Temas Selectos de Óptica
(semestre COVID-19)

Tarea 3

1. (a) Muestra que para cualquier variable aleatoria U:

$$\overline{u^2} = (\overline{u})^2 + \sigma^2$$

   (b) y en particular que para una distribución Poissioniana con porbabilidad de generar k eventos

$$P_k(k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

   el segundo momento momento es $\overline{k^2} = \alpha + \alpha^2$.

   (c) Escoge una muestra de eventos aleatorios y hazle un ajuste Poissioniano.

2. Un láser mono-modal es modulado para producir una intensidad dependiente del tiempo dada por

$$I(t) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos(\omega t + \theta)\right], \tag{1}$$

   en donde I_0 y ω son constantes y conocidas (ignora estas fluctuaciones de origen, da por hecho que el láser fue previamente estabilizado) pero la fase θ es una variable aleatoria distribuida uniformemente de 0 a 2π.

   (a) Encuentra el número promedio de foto-eventos $\overline{K}$ detectados durante un periodo de detección T.

   (b) Encuentra la varianza σ_K^2 del número de foto-eventos observados en el mismo intervalo T.

3. Verifica que las de finiciones del potencial vectorial y escalar,

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \nabla\phi \equiv -\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right),$$

sean consistentes con la cuarta ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

4. Usando los aximas del producto interior en la notación de Dirac prueba que

$$\{\langle \mathbf{A}| + \langle \mathbf{B}|\}\langle \mathbf{C}| = \langle \mathbf{A}|\mathbf{C}\rangle + \langle \mathbf{B}|\mathbf{C}\rangle$$

y que $\langle \mathbf{A}|\mathbf{A}\rangle$ es un número real.

5. Prueba que los vectores

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle \quad \text{y} \quad |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

de los experimentos pensados de espín vistos en clase, son ortogonales.

6. Prueba que los vectores

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle \quad \text{y} \quad |o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle$$

son ortogonales entre si, i. e.

$$\langle i|o\rangle = 0,$$

que se relacionan con los vectores $|u\rangle$ y $|d\rangle$ arrojando las siguientes probabilidades

$$\begin{aligned}
\langle o|u\rangle\langle u|o\rangle &= \frac{1}{2} \\
\langle o|d\rangle\langle d|o\rangle &= \frac{1}{2} \\
\langle i|u\rangle\langle u|i\rangle &= \frac{1}{2} \\
\langle i|d\rangle\langle d|i\rangle &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

y se relacionan con los vectores $|u\rangle$ y $|d\rangle$ arrojando las siguientes probabilidades

$$\langle o|r\rangle\langle r|o\rangle = \frac{1}{2}$$
$$\langle o|l\rangle\langle l|o\rangle = \frac{1}{2}$$
$$\langle i|r\rangle\langle r|i\rangle = \frac{1}{2}$$
$$\langle i|l\rangle\langle l|i\rangle = \frac{1}{2}.$$

¿Son únicos en este respecto?