Temas Selectos de Óptica
(semestre COVID-19)

Tarea 4

1. Prueba los siguientes conmutadores

$$\left[\hat{a}, \left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{2}\right] = 2\hat{a}^{\dagger} \quad \text{y} \quad \left[\hat{a}^{2}, \hat{a}^{\dagger}\right] = 2\hat{a},$$

   y que en general

$$\left[\hat{a}, \left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{n}\right] = n\left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{n-1} \quad \text{y} \quad \left[\hat{a}^{n}, \hat{a}^{\dagger}\right] = n\hat{a}^{n-1}.$$

   Y que, por lo tanto,

$$\left[\hat{a}, e^{\beta\hat{a}^{\dagger}}\right] = \beta e^{\beta\hat{a}^{\dagger}}.$$

   ¿Como se llama este operador y cuales son sus aplicaciones?

2. Usando la definición del promedio $\left\langle\hat{O}\right\rangle \equiv \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{O}\right\}$ determina el número promedio fotones excitados térmicamente,

$$\langle n\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\}$$

   para demostrar que el operador de densidad

$$\hat{\rho} = \sum_{n} P(n)\left|n\right\rangle\left\langle n\right| = \left\{1 - e^{-\hbar/k_{B}T}\right\}\sum_{n} e^{-\hbar/k_{B}T}\left|n\right\rangle\left\langle n\right|$$

   también puede expresarse como

$$\hat{\rho} = \sum_{n} \frac{\langle n\rangle^{n}}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}\left|n\right\rangle\left\langle n\right|.$$

3. Demuestra que el promedio de un observable vale lo mismo en la imagen de Heisenberg que en la imagen de Schrödinger. Es decir,

$$\left\langle\hat{O}(t)\right\rangle_{H} = \left\langle\hat{O}\right\rangle_{S}.$$

4. Prueba que, para luz paralelamente polarizada, el operador de intesidad
$$\hat{I}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 c^2 \left\{ \hat{E}_T^-(\vec{r},t) \times \hat{B}_T^+(\vec{r},t) - \hat{B}_T^-(\vec{r},t) \times \hat{E}_T^+(\vec{r},t) \right\}$$
es equivalente al operador de intensidad detectable
$$\hat{I}_D(\vec{r},t) = 2\varepsilon_0 c \hat{E}^-(\vec{r},t) \hat{E}^+(\vec{r},t).$$

5. Usando los conmutadores
$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1 \quad \text{y} \quad [\hat{X}1, \hat{X}2] = \frac{i}{2}$$
demuestra que, para dos distintas fases χ_1 y χ_2, un campo eléctrico, cuántico mono-modal cumple con el conmutador
$$\left[\hat{E}(\chi_1), \hat{E}(\chi_1) \right] = \frac{i}{2} \sin(\chi_1 - \chi_2)$$
y que por lo tanto, cumple también con la relación de incertidumbre
$$\Delta(\chi_1)\Delta(\chi_2) \geq \frac{1}{4} \left| \sin(\chi_1 - \chi_2) \right| .$$
Discute este resultado en el contexto de las mediciones del tipo homodina.

6. Prueba que los estados de fase
$$|\phi_m\rangle = (r+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^{r} e^{in\phi_m} |n\rangle$$
son ortogonales y cumplen con
$$\sum_{m=0}^{r} |\phi_m\rangle \langle\phi_m| = \sum_{n=0}^{r} |n\rangle \langle n|$$
Discute la relación de la dimensionalidad $r+1$ de $|\phi_m\rangle$ con el conjunto de estados de Fock que la representan.

7. Probar que, para los estados coherentes, las varianzas
$$\left(\Delta \hat{E}(\chi)\right)^2 = \left(\Delta \hat{X}1\right)^2 = \left(\Delta \hat{X}2\right)^2 = \frac{1}{4},$$
i. e. toman el valor mínimo permitido para campos con un solo modo independientmente de α.