. Esto es indicador de que en el extremo derecho de la superficie del DMD se refleja una menor intensidad. Escoger un menor percentil p para obtener un menor α en el paso preliminar deberá compensar de mejor manera esta diferencia, a costa de, como ya se ha dicho, la intensidad reflejada.

Lo expuesto muestra que el DMD es una herramienta que puede utilizarse para producir secuencias de imágenes que se traduzcan en potenciales ópticos de dependientes del tiempo, en particular, pozos y barreras que cambien de posición de manera casi continua en comparación con los tiempos de respuesta de los gases producidos. En el siguiente capítulo se da una idea de los posibles experimentos a realizar cuando el DMD se implemente finalmente en el experimento.

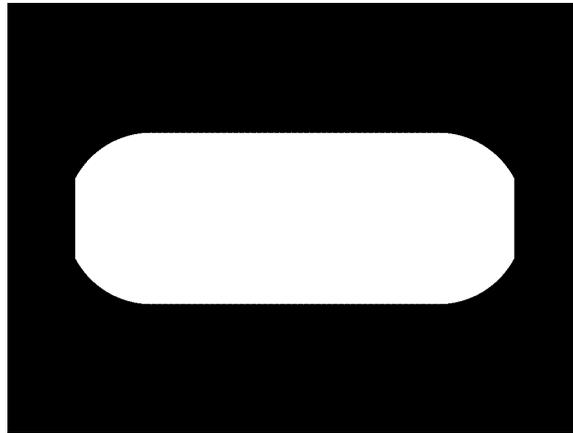


Figura 3.30: Combinación de todos los píxeles que están encendidos en alguna imagen de la secuencia. De esta imagen se calcula α .

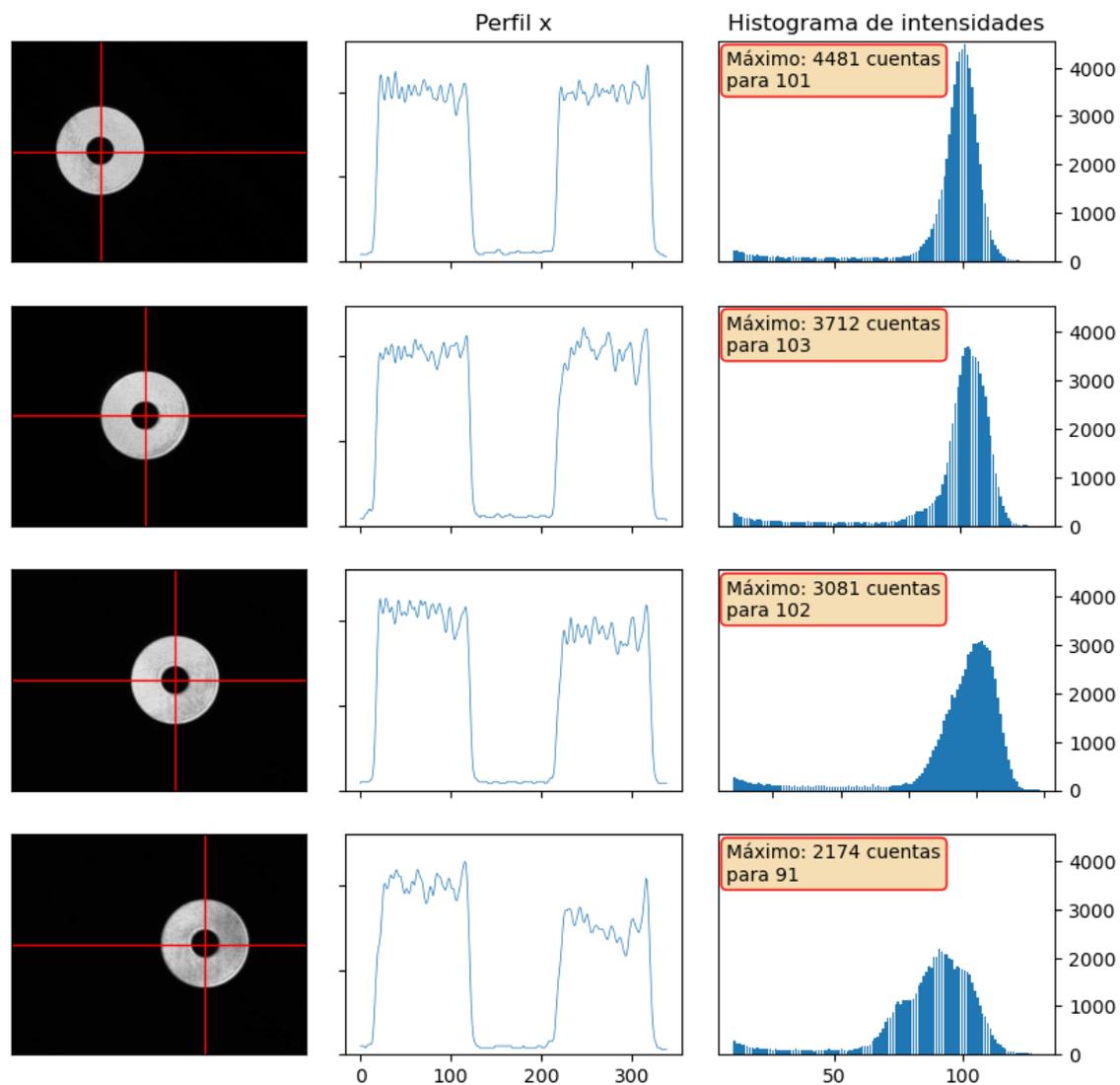


Figura 3.31: Algunos fotogramas de muestra en la secuencia. Cada fila corresponde a un fotograma particular, cuya imagen se muestra en la columna izquierda. En la columna central se muestra perfil horizontal de intensidad indicado por la línea roja, y en la columna derecha se muestra un histograma de las intensidades, indicando la intensidad con mayor conteo.

Conclusiones y perspectivas

Logros del trabajo

En este trabajo se presentó al DMD como herramienta para diseñar y proyectar perfiles de intensidad sobre una nube de átomos. Como primer paso se realizó una descripción del dispositivo, por un lado proporcionando una descripción de sus propiedades ópticas como rejilla de difracción, y por otro ofreciendo un resumen de sus funcionalidades más importantes en cuanto a control. En este apartado, se corroboró la capacidad del dispositivo para cambiar de cuadro en la tasa máxima de refresco.

Se diseñó un arreglo óptico dedicado a la realización de pruebas con el dispositivo y la aplicación del algoritmo de retroalimentación, emulando las condiciones en las que se espera implementar el DMD finalmente. Se expusieron las técnicas que se requieren para producir un gradiente de intensidades utilizando un dispositivo cuyo funcionamiento es fundamentalmente binario.

Se creó un algoritmo dedicado a moldear el perfil con base a una imagen objetivo en escala de grises. Conforme se realizaban pruebas con el algoritmo, este fue complementándose hasta llegar a la versión actual, que contempla la corrección de perfiles tanto homogéneos como con gradiente de intensidad. Mediante cálculos sencillos se confirmó que se dispone en el laboratorio de las herramientas para producir potenciales de las magnitudes necesarias para llevar a cabo experimentos con los gases ultrafríos. Por último, se expuso el alcance del DMD para producir perfiles dependientes del tiempo, en particular, la velocidad que pueden tener los objetos y obstáculos que se produzcan, que es del orden de mm/s y es comparable con la velocidad del sonido de las muestras.

En paralelo, se escribió una serie de módulos de Python que proveen al LMU de una estructura robusta para el control del dispositivo, el diseño de los potenciales, la aplicación repetida del algoritmo para la corrección en secuencias de imágenes, la búsqueda de parámetros, monitoreo del error y diagnóstico del desempeño del mismo y, por supuesto, la proyección de las imágenes y secuencias con capacidad de modificar los modos de operación. Estos se esquematizan en el Apéndice A.

Si bien se habla de conseguir *perfiles arbitrarios*, se debe recordar que el alcance de tiene sus limitaciones. La intensidad puede variar solo en un plano, y esta se mantiene constante a lo largo de la dirección de propagación del haz, produciendo en realidad perfiles cilíndricos y en una dirección fija. Además, la resolución con la que se cuenta para diseñar estos perfiles es limitada por el sistema de imagen de retroalimentación, que se midió de 22 px. Más aún, el algoritmo no logra reproducir fielmente intensidades que son muy bajas en comparación con el máximo, pues tiende a reducir a cero a las regiones menos intensas.

Este trabajo, si bien no constituye una contribución novedosa en el campo, representa un primer paso en la implementación de este dispositivo dentro del contexto de gases ultrafríos en México. Se espera que sirva como material de referencia para futuros proyectos del laboratorio, ya que reúne y organiza información proveniente de diversas fuentes y manuales dispersos, complementada con el conocimiento generado a partir de muchas, muchas pruebas realizadas durante el proceso de aprendizaje y aplicación del DMD en el modelado de perfiles de luz.

Para terminar, se presentan las perspectivas que se tienen en cuanto a la aplicación de estos avances. Primero, la propuesta preliminar del montaje definitivo, seguido de algunos trabajos de otros grupos de trabajo que demuestran el alcance del DMD y que pueden servir de directriz para proyectos a mediano y largo plazo.

Implementación en el experimento

Como siguiente paso en la integración del DMD a los experimentos que se realicen en el LMU estará la construcción del sistema óptico que dirija los perfiles producidos

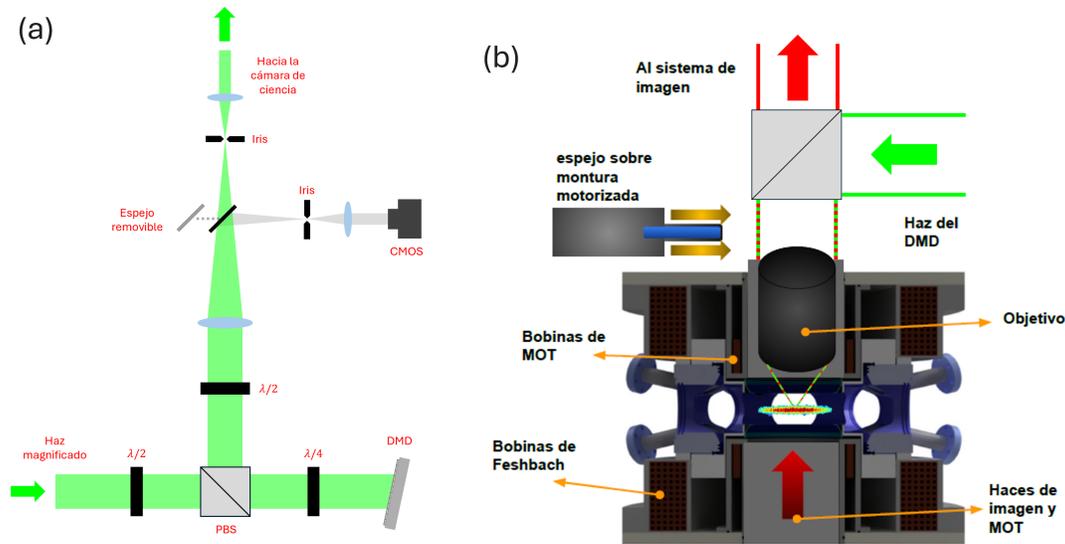


Figura C.1: (a) Un arreglo tentativo para el DMD. La luz incide a $\theta_i = 12^\circ$, normal a los espejos ON; es necesario un cubo polarizador para redirigir el haz hacia la cámara de ciencia. Se deben utilizar láminas retardadoras adecuadas para el correcto funcionamiento del cubo. Un espejo removible redirige a la cámara CMOS para realizar el algoritmo de retroalimentación. (b) Esquema de la cámara de alto vacío y, entre otras componentes, el objetivo de microscopio que forman parte del arreglo experimental del LMU. El haz de imagen pasa de arriba a abajo y hacia el sistema de imagen; el haz verde llega desde el DMD y se proyecta en el plano atómico. En el centro de la cámara se observa una imagen de un condensado, indicando su posición en la cámara, amplificada varios miles de veces. Los haces se combinan un cubo polarizador; se omite la óptica de polarización necesaria.

a la cámara de ciencia donde se encuentran los gases ultrafríos. A continuación se esbozan las generalidades que se sugiere tenga el arreglo.

Para aprovechar la máxima potencia que provee el láser se utilizará una fibra de alta potencia que llevará el haz láser hasta una nueva sección alrededor de la cámara de ultra-alto vacío. El haz deberá pasar por un par de telescopios que lo magnifiquen lo suficiente para cubrir la superficie del DMD. En el presente trabajo se magnificó 15 veces un haz de $870 \mu\text{m}$ de cintura para obtener uno de 1.31 cm. Magnificar una imagen en un factor tan grande requiere de un gran espacio. Debido a que el espacio disponible para montar el arreglo es limitado, puede que se deba sacrificar ligeramente esta magnificación para adecuarse a esta limitante.

Nuevamente debido a la restricción de espacio disponible, se montará el DMD en una posición de manera que el haz incida sobre los espejos en estado ON ($+12^\circ$)

normalmente, a $\theta_i = 12^\circ$. Para esto se utilizará un cubo polarizador divisor de haz en conjunto con láminas retardadoras. De manera similar al arreglo óptico utilizado en el trabajo, posterior al cubo estará el primer telescopio demagnificador en cuyo foco se encuentra el iris de filtraje espacial. Habrá también un espejo removible que direccionará el haz hacia la cámara de retroalimentación. El espejo estará en su lugar para el entrenamiento de secuencias, y será removido cuando se realicen los experimentos. La demagnificación total del sistema deberá ser similar a la utilizada en el trabajo, 45.29, para que el tamaño proyectado de la superficie del DMD sea comparable al tamaño de los gases. Habrá libertad de escoger las 3 lentes para adecuarse a las necesidades del momento, pero se siguen proponiendo el telescopio de lentes 50 cm y 5 cm y la lente de tubo de 25 cm que acompaña al objetivo.

La cámara cuenta con un múltiples ventanas transparentes que permiten el paso de luz en el espectro visible y por las cuales pasan los haces láser que enfrían y confinan las muestras. El haz verde pasará a través de las dos ventanas en dirección vertical, mismas que compartirá con el existente sistema de imagen vertical de alta resolución. Precisamente con esto en mente se diseñó en el LMU el objetivo de microscopio que se menciona en la sección 3.2. Para separar el haz de imagen de 670 nm del haz de 532 nm se utilizará un cubo polarizador, de tal manera que se deberán incluir también láminas retardadoras que se encarguen de maximizar la intensidad de los haces en sus respectivos caminos.

El arreglo deberá estar contenido en una caja para evitar que la alta intensidad sea captada por el sistema de imagen. En la Figura C.1 se muestra un esquema de esta propuesta.

Experimentos con el DMD

Durante el trabajo se ha mencionado la versatilidad que un DMD puede traer a nuestro laboratorio. Para apoyar esta afirmación, a continuación se muestran algunos ejemplos de la aplicación de potenciales moldeados en gases ultrafríos.

Paredes rígidas

El estudio de gases y fluidos pretende describir las generalidades de estos sistemas, pero usualmente se parte de geometrías sencillas, y solo en casos aislados se dispone de soluciones analíticas para geometrías más complejas. La geometría más usual es una caja de volumen V de paredes rígidas, consideradas en las secciones de los gases de Bose y Fermi del capítulo 1. Un sistema encerrado en paredes rígidas presenta una plataforma de geometría simple para desarrollar modelos de fenómenos más complejos. La capacidad de realizar experimentos en estas condiciones simplifica la interpretación de resultados y la comparación con modelos teóricos. Asimismo, da pie a la observación de física distinta a la que se observa en potenciales armónicos, comunes en el área.

El uso de dispositivos como el DMD permite simular potenciales cercanos a paredes rígidas. Limitados por difracción, estos no pueden tener cambios abruptos de intensidad para producir barreras y pozos cuadrados, pero sí que se pueden simular como se muestra en las Figuras 3.25 y 3.26. Usualmente se opta por utilizar luz desintonizada al azul, como nuestro caso, pero también es posible utilizarlas con luz desintonizada al rojo. Las aplicaciones son múltiples y comprenden diversos enfoques, como la estadística de los gases cuánticos, espectroscopía, dinámica de los superfluidos, etc. Una perspectiva del uso de cajas ópticas en experimentos de gases cuánticos puede revisarse en [69]. Aquí se mencionan algunos trabajos que demuestran la utilidad del DMD.

El DMD sirve para preparar las muestras en un perfil homogéneo. El grupo de N. Navon en Yale proveyó de dos paredes rígidas a su muestra de ${}^6\text{Li}$ para estudiar interacciones de tres cuerpos (Figura C.2 (a)). La uniformidad de sus muestras les permitió modelar independientemente el decaimiento de la población de las tres especies de espín $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$ [70].

En el laboratorio Kastler Brossel se utilizó un DMD sobre una muestra de BEC de ${}^{87}\text{Rb}$ para estudiar la dinámica fuera del equilibrio del condensado [71] (Figura C.2 (b)). La muestra cuasibidimensional se prepara con paredes rígidas mediante un

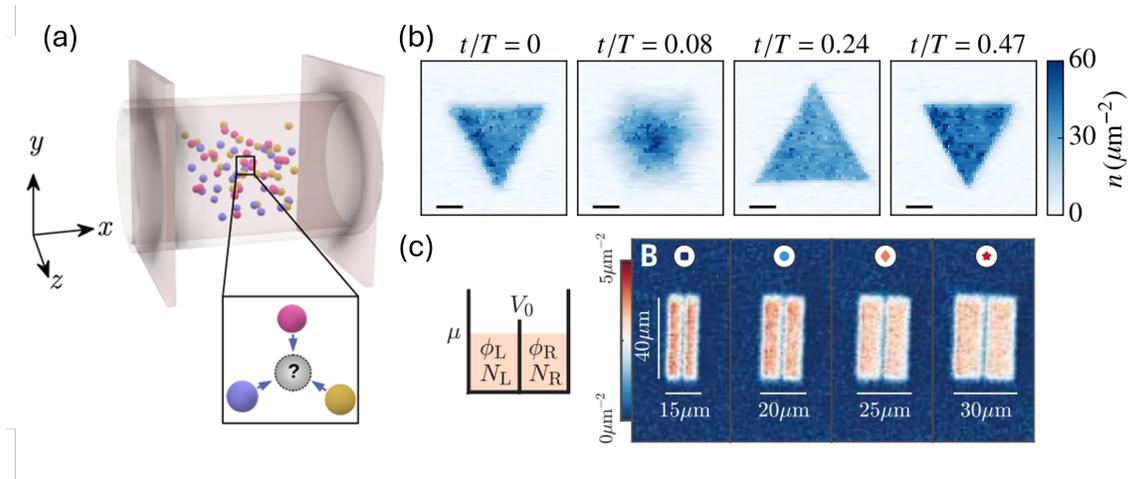


Figura C.2: (a) Un gas de ${}^6\text{Li}$ se confina en una ODT armónica con dos paredes rígidas. Obtenida de [70]. (b) Evolución de un BEC de ${}^{87}\text{Rb}$ en una trampa armónica con un perfil inicial triangular moldeado por un DMD. Obtenida de [71]. (c) Creación de juntas Josephson atómicas con un gas de ${}^6\text{Li}$. Obtenida de [72].

DMD con luz de 532 nm desintonizada al azul. Al alcanzar el equilibrio, las paredes se apagan y se deja evolucionar el gas dentro de su trampa armónica. Los resultados sugieren un nuevo modo colectivo para la ecuación de Gross-Pitaevskii en 2D.

En el grupo de materia cuántica de la Universidad de Hamburgo se utilizó también un gas de ${}^6\text{Li}$ cuasibidimensional en el régimen BEC [72] para estudiar un fenómeno de transporte conocido como *efecto Josephson* [73] [74] (Figura C.2 (c)). Se prepara una muestra en una caja cuadrada utilizando dos DMD que proyectan luz de 532 nm. Uno de ellos proyecta el potencial de caja y el segundo se utiliza brevemente para expulsar a los átomos fuera de la caja. Se proyecta además una barrera de $\sim 0.8\mu\text{m}$ de ancho que separa la caja en dos reservorios. Como parte de su método, se imprime una diferencia de fases inicial φ_0 entre los reservorios: a uno de ellos se le aplica un potencial óptico ΔV_0 que avanza la fase en $\Delta V_0 t / \hbar$.

Circulación en superfluidos

Como se mencionó en la sección 1.3.3, un indicador de un superfluido en rotación es la aparición de vórtices. Existen diversos métodos para dotar de momento angular al superfluido y propiciar corrientes con circulación, entre ellas, la modificación de

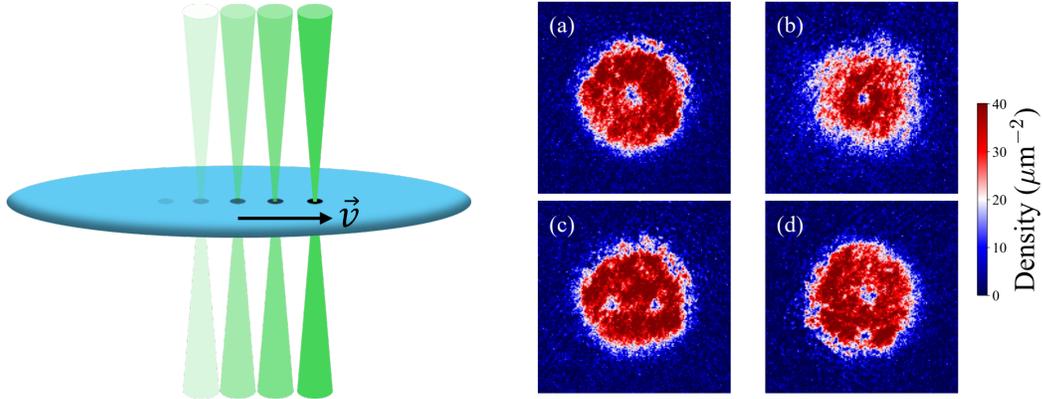


Figura C.3: A la izquierda, esquema del barrido de un obstáculo pequeño utilizando un DMD. A la derecha, preparación de (a) un vórtice *in situ* (dentro de la trampa), (b) a tiempo de vuelo (en expansión sin trampa), (c-d) dipolos de vórtices. Imagen obtenida de [76].

la fase φ mediante potenciales ópticos con un DMD. Estos estados con circulación pueden decaer en arreglos de vórtices que, para el caso de sistemas atómicos como el ${}^6\text{Li}$, son suficientemente grandes como para ser observados ópticamente.

Se pueden inducir vórtices en un gas ultrafrío utilizando un método de barrido de un obstáculo, como se ilustra en la Figura C.3. El concepto fue demostrado utilizando un arreglo que involucra espejos controlados por piezoeléctricos para producir el movimiento de los haces de luz [75]. Una realización de esto utilizando un DMD se logró en el grupo de Chen Lung Hung, en la Universidad Purdue [76]. Un condensado de cesio atrapado en una trampa cuasi-bidimensional es dotado de una geometría de caja circular mediante un DMD. Para formar los vórtices se utilizan dos haces repulsivos de $4\ \mu\text{m}$ de radio que, comenzando desde el borde de la trampa, comienzan a moverse a velocidad $v \sim 0.03\ \mu\text{m}/\text{ms}$, que corresponde a 0.04 veces la velocidad del sonido. Uno de ellos llega al centro del condensado, mientras que el segundo se mueve hacia el borde de la trampa a 65° del primero. Idealmente se produciría un dipolo de vórtices posicionados en las posiciones finales de los obstáculos, pero el vórtice del segundo haz es observado solo en un número reducido de realizaciones. El resultado es un vórtice central. Mediante esta perturbación y un rampeo rápido de las interacciones de repulsivas a atractivas estudian el colapso de un vórtice en un superfluido.

El grupo de G. Roati en LENS ha utilizado un DMD para modificar la fase de un gas ultrafrío de ${}^6\text{Li}$ confinado en geometría anular para obtener estados con circulación

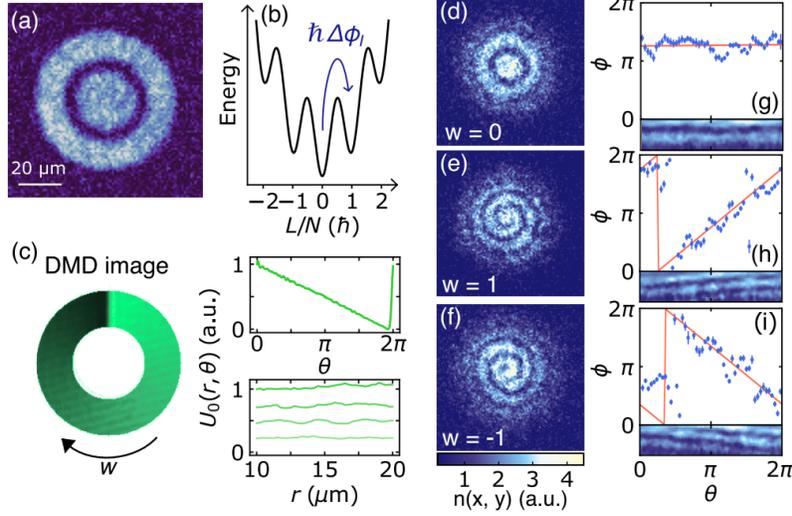


Figura C.4: (a) Imagen del superfluido en geometría anular impresa con el DMD. (b) Metaestabilidad de los estados con momento angular por partícula $L/N = \hbar w$. (c) Perfil $U(\theta)$ impreso sobre el anillo exterior. (d-f) Al dejar interferir el anillo exterior, de circulación $\hbar/m(2\pi w)$, con el círculo interior, de circulación cero, se produce interferencia, de la cual se puede obtener la fase y, mediante un ajuste, calcular w (g-i). Obtenida de [68].

[68]. Imprimiendo un potencial con variación azimutal $U(\theta) = U_0 \times (\theta/2\pi)$ se pudieron obtener estados con circulación entera $(\hbar/m)(2\pi w)$. Los potenciales son impresos en el gas por un tiempo menor al tiempo característico de respuesta, $t_I < \hbar/\mu$, imprimiendo una fase $\varphi_I = U \times t_I/\hbar$. Estos tiempos dependen del régimen de interacción, pero son del orden de $150 \mu\text{s}$. El resultado son *corrientes persistentes*, estados en superfluidos anulares con tiempos de vida largos. Estas corrientes anulares, por su baja mutabilidad ante defectos, son candidatos para giroscopios atómicos altamente sensibles [77]. En la Figura C.4 se muestra el perfil del DMD e imágenes tomadas tiempo después de liberar la muestra de la trampa repulsiva que evidencian la circulación en el anillo exterior. El trabajo muestra la reproducibilidad de estados de diferente circulación en los tres regímenes de interacción (BEC, BCS y unitario) y prueba la estabilidad de estos estados imprimiendo barreras puntuales (4×4 px) con el DMD.

En un trabajo posterior, el grupo utiliza una geometría anular, ahora con dos anillos concéntricos [78]. En cada anillo se imprime un gradiente de fase, pero en sentidos contrarios, con $U(\theta) = (\theta/2\pi) \times \text{sgn}(r - R_0)$, donde R_0 es el radio de la barrera entre los anillos. En este trabajo se estudian las inestabilidades de Kelvin-

Helmholtz que se dan entre dos capas de fluido a contraflujo, y se muestra una relación entre estas inestabilidades y arreglos de vórtices que se producen producto de ellas. Realizando esta clase de experimentos se puede utilizar a los gases ultrafríos como plataforma para la investigación de turbulencia en fluidos.

El campo de los gases ultrafríos ha visto la incorporación del moldeado de potenciales ópticos mediante DMDs en los últimos años. Los trabajos mencionados aquí representan solo una pequeña parte de lo que se está estudiando actualmente con este dispositivo. Particularmente para el LMU, una primera aplicación podría ser ampliar lo estudiado en [9] y observar las ondas de Faraday y modos colectivos en geometrías diferentes al tan utilizado potencial armónico. Asimismo, una de las vías de investigación que motivaron la elección del DMD es el estudio de la vorticidad en los superfluidos en los diferentes regímenes de interacción. En conjunto con una trampa cuasibidimensional, actualmente también en desarrollo, se facilitaría la observación de este fenómeno.

Las posibilidades que se abren para el laboratorio son prometedoras. Se prevé que el dispositivo se comience a implementar en el transcurso del próximo par de años, y confío que este trabajo será de utilidad cuando llegue el momento de diseñar los experimentos futuros. Entretanto, la trampa armónica seguirá proveyendo de mucha física interesante para explorar.

Apéndice A

Control del DMD

El código para control del DMD fue escrito con base en los protocolos desarrollados por Giulia del Pace para el LENS [66] [79]. En su trabajo, Giulia escribe múltiples scripts dedicados a las varias tareas que desempeña el DMD en el experimento de G. Roati. Con su consentimiento, me he permitido tomarlos para el control de nuestro DMD. He condensado los múltiples scripts en dos módulos que desempeñan la mayoría de las tareas del proceso de producción de los potenciales arbitrarios. Estos cuentan con modificaciones que los dotan de mayor flexibilidad a la hora de aplicarlos y de mejor infraestructura para el monitoreo del proceso y diagnóstico de errores. Adicional a los cuatro scripts incluidos aquí, escribí algunos otros que se dedican al diseño de las imágenes objetivo **T**.

Mi objetivo en cuanto a estos códigos ha sido prepararlos para que cualquier otro integrante del laboratorio pueda manejarlos con mínimo tiempo invertido en el aprendizaje de su uso, así como dotarlo de una breve documentación que sirva como guía complementaria. De esta manera puede prescindirse de indagar en el contenido de los módulos, solamente haciendo uso de las opciones añadidas para adecuar la operación del DMD a las necesidades de cada experimento.

A continuación se incluyen los diagramas de flujo de los dos módulos principales. Múltiples procesos fueron condensados en bloques únicos, pues de lo contrario los diagramas llegan a complicarse.

Módulo de calibración de imágenes

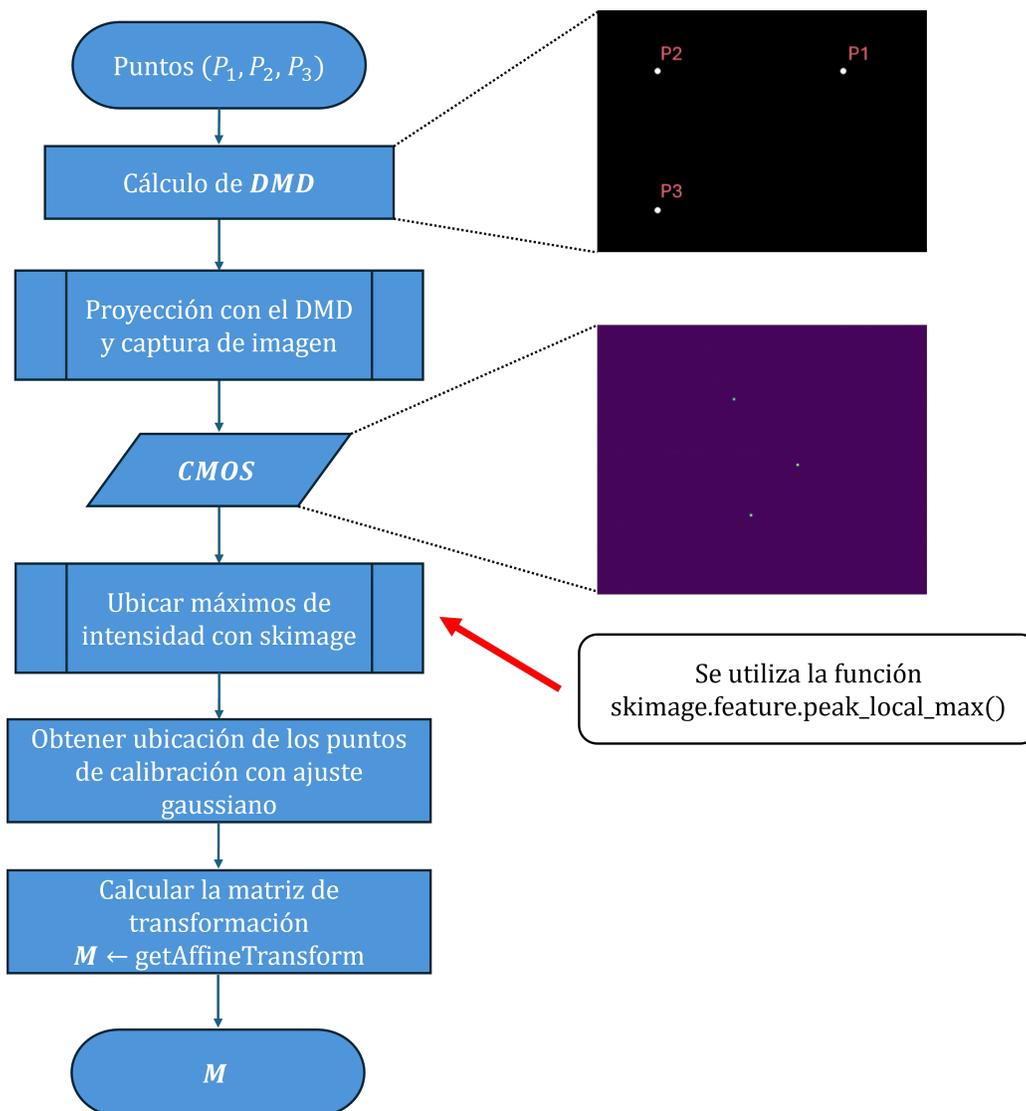


Figura A.1: Diagrama de flujo reducido del módulo de calibración, cuyo resultado es la matriz de transformación M (ec. 3.10). En el proceso se utiliza la librería de Python `scikit-image` [80], para ubicar los máximos de intensidad de la imagen capturada.

Mandar imágenes y secuencias

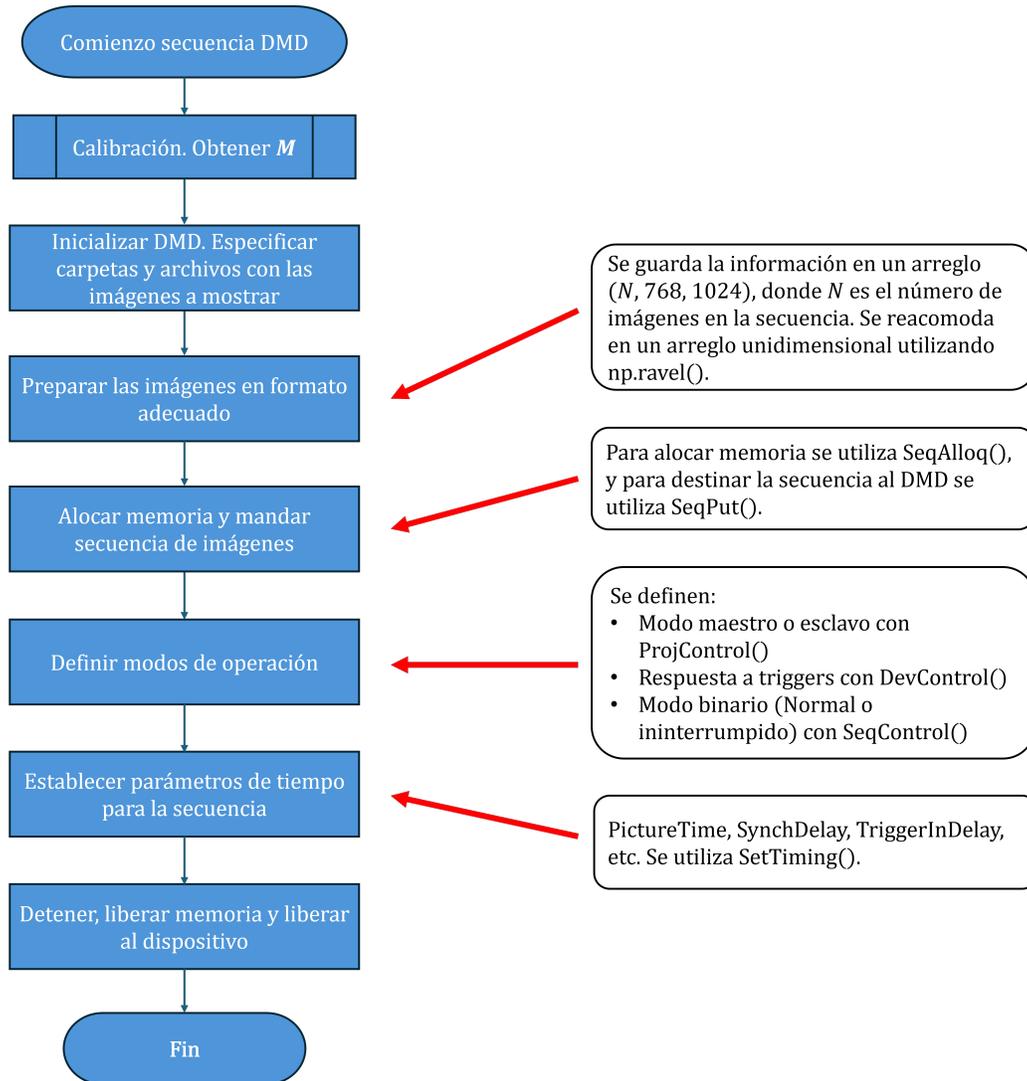


Figura A.2: Diagrama de flujo para la operación del DMD. Este proceso deberá ser incluido en la secuencia experimental completa, cuando el dispositivo sea implementado.

Bibliografía

- [1] Immanuel Bloch, Jean Dalibard, and Wilhelm Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 80:885–964, Jul 2008.
- [2] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne, and Eite Tiesinga. Feshbach resonances in ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1225–1286, Apr 2010.
- [3] Albert Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Sitzungsberichte*, pages 261–267, 1924.
- [4] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, Dec 1957.
- [5] Wilhelm Zwerger. *The BCS-BEC crossover and the Unitary Fermi Gas*. Springer, Berlin, 2012.
- [6] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [7] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3969–3973, Nov 1995.
- [8] B. DeMarco and D. S. Jin. Onset of fermi degeneracy in a trapped atomic gas. *Science*, 285(5434):1703–1706, 1999.
- [9] Diego Hernández-Rajkov, José Eduardo Padilla-Castillo, Alejandra del Río-Lima, Andrés Gutiérrez-Valdés, Freddy Jackson Poveda-Cuevas, and Jorge Amin

- Seman. Faraday waves in strongly interacting superfluids. *New Journal of Physics*, 23, Oct 2021.
- [10] Matthew Pasienski and Brian DeMarco. A high-accuracy algorithm for designing arbitrary holographic atom traps. *Opt. Express*, 16(3):2176–2190, Feb 2008.
- [11] Philipp M. Preiss, Ruichao Ma, M. Eric Tai, Alexander Lukin, Matthew Rispoli, Philip Zupancic, Yoav Lahini, Rajibul Islam, and Markus Greiner. Strongly correlated quantum walks in optical lattices. *Science*, 347(6227):1229–1233, 2015.
- [12] Alexander B Stilgoe, Anatolii V Kashchuk, Daryl Preece, and Halina Rubinsztein-Dunlop. An interpretation and guide to single-pass beam shaping methods using slms and dmds. *Journal of Optics*, 18(6):065609, may 2016.
- [13] G. Gauthier, I. Lenton, N. McKay Parry, M. Baker, M. J. Davis, H. Rubinsztein-Dunlop, and T. W. Neely. Direct imaging of a digital-micromirror device for configurable microscopic optical potentials. *Optica*, 3(10):1136–1143, Oct 2016.
- [14] B. H. Bransden and C. J. Joachain. *Physics of atoms and molecules*. Longman Scientific & Technical, 1 edition, 1983.
- [15] Jun John Sakurai. *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [16] Michael Eric Gehm. *Preparation of an optically-trapped degenerate Fermi gas of ^6Li : Finding the route to degeneracy*. PhD thesis, Duke University, North Carolina, January 2003.
- [17] Energy levels of neutral lithium (li i), February 2025. Available at <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/lithiumtable5.htm>.
- [18] H. B. G. Casimir. *On the Interaction between Atomic Nuclei and Electrons*. Springer Dordrecht, 1 edition, 1936.
- [19] E. Arimondo, M. Inguscio, and P. Violino. Experimental determinations of the hyperfine structure in the alkali atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 49:31–75, Jan 1977.

- [20] P. M. Duarte, R. A. Hart, J. M. Hitchcock, T. A. Corcovilos, T.-L. Yang, A. Reed, and R. G. Hulet. All-optical production of a lithium quantum gas using narrow-line laser cooling. *Phys. Rev. A*, 84:061406, Dec 2011.
- [21] M. S. Safronova, U. I. Safronova, and Charles W. Clark. Magic wavelengths for optical cooling and trapping of lithium. *Phys. Rev. A*, 86:042505, Oct 2012.
- [22] R.A. Duine and H.T.C. Stoof. Atom–molecule coherence in bose gases. *Physics Reports*, 396(3):115–195, 2004.
- [23] Josep Taron. Feshbach resonance: a one dimensional example. *American Journal of Physics*, (81):603–609, 2013.
- [24] Kenneth Martin O’Hara. *Optical trapping and evaporative cooling of fermionic atoms*. PhD thesis, Duke University, North Carolina, 2000. Available at <https://jet.physics.ncsu.edu/theses/pdf/OHara.pdf>.
- [25] J E Lennard-Jones. Cohesion. *Proceedings of the Physical Society*, 43(5):461, sep 1931.
- [26] C.J. Joachain. *Quantum Collision Theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
- [27] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, R. Geursen, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, A. Simoni, E. Tiesinga, C. J. Williams, and P. S. Julienne. Precise determination of ${}^6\text{Li}$ cold collision parameters by radio-frequency spectroscopy on weakly bound molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 94:103201, Mar 2005.
- [28] G. Zürn, T. Lompe, A. N. Wenz, S. Jochim, P. S. Julienne, and J. M. Hutson. Precise characterization of ${}^6\text{Li}$ feshbach resonances using trap-sideband-resolved rf spectroscopy of weakly bound molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 110:135301, Mar 2013.
- [29] Jörg Holsten. Fermionic pairs and the bcs-bec crossover, july 2020. Available at https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~wolschin/statsem20_11s.pdf.

- [30] W. Ketterle and M. W. Zwierlein. Making, probing and understanding ultracold fermi gases. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 31:247–422, 2008.
- [31] Tin-Lun Ho. Universal thermodynamics of degenerate quantum gases in the unitarity limit. *Phys. Rev. Lett.*, 92:090402, Mar 2004.
- [32] R. K. Pathria and P. D. Beale. *Statistical Mechanics*. Elsevier, 3 edition, 1972.
- [33] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2 edition, 2008.
- [34] G. Cook and R. H. Dickerson. Understanding the chemical potential. *American Journal of Physics*, 63(8):737–742, 08 1995.
- [35] Markus Greiner, Cindy A. Regal, and Deborah S. Jin. Emergence of a molecular bose-einstein condensate from a fermi gas. *Nature*, 426(6966):537–540, 2003.
- [36] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov. Weakly bound dimers of fermionic atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 93:090404, Aug 2004.
- [37] Kerson Huang. *Introduction to statistical physics*. Chapman and Hall/CRC, 2 edition, 2009.
- [38] P. Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ -point. *Nature*, 141:74, Dec 1938.
- [39] G. B. Hess and W. M. Fairbank. Measurements of angular momentum in superfluid helium. *Phys. Rev. Lett.*, 19:216–218, Jul 1967.
- [40] A. J. Leggett. Superfluidity. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S318–S323, Mar 1999.
- [41] D. E. Pritchard, E. L. Raab, V. Bagnato, C. E. Wieman, and R. N. Watts. Light traps using spontaneous forces. *Phys. Rev. Lett.*, 57:310–313, Jul 1986.
- [42] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller, and Yurii B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. volume 42 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 95–170. Academic Press, 2000.

- [43] Steven Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable. Experimental observation of optically trapped atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 57:314–317, Jul 1986.
- [44] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle. Optical confinement of a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2027–2030, Mar 1998.
- [45] Harold J. Metcalf and Peter van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer, 1 edition, 1999.
- [46] Christopher J. Foot. *Atomic physics*. Oxford Master Series in atomic, optical, and laser physics. Oxford University Press, 1 edition, 2005.
- [47] Takao Ohno, Kensuke Uchida, Shinsuke Haze, Kenji Toyoda, and Shinji Ura-be. Realization of fast rabi oscillations in radio frequency magnetic resonance of ground zeeman states of 40Ca^+ . *Japanese Journal of Applied Physics*, 50(12R):122801, nov 2011.
- [48] David S Simon. Gaussian beams and lasers. In *A Guided Tour of Light Beams (Second Edition)*, 2053-2563, pages 3–1 to 3–16. IOP Publishing, 2020.
- [49] Vladan Vuletić, Cheng Chin, Andrew J. Kerman, and Steven Chu. Degenerate raman sideband cooling of trapped cesium atoms at very high atomic densities. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5768–5771, Dec 1998.
- [50] B. P. Anderson, T. L. Gustavson, and M. A. Kasevich. Atom trapping in non-dissipative optical lattices. *Phys. Rev. A*, 53:R3727–R3730, Jun 1996.
- [51] Markus Greiner and Simon Fölling. Optical lattices. *Nature*, 453:736–738, 6 2001.
- [52] Nir Davidson, Heun Jin Lee, Charles S. Adams, Mark Kasevich, and Steven Chu. Long atomic coherence times in an optical dipole trap. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1311–1314, Feb 1995.

- [53] H. J. Lee, C. S. Adams, M. Kasevich, and S. Chu. Raman cooling of atoms in an optical dipole trap. *Phys. Rev. Lett.*, 76:2658–2661, Apr 1996.
- [54] N. B. Delone and V. P. Krainov. Ac stark shift of atomic energy levels. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 42:669, 1999.
- [55] Texas Instruments Inc. *DLP7000 DLP® 0.7 XGA 2x LVDS Type A DMD datasheet (Rev. G)*, 2023. Available at https://www.ti.com/lit/ds/symlink/dlp7000.pdf?ts=1737861730713&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.ti.com%252Fproduct%252FDLP7000%253Fdcmp%253Ddsproject%2526hqs%253D.
- [56] ViALUX GmbH. *STAR-07 V-7000 Quick Start Guide*, 2022. Available at https://www.vialux.de/Website/PDF/ALP/E_ALP-4%20Controller-Suite.pdf.
- [57] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 7 edition, 1959.
- [58] Eugene Hecht. *Optics*. Pearson Education Inc., 5 edition, 2008.
- [59] ViALUX GmbH. *ALP-4.3 Controller Suite Application Programming Interface*, 2021.
- [60] Sébastien M. Popoff, Gilbert Shih, Dirk Boonzajer, and GustavePariente. wavefrontshaping/alp4lib: 1.0.2, July 2024. Available at <https://doi.org/10.5281/zenodo.12666344>.
- [61] Patricio Vargas Vélez. Objetivo de microscopio de alta resolución para diagnóstico y manipulación de sistemas ultrafríos. Bachelor’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2022. Available at <https://lanmac.org.mx/es/labs/lmu/TesisLic-VargasPatricio-Biblioteca.pdf>.
- [62] Open Source Computer Vision. Affine transformations, January 2025. Available at https://docs.opencv.org/3.4/d4/d61/tutorial_warp_affine.html.
- [63] Cs 559: Computer graphics. Available at <https://research.cs.wisc.edu/graphics/Courses/559-s2004/docs/floyd-steinberg.pdf>.

- [64] R. W. Floyd and L. Steinberg. An adaptive algorithm for spatial grayscale. *Proceedings of the Society of Information Display*, 17(2):75–77, 1976.
- [65] Adrien Treuille. Image-based rendering. Available at https://www.ti.com/lit/ds/symlink/dlp7000.pdf?ts=1737861730713&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.ti.com%252Fproduct%252FDLP7000%253Fdcmp%253Ddsproject%2526hqs%253D.
- [66] Giulia del Pace. Tailored optical potentials for experiments with atomic superfluids. Master’s thesis, University of Firenze, 2018. Available at https://quantumgases.lens.unifi.it/theses/thesis_delpace_master.pdf.
- [67] Katsuhiko Ogata. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice Hall Hispanoamericana, 2 edition, 1996.
- [68] G. Del Pace, K. Khani, A. Muzi Falconi, M. Fedrizzi, N. Grani, D. Hernandez Rajkov, M. Inguscio, F. Scazza, W. J. Kwon, and G. Roati. Imprinting persistent currents in tunable fermionic rings. *Phys. Rev. X*, 12:041037, Dec 2022.
- [69] Nir Navon, Robert P. Smith, and Zoran Hadzibabic. Quantum gases in optical boxes. *Nature Physics*, 17:1334–1341, 2021.
- [70] Grant L. Schumacher, Jere T. Mäkinen, Yunpeng Ji, Gabriel G. T. Assumpção, Jianyi Chen, Songtao Huang, Franklin J. Vivanco, and Nir Navon. Observation of anomalous decay of a polarized three-component fermi gas, 2023.
- [71] R. Saint-Jalm, P. C. M. Castilho, É. Le Cerf, B. Bakkali-Hassani, J.-L. Ville, S. Nascimbene, J. Beugnon, and J. Dalibard. Dynamical symmetry and breathers in a two-dimensional bose gas. *Phys. Rev. X*, 9:021035, May 2019.
- [72] Niclas Luick, Lennart Sobirey, Markus Bohlen, Vijay Pal Singh, Ludwig Mathey, Thomas Lompe, and Henning Moritz. An ideal josephson junction in an ultracold two-dimensional fermi gas. *Science*, 369(6499):89–91, 2020.

- [73] B.D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics Letters*, 1(7):251–253, 1962.
- [74] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Dover Publications, 2 edition, 1996.
- [75] E. C. Samson, K. E. Wilson, Z. L. Newman, and B. P. Anderson. Deterministic creation, pinning, and manipulation of quantized vortices in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 93:023603, Feb 2016.
- [76] Sambit Banerjee, Kai Zhou, Shiva Kant Tiwari, Hikaru Tamura, Rongjie Li, Panayotis Kevrekidis, Simeon I. Mistakidis, Valentin Walther, and Chen-Lung Hung. Collapse of a quantum vortex in an attractive two-dimensional bose gas, 2025.
- [77] Stephen Ragole and Jacob M. Taylor. Interacting atomic interferometry for rotation sensing approaching the heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.*, 117:203002, Nov 2016.
- [78] D. Hernández-Rajkov, F. Scazza, G. Del Pace, W. J. Kwon, M. Inguscio, K. Xhani, C. Fort, M. Modugno, F. Marino, and G. Roati. Connecting shear flow and vortex array instabilities in annular atomic superfluids. *Nature*, 20:939–944, March 2024.
- [79] Giulia del Pace. *Tunneling transport in strongly-interacting atomic Fermi gases*. PhD thesis, University of Firenze, 2021. Available at https://quantumgases.lens.unifi.it/theses/thesis_delpace_phd.pdf.
- [80] Stéfan van der Walt, Johannes L. Schönberger, Juan Nunez-Iglesias, François Boulogne, Joshua D. Warner, Neil Yager, Emmanuelle Goullart, Tony Yu, and the scikit-image contributors. scikit-image: image processing in Python. *PeerJ*, 2:e453, 6 2014.